۳۶. گزینه ۴

$$a=-93 \quad b=11 \Rightarrow x=\left[\frac{a}{b}\right]=\left[-\frac{93}{11}\right]=-9$$

$$Amin=-93-11\times(-9)=6$$

۳۷. گزینه ۴ با توجه به گزینه‌ها، همه‌ی حالات ممکن برای باقی مانده‌ی تقسیم عدد n بر ۷ را در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{cases} n=7k \Rightarrow n^2=7k' \\ n=7k+1 \Rightarrow n^2=7k'+1 \\ n=7k+2 \Rightarrow n^2=7k'+4 \\ n=7k+3 \Rightarrow n^2=7k'+9=7k''+2 \\ n=7k+4 \Rightarrow n^2=7k'+16=7k''+2 \\ n=7k+5 \Rightarrow n^2=7k'+25=7k''+4 \\ n=7k+6 \Rightarrow n^2=7k'+36=7k''+1 \end{cases}\right\} \Rightarrow n^2=7q+0,1,2,4$$

بنابراین n^2 نمی‌تواند به صورت $7k'+3 \overset{\text{یا}}{=\!=} 7k-4$ باشد:

دقت کنید اگر $n=7k+r\ (0\le r\le 6)$ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم n^2 بر ۷ ، برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم r^2 بر ۷ است.

۳۸. گزینه ۲ فرض می کنیم x واحد می توان به مقسوم اضافه نمود.

$$\begin{cases} a=57q+18 \\ a+x=57(q+1)+43 \end{cases} \Longrightarrow 57q+18+x=57q+100 \Rightarrow 18+x=100 \Rightarrow x=82$$

۳۹. گزینه ۴

می دانیم در قضیه تقسیم $a=bq+r$ باید $0\le r\le b$ باشد. بنابراین:

$$r=q^2-2$$

$$a=37q+q^2-2$$

$$0\le r\le b \Rightarrow q^2-2<37 \Rightarrow q^2<39$$

$$\xrightarrow{q\in Z} \max(q)=6 \Rightarrow \max(a)=37\times 6+6^2-2=222+34=256=16^2$$

۴۰. گزینه ۲

راه حل اول: چون خارج قسمت تقسیم a بر b برابر $\left[\frac{a}{b}\right]$ است، لذا:

$$71=b\times 4+r$$

$$\left[\frac{71}{b}\right]=4 \Rightarrow 4\le\frac{71}{b}<5 \Rightarrow \frac{1}{5}<\frac{b}{71}\le\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{71}{5}\le b<\frac{71}{4} \Rightarrow \quad 15\le b\le 17$$

$b=15\,,\ 16\,,\ 17$ ۳ مقدار

راه حل دوم: طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$$71=b(4)+r \qquad 0\le r<b$$

لذا با اعمال شرط باقیمانده خواهیم داشت:

$$r=71-4b\,,\ 0\le r<b \Rightarrow 0\le 71-4b<b \Rightarrow \frac{71}{5}<b\le\frac{71}{4} \Rightarrow 15\le b\le 17$$ ۳ مقدار

۴۱. گزینه ۲

$$\begin{cases} a=bq+r \\ a+90=(b+4)q+r-2 \end{cases} \Rightarrow bq+r+90=bq+4q+r-2 \Rightarrow 4q=92 \Rightarrow q=23$$

۴۲. گزینه ۱

$$a = ۲۳q + \frac{۱}{۳}q$$
$$a = ۲۳ \times ۳k + k$$

با توجه به آنکه $r = \frac{۱}{۳}q$, r عدد حسابی است پس q باید مضرب ۳ باشد، پس $q = ۳k$:

ویژگی باقیمانده را در نظر مي‌گيريم:

$$۰ \leq \frac{۱}{۳}q < ۲۳ \Rightarrow ۰ \leq \frac{۱}{۳} \times ۳k < ۲۳ \Rightarrow ۰ \leq k < ۲۳ \Rightarrow k\max = ۲۲$$
$$a\max = ۲۳ \times ۳ \times ۲۲ + ۲۲ = ۱۵۴۰$$

۴۳. گزینه ۴ رقم یکان هیچ مربع کاملی ۲ یا ۳ یا ۷ یا ۸ نیست گزینه (۳) رد می شود. اگر یک عدد مربع کامل بر ۳ بخش پذیر باشد بر ۹ نیز باید بخش پذیر است، در غیر اینصورت باقیمانده اش بر ۳ برابر ۱ می شود.

در گزینه های (۱)و(۲) اعداد داده شده بر ۳ بخش پذیر است ولی بر ۹ بخش پذیر نیست پس گزینه ی ۴ صحیح است.

تذکر: برای تعیین باقیمانده عددی بر ۳ یا ۹ مجموع ارقام آن عدد را بر ۳ یا ۹ تقسیم می کنیم.

