پاسخ تشریحی:

۱- گزینه ۱ پاسخ است.

روش اول: معادل دو عدد را در مبنای ۱۰ نوشته و از هم کم می‌کنیم.

$$(۱۱۰۰۱۰۱)_۲-(۱۱۰)_۲-(۲^۶+۲^۵+۲^۲+۲^\circ)-(۲^۲+۲^۱)=۲^۶+\underbrace{۲^۵-۱}_{۳۱}=۲^۶+۲^۴+۲^۳+۲^۲+۲^۱+۲^\circ=(۱۰۱۱۱۱۱)_۲$$

روش دوم: مشابه روشی که برای عمل تفاضل دو عدد در مبنای ده استفاده می‌کنیم انجام می‌دهیم. با این تفاوت که ارزش مکانی هر رقم دو برابر رقم سمت راست خودش است بنابراین در صورت لزوم از یک رقم، یک واحد کم کرده و به ازای آن ۲ واحد به رقم سمت راستش اضافه می‌کنیم. (در مبنای ۱۰ با انجام این کار ۱۰ واحد اضافه می‌کنیم.)

$$\begin{array}{r} (۱۱۰۰۱۰۱)_۲ \\ -\quad (۱۱۰)_۲ \\ \hline (۱۰۱۱۱۱۱)_۲ \end{array}$$

۲- گزینه ۲ پاسخ است.

بزرگ‌ترین عدد چهاررقمی در مبنای ۵ برابر است با: $(۴۴۴۴)_۵=۵^۴-۱=۶۲۴$

باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۹ برابر ۳ است، پس عدد $(۴۴۴۱)_۵$ بر ۹ بخش‌پذیر است و داریم:

$۴+۴+۴+۱=۱۳=$ مجموع ارقام

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم مربع هر عدد فرد به‌صورت $۸k+۱$ است پس $b=۱$

$$(۵۰۰۱)_۸\le(۵۰a۱)_۸\le(۵۰۷۱)_۸$$

$$۲۵۶۱\le(۵۰a۱)_۸\le۲۶۱۷\Rightarrow ۲۵۶۱\le(۵۱)^۲=۲۶۰۱\le۲۶۱۷$$

$$۲۶۰۱ \div ۸:\ ۳۲۵,\ \text{r}\ ۱ \qquad ۳۲۵\div ۸:\ ۴۰,\ \text{r}\ ۵ \qquad ۴۰\div ۸:\ ۵,\ \text{r}\ \circ \qquad ۵\div ۸:\ \text{r}\ ۵$$

$$\Rightarrow ۲۶۰۱=(۵۰۵۱)_۸\Rightarrow a=۵$$

$$\Rightarrow a+b=۶$$

۴- گزینه ۱ پاسخ است.

بزرگ‌ترین عدد ممکن در مبنای ۷ عبارت است از:

$$(۶۶۶)_۷=۶+۶\times۷+۶\times۷^۲=۳۴۲$$

که دقیقاً عدد قبل $۷^۳$ است. اولین مکعب کامل قبل از $۷^۳$، $۶^۳$ است که زوج است، پس بزرگ‌ترین مکعب کامل فرد قبل از $۷^۳$، عدد $۵^۳$ است.

$$۵^۳=۱۲۵ \div ۷:\ \frac{۱۱۹}{۶},\ ۱۷ \qquad ۱۷\div ۷:\ \frac{۱۴}{۳},\ ۲ \qquad \Rightarrow ۵^۳=(۲۳۶)_۷$$

لذا بزرگ‌ترین مکعب کامل فرد در مبنای ۷، $(۲۳۶)_۷$ است.

$$a+b+c=۱۱$$

دقت کنید در این‌گونه سؤالات منظور از مکعب کامل، مکعب کامل در مبنای ۱۰ است.

۵- گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا هر دو عدد را در مبناهای داده شده بسط می‌دهیم:

$$(abc)_{۷} = (cba)_{۵} \Rightarrow ۴۹a + ۷b + c = ۲۵c + ۵b + a \Rightarrow ۲b = ۲۴c - ۴۸a \Rightarrow b = ۱۲c - ۲۴a$$

$$\Rightarrow b = ۱۲(c - ۲a) \xrightarrow[۱۲|b\ ,\ ۰\le b<۵]{b\ \text{رقم است در مبنای ۵}} b = ۰ \Rightarrow c - ۲a = ۰ \Rightarrow c = ۲a$$

پس $a = ۱$ و $a = ۲$ (با توجه به این‌که $a, b, c < ۵$)، بنابراین فقط دو جواب دارد.

۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$۳p + ۱ = n^{۲} \Rightarrow (n^{۲} - ۱) = (n - ۱)\ (n + ۱) = ۳p$$

۱	۳p	$\Rightarrow p = ۱$
۳	p	$\Rightarrow \boxed{p = ۵}$
p	۳	$\Rightarrow p = ۱$
۳p	۱	×

۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$A = (۳\times۵\times۷\times۱۱\times۱۳\times۱۷\times۱۹ + ۳^{۲}\times۵^{۲}) = ۳\times۵\underbrace{(۷\times۱۱\times۱۳\times۱۷\times۱۹ + ۳\times۵)}$$

این عدد بر اعداد ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ۱۹ و ۳ و ۵ تقسیم‌پذیر نمی‌باشد اما چون جمع دو عدد زوج است، بر ۲ بخش‌پذیر است.

$$\Rightarrow ۲ | A \qquad ۳ | A \qquad ۵ | A$$

۸- گزینه ۳ پاسخ است.

چون $۳۱ \simeq \sqrt{۹۹۹}$ است، لذا کافی است تقسیم‌پذیری بر بقیه‌ی اعداد اول بین ۲۲ و ۳۱ را کنترل کنیم. لذا حداکثر لازم است بر ۲۳ و ۲۹ و ۳۱ تقسیم کنیم.

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} p \mid ۴۰! + p^{۲} + p \\ p \mid p^{۲} + p \end{array}\right\} \Rightarrow p \mid ۴۰! \Rightarrow p = ۲\ \text{یا}\ ۳\ \text{یا}\ ۵\ \text{یا}\ ۷\ \text{یا}\ ۱۱\ \text{یا}\ \ \text{یا}\ ۱۷\ \text{یا}\ ۱۹\ \text{یا}\ ۲۳\ \text{یا}\ ۲۹\ \text{یا}\ ۳۱\ \text{یا}\ ۳۷$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ است.

چون مجموع دو عدد اول فرد است، حتماً یکی از دو عدد ۲ بوده است. لذا:

$$۲ + ۱۰۱ = ۱۰۳ \Rightarrow ۲\times۱۰۱ = ۲۰۲$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$$(۱۶۰)_{۷} = ۱\times۷^{۲} + ۶\times۷^{۱} + ۰ = ۹۱ \Rightarrow (۱۶۴)_{۷} = ۹۵\ ,\ (۱۶۵)_{۷} = ۹۶\ ,\ (۱۶۶)_{۷} = ۹۷$$

۹۶ بر ۲ و ۹۵ بر ۵ و ۹۱ بر ۷ تقسیمپذیر است لذا ۹۱ از همه دیرتر حذف می شود. ۹۷ اول است و اصلاً حذف نمی شود .

۱۲- گزینه ۱ پاسخ است.

هر عدد اول بزرگتر از ۳ به‌صورت $۶k \pm ۱$ نوشته می‌شود و داریم:

$$p = ۶k \pm ۱ \Rightarrow p^{۲} = ۳۶k^{۲} \pm ۱۲k + ۱ = ۱۲\underbrace{(۳k^{۲} \pm k)}_{k'} + ۱ = ۱۲k' + ۱ \xrightarrow{k'=۲q} p^{۲} = ۲۴q + ۱$$

$$p^{۲} + ۴۷ = ۲۴q + ۴۸ = ۲۴(q + ۲) = ۲۴q' \Rightarrow ۲۴ \mid p^{۲} + ۴۷$$

تذکر: حاصل عبارت $۳k^{۲} \pm k$، به‌ازای جمیع مقادیر صحیح **k**، عددی زوج است.

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} a = ۳۴q + r \\ r = ۷q \end{array}\right\} \Rightarrow a = ۳۴q + ۷q = ۴۱q \qquad (q \in \mathbb{Z})$$

$$۰ \le r < ۳۴ \Rightarrow ۷q < ۳۴ \Rightarrow q < \frac{۳۴}{۷} \Rightarrow q_{max} = ۴$$

$$a = ۴۱\times۴ = ۱۶۴$$

۱۴- گزینه ۳ پاسخ است.

