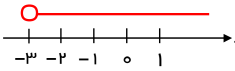
دبیرستان علامه حلی تهران

۱.**گزینه ۴** عضو ابتدای مجموعه‌ی C، باقیمانده‌ی ۴۳۸ بر ۱۹ یعنی برابر یک است. مجموعه A که عضو ابتدا ندارد. در مجموعه‌های B و D نیز با نوشتن اعضا به راحتی معلوم می‌شود که عضو ابتدا به ترتیب ۰ و -۲ است، پس عضو ابتدای مجموعه‌ی D کوچک‌تر از سایرین است.

$۱)A:$  A عضو ابتدا ندارد

$۲)\ B=\{۰,\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\cdots\}\rightarrow$ عنصر ابتدا صفر است.

$۳)\ C=\{۴۳۸-۱۹۹>۰\}\quad q=[\frac{۴۳۸}{۱۹}]=۲۳\Rightarrow C_{\min}=۱$

$۴)\ D=-۲\leq x\leq ۲\Rightarrow$ عضو ابتدا $=-۲$

۲.**گزینه ۴**

$۹۲۳=۹b+r\ ,\ ۰\leq r<b$

$r\geq ۰\Rightarrow ۹۲۳-۹b\geq ۰\Rightarrow ۹b\leq ۹۲۳\Rightarrow b\leq ۱۰۲/\cdots$

$r<b\Rightarrow ۹۲۳-۹b<b\Rightarrow ۱۰b>۹۲۳\Rightarrow b>۹۲/۳\Rightarrow ۹۳\leq b\leq ۱۰۲\xrightarrow[\text{را برمی داریم}]{\text{مضارب ۳}} b=۹۳\ ,\ ۹۶\ ,\ ۹۹\ ,\ ۱۰۲$

روش دوم:

$$q=\left[\frac{a}{b}\right]\Rightarrow ۹=\left[\frac{۹۲۳}{b}\right]\Rightarrow ۹\leq\frac{۹۲۳}{b}<۱۰\xrightarrow{\text{طرفین عکس}}\frac{۱}{۱۰}\leq\frac{b}{۹۲۳}<\frac{۱}{۹}\xrightarrow{\times ۹۲۳}۹۳\leq b\leq ۱۰۲$$

در ادامه مانند روش اول عمل می‌کنیم

۳.**گزینه ۲**

راه حل اول: چون خارج قسمت تقسیم a بر b برابر $\left[\frac{a}{b}\right]$ است، لذا:

$۷۱=b\times ۴+r$

$$\left[\frac{۷۱}{b}\right]=۴\Rightarrow ۴\leq\frac{۷۱}{b}<۵\Rightarrow\frac{۱}{۵}<\frac{b}{۷۱}\leq\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۷۱}{۵}\leq b<\frac{۷۱}{۴}\Rightarrow ۱۵\leq b\leq ۱۷$$

$b=۱۵\ ,\ ۱۶\ ,\ ۱۷$ ۳ مقدار

راه حل دوم: طبق الگوریتم تقسیم داریم:

$۷۱=b(۴)+r\qquad ۰\leq r<b$

لذا با اعمال شرط باقیمانده خواهیم داشت:

$$r=۷۱-۴b\ ,\ ۰\leq r<b\Rightarrow ۰\leq ۷۱-۴b<b\Rightarrow\frac{۷۱}{۵}<b\leq\frac{۷۱}{۴}\Rightarrow ۱۵\leq b\leq ۱۷$$ ۳ مقدار

۴.**گزینه ۱** عضو ابتدای مجموعه‌ی $S=\{a-bq\geq ۰|q\in\mathbb{Z}\}$ برابر است با باقیمانده‌ی تقسیم a بر b.

لذا در این سؤال عضو ابتدای مجموعه، باقیمانده تقسیم ۴۸- بر ۵ است.

$$q=\left[\frac{a}{b}\right]\Rightarrow q=\left[\frac{-۴۸}{۵}\right]=-۱۰\Rightarrow r=a-bq=-۴۸-۵(-۱۰)=۲$$

۵.**گزینه ۳** ابتدا قضیه‌ی الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم:

$a=۱۰\times r+r^۲\qquad ۰\leq r^۲<۱۰$

حال شرط باقیمانده را بر آن اعمال می‌کنیم:

$$r^۲<۱۰\Rightarrow\begin{cases}r=۰\rightarrow a=۰\\ r=\pm ۱\xrightarrow{r=۱}a=۱۱\\ r=\pm ۲\xrightarrow{r=۲}a=۲۴\\ r=\pm ۳\xrightarrow{r=۳}a=۳۹\end{cases}$$

دقت کنید که هنگامی که هم مقسوم ومقسوم‌علیه عددی طبیعی هستند حتماً خارج قسمت عدد حسابی است. به همین دلیل rهای منفی را در نظر نگرفته‌ایم.

۶.گزینه ۲ همواره خارج قسمت تقسیم a بر b، برابر است با $[\frac{a}{b}]$ ، در نتیجه داریم:

$$q=[\frac{۱۳!-۱}{۱۳}]=[\frac{۱۳!}{۱۳}-\frac{۱}{۱۳}]=[۱۲!-\frac{۱}{۱۳}]=۱۲!-۱$$

۷.گزینه ۳

اگر $n=۲q+۱$، آنگاه:

$$n^۲=۴q^۲+۴q+۱=\underbrace{۴q(q+۱)}_{\text{دو عدد متوالی}=۲۵}+۱=۸k+۱\quad(k,q\in Z)$$

اگر $n=۲q$ آنگاه:

$$\begin{cases}q=۲q'\Rightarrow n=۴q'\Rightarrow n^۲=۱۶q'^۲=۸k'\\ q=۲q'+۱\Rightarrow n=۴q'+۲\Rightarrow n^۲=۱۶q'^۲+۱۶q'+۴=۸(۲q'^۳+۲q')+۴=۸k'+۴\qquad(k',q'\in Z)\end{cases}$$

۸.گزینه ۳ روش اول: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases}۷۸۷=a\times ۱۰+r\\ a\in N\text{،}\ ۰\leq r<a\end{cases}\xrightarrow{\div a}\frac{۷۸۷}{a}=۱۰+\frac{r}{a}\xrightarrow{۰\leq\frac{r}{a}<۱}۱۰\leq\frac{۷۸۷}{a}<۱۱\Rightarrow\begin{cases}۱۰a\leq ۷۸۷\Rightarrow a\leq ۷۸/۷\\ \frac{۷۸۷}{۱۱}<a\Rightarrow a\geq ۷۲\end{cases}$$

۷ مقدار طبیعی برای a وجود دارد که عبارتند از : ۷۸,۰۰۰,۷۳،۷۲

روش دوم:

$$۷۸۷=a\times ۱۰+r$$

$$q=[\frac{a}{b}]\Rightarrow ۱۰=[\frac{۷۸۷}{a}]\xrightarrow{\text{عکس کنید}}\frac{۱}{۱۱}<\frac{a}{۷۸۷}\leq\frac{۱}{۱۰}\xrightarrow{\times ۷۸۷}\frac{۷۸۷}{۱۱}<a\leq\frac{۷۸