۴۴. گزینه ۳

$$a = bq + r \quad , \quad ۰ \leq r < b$$
$$a = ۱۷q + \frac{۱}{۱۰}q$$

می دانیم $r = \frac{۱}{۱۰}q$ و باید r عددی حسابی باشد پس:

q باید مضرب ۱۰ باشد تا $\frac{۱}{۱۰}q$ عددی صحیح باشد پس $q = ۱۰k$ و از طرفی $۰ \leq r < b$ در نتیجه:

$$۰ \leq \frac{۱}{۱۰}q < ۱۷ \Rightarrow ۰ \leq k < ۱۷ \Rightarrow k = ۰, ۱, \cdots, ۱۶$$

از طرفی چون a طبیعی است $k \neq ۰$ است پس $k = ۱, ۲, \cdots, ۱۶$

$$a\max = ۱۷ \times ۱۰ \times ۱۶ + \frac{۱}{۱۰} \times ۱۰ \times ۱۶ = ۲۷۲۰ + ۱۶ = ۲۷۳۶$$

۴۵. گزینه ۳

اگر $n = ۲q + ۱$، آنگاه:

$$n^۲ = ۴q^۲ + ۴q + ۱ = \underbrace{۴q(q+۱)}_{\text{دو عدد متوالی}=۲۵} + ۱ = ۸k + ۱ \quad (k, q \in Z)$$

اگر $n = ۲q$ آنگاه:

$$\begin{cases} q = ۲q' \Rightarrow n = ۴q' \Rightarrow n^۲ = ۱۶q'^۲ = ۸k' \\ q = ۲q' + ۱ \Rightarrow n = ۴q' + ۲ \Rightarrow n^۲ = ۱۶q'^۲ + ۱۶q' + ۴ = ۸(۲q'^۳ + ۲q') + ۴ = ۸k' + ۴ \end{cases} \qquad (k', q' \in Z)$$

۴۶. گزینه ۳

$$x^a + y^a / x^n + y^n \; ; \; (\frac{n}{a} = \text{طبیعی و فرد})$$

باید ۹ بر n بخش پذیر و $\frac{۹}{n}$ باید فرد باشد.

$$n | ۹ \to n = ۱, ۳, ۹$$
$$۲^n + ۱ \Big| ۲^۹ + ۱ \Rightarrow \frac{۹}{n} = k \in \text{اعداد فرد} \Rightarrow n = ۱, ۳, ۹$$

از طرفی هم $\frac{۹}{۱}$ و هم $\frac{۹}{۳}$ و هم $\frac{۹}{۹}$ فردند پس n، ۳ مقدار مختلف دارد.

۴۷. گزینه ۲

$a + b | a^n - b^n$; n های طبیعی و زوج

$a - b | a^n - b^n$; به ازای تمام n های طبیعی

اگر n زوج باشد هم بر $a - b$ و هم بر $a + b$ بخش‌پذیر است. $۱۱^{۱۰} - ۱$ بر $۱۱ - ۱ = ۱۰$ و $۱۱ + ۱ = ۱۲$ بخش‌پذیر است، و چون عدد بر ۱۰ و ۱۲ بخش پذیر است پس بر ۱۲۰ هم بخش پذیر است.

۴۸. گزینه ۱ رابطه بخش پذیری در مجموعه اعداد صحیح دارای خاصیت تعدی می باشد: $\left.\begin{matrix} a|b \\ b|c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a|c$

روش اول:

$$\left.\begin{array}{l} \text{فرض}: a^2|b \\ \text{می دانیم}: a|a^2\end{array}\right\}\Rightarrow a|b$$

روش دوم:

$$a^2|b \xrightarrow{\times b} a^2|b^2 \Rightarrow a|b$$

برای رد کردن ۳ گزینه ی دیگر می توانیم $a=8$ و $b=4$ را امتحان کنیم.

۴۹. گزینه ۳

می دانیم مربع هر عدد طبیعی فرد به صورت $8k+1$ می باشد پس:

$$\begin{cases} a^2=8k+1\\ b^2=8k'+1\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=8q+2=2(4q+1)$$

پس عدد c بر ۲ بخش‌پذیر است ولی بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

۵۰. گزینه ۴

$$a|b\Rightarrow a^2|b^2 \xrightarrow{b^2|b^3} \Rightarrow a^2|b^3$$

سایر گزینه‌ها دارای مثال نقض می‌باشند.