مطابق الگوریتم تقسیم داریم: $a = ۲۳k + ۹ \quad (k \in \mathbb{Z})$. چون a زوج و ۹ فرد است. پس $۲۳k$ عددی فـرد و در نتیجـه k فـرد اسـت، پـس می‌توان k را به‌صورت $۲q+۱ \; (q \in \mathbb{Z})$ نوشت. داریم:

$$a = ۲۳(۲q+۱)+۹ = ۶۴q+۳۲ \Rightarrow \frac{a}{۲} = ۲۳q+۱۶$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a = ۱۸k \,, b = ۱۲q$$

$$a = bq'+r \Rightarrow ۱۸k = ۱۲qq'+r \Rightarrow r = ۱۸k-۱۲qq' = ۶(۳k-۲qq') \Rightarrow r = ۶m \Rightarrow ۶ \mid r$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$۸۰۲ = ۱۴b+r \xrightarrow{۰\le r<b} \begin{cases} r = ۸۰۲-۱۴b \ge ۰ \Rightarrow b \le ۵۷ \\ r = ۸۰۲-۱۴b < b \Rightarrow b \ge ۵۴ \end{cases} \Rightarrow ۵۴ \le b \le ۵۷$$

۱۷- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\overline{abb}+\overline{baa} = ۲k \Rightarrow a+b = ۲k'$$

بنابراین a و b یا هر دو زوجند یا هر دو فرد.

$$\text{هر دو زوج } b,a: \begin{cases} a = ۲t \\ b = ۲t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^۲ = ۴t^۲ \\ b^۲ = ۴t'^۲ \end{cases} \Rightarrow a^۲-b^۲ = ۴q$$

$$\text{هر دو فرد } b,a: \begin{cases} a = ۲t+۱ \\ b = ۲t'+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^۲ = ۸q+۱ \\ b^۲ = ۸q'+۱ \end{cases} \Rightarrow a^۲-b^۲ = ۸q''$$

پس باقی‌مانده‌ی $a^۲-b^۲$ بر ۴، صفر است.

۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به این‌که اگر $a+b \mid a^n+b^n$، باید n فرد باشد و بالعکس، پس:

$$۸۲ \mid ۳^n+۱ \Rightarrow ۳^۴+۱ \mid ۳^n+۱$$

پس باید $۳^n+۱$ به‌صورت $(۳^۴)^{۲k+۱}+۱$ باشد، لذا n به‌صورت مضرب فرد ۴ درمی‌آید:

$$n = ۴(۲k+۱)$$

حال مضارب فرد دورقمی چهار عبارتند از: $\{۴\times۳ \,, ۴\times۵ \,, ۴\times۴ \,, \dots \,, ۴\times۲۳\}$ که یازده مقدار است. هم‌چنین می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد:

$۱۰ \le ۴(۲k+۱) < ۱۰۰ \Rightarrow ۳ \le ۲k+۱ < ۲۵ \Rightarrow ۱ \le k < ۱۲ \Rightarrow k = ۱$ تا ۱۱ : یازده مقدار

نکته: در حالت کلی داریم:

$$a-b \mid a^n-b^n \qquad a+b \mid a^{۲n+۱}+b^{۲n+۱} \qquad a+b \mid a^{۲n}-b^{۲n}$$

و برعکس اگر $a+b \mid a^n+b^n$، باید n فرد باشد. مـی‌تـوانیم مثـل روش حسـابان بنویسـیم: $a+b = ۰ \Rightarrow b = -a$ لـذا اگـر بخواهـد $a+b \mid a^n+b^n$ باشد، باید باقی‌مانده‌ی تقسیم a^n+b^n بر $a+b$ برابر صفر باشد. پس باید:

$a^n+(-a)^n = ۰ \Rightarrow$ n باید فرد باشد.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ است. صفحه ۴ کتاب

$$\begin{cases} x \mid a-۲ \Rightarrow a-۲ = xk \\ x \mid b-۵ \Rightarrow b-۵ = xk' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = xk+۲ \\ b = xk'+۵ \end{cases} \Rightarrow ab = xk''+۱۰ \Rightarrow ab-۹ = xk''+۱$$

راه‌حل دیگر: در حالت کلی داریم:

$$\left.\begin{matrix} x \mid a-b \Rightarrow x \mid ac-bc \\ x \mid c-d \Rightarrow x \mid bc-bd \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \mid ac-bd$$

لذا:

$$\left.\begin{matrix} x \mid a-۲ \\ x \mid b-۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \mid ab-۱۰ \Rightarrow ab-۱۰ = xq \Rightarrow ab-۹ = xq+۱$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: عدد a^n+b^n به‌ازای مقادیر فرد n بر $a+b$ بخش‌پذیر است، زیرا به‌ازای مقادیر فرد داریم:

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$$

بنابراین:

$$3^{18}+2^{18}=(3^2)^9+(2^2)^9=9^9+4^9 \quad , \quad 9+4\,|\,9^9+4^9$$

نکته: در حالت کلی داریم:

$$\begin{aligned} n\in\mathbb{N}:\ & a-b\,|\,a^n-b^n \\ & a+b\,|\,a^{2n+1}+b^{2n+1} \\ & a+b\,|\,a^{2n}-b^{2n} \end{aligned}$$