مثال نقض برای گزینه ۱: $6|4\times 9\Rightarrow 6\nmid 4, 6\nmid 9$

مثال نقض برای گزینه ۲ و ۳: $2|5\pm 3\Rightarrow 2\nmid 5, 2\nmid 3$

تذکر: اگر $a|bc$, a عددی اول باشد آنگاه $a|b$ یا $a|c$

۵۱. گزینه ۴ نکته: اگر $a|b, a|c$ ، آن‌گاه به ازای هر $m, n\in\mathbb{Z}$ داریم: $a|mb+nc$

$$\begin{cases} a-b|a\\ a-b|a-b\end{cases}\Rightarrow a-b|a-(a-b)\Rightarrow a-b|b$$

الف) $\begin{cases} a-b|a\\ a-b|b\end{cases}\Rightarrow a-b|a+b$ ب) $\begin{cases} a-b|a\\ a-b|b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a-b|2a\\ a-b|3b\end{cases}\Rightarrow a-b|2a+2b$

ج) $\begin{cases} a-b|a\\ a-b|b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a-b|a^3\\ a-b|b^3\end{cases}\Rightarrow a-b|a^3+b^3$

۵۲. گزینه ۱ راه حل اول: ابتدا از رابطه‌ی $2n+1|2n+1$ کمک می‌گیریم تا درجه‌ی طرف راست را کاهش دهیم:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{فرض} & : 2n+1|n^2+n+1 \xrightarrow{\times 2} 2n+1|2n^2+2n+2 \\ \text{رابطه ی کمکی} & : 2n+1|2n+1 \xrightarrow{\times n} 2n+1|2n^2+n\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2n+1|n+2 \xrightarrow{\times 2} 2n+1|2n+4 \\ 2n+1|2n+1\end{array}\right\}\Rightarrow 2n+1|3\Rightarrow\begin{cases} 2n+1=\pm1\Rightarrow\begin{cases} n=0\\ n=-1\end{cases}\\ 2n+1=\pm3\Rightarrow\begin{cases} n=1\\ n=-2\end{cases}\end{cases}$$

فقط $n=1$ طبیعی است. چون در این عملیات‌های یک‌طرفه بهره بردیم. ممکن است در پایان ریشه‌های اضافه وارد شده باشند. لذا باید صدق کردن ریشه‌ها را در معادله کنترل کنیم که $n=1$ در معادله صادق است: $3|3$

راه حل دوم: اگر $a=bq+r$ باشد و $b|a$ ، آن‌گاه $b|r$. حال برای یافتن باقیمانده می‌توانیم از روش حسابان بهره بگیریم:

$$2n+1|n^2+n+1: 2n+1=0\Rightarrow n=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2n+1|(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$$

برای آن‌که از صحیح نبودن باقیمانده جلوگیری کنیم. چون $(2n+1, 4)=1$ ، لذا گزاره‌ی فوق هم‌ارز $2n+1|\frac{3}{4}\times 4=3$ است، پس:

$$2n+1=\pm3, n=1$$

نکات:

۱) $\left.\begin{array}{l} a|b\\ a|c\end{array}\right\}\Rightarrow a|mb+nc$ ۲) لم اقلیدس: $a|bc \xleftrightarrow{(a,c)=1} a|b$

۳) باقیمانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$ برابر است با: $f(a)$

۵۳. گزینه ۱

ریشه عبارت سمت چپ را یافته و آن را در عبارت سمت راست رابطه قرار می دهیم.

$$n+۲|n^۲+۴n+۱۰$$

$$n+۲=۰\Rightarrow n=-۲\Rightarrow n+۲|۶\Longrightarrow\begin{cases}n+۲=\pm۱\Rightarrow n=-۱,-۳ & \text{غ ق ق}\\ n+۲=\pm۲\Rightarrow n=۰,-۴ & \text{غ ق ق}\\ n+۲=\pm۳\Rightarrow n=۱,-۵\\ n+۲=\pm۶\Rightarrow n=۴,-۸\end{cases}$$

دو مقدار صحیح و مثبت برای n وجود دارد.

۵۴. گزینه ۳ نکته: تنها عدد اول زوج **۲** است. یعنی تمام اعداد اول، به جز **۲**، فرد هستند.

نکته: مجموع دو عدد فرد، عددی زوج است. $(n=۲k+۱\ ,\ n'=۲k'+۱\Rightarrow n+n'=۲(k+k'+۱))$

با توجه به نکات فوق و این مطلب که $p+q=۱۲۹$ عددی فرد است. پس باید یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد باشد . در نتیجه:

$$\begin{cases}p=۲\\ q=۱۲۷\end{cases}\Rightarrow ۲q-۳p^۳=۲۵۴-۲۴=۲۳۰=۲\times۵\times۲۳$$

بنابراین این عدد بر **۱۱** بخش‌پذیر نیست.

۵۵. گزینه ۱

$$۱۹p+۱=k^۲\Rightarrow ۱۹p=k^۲-۱=(k-۱)(k+۱)$$

چون **۱۹** و p اعداد اولند، پس:

$$\begin{cases}k-۱=p\\ k+۱=۱۹\end{cases}\Rightarrow p=۱۷\quad \text{یا}\quad \begin{cases}k-۱=۱۹\\ k+۱=p\end{cases}\Rightarrow p=۲۱\quad \text{اول نیست}$$

فقط $p=۱۷$ قابل قبول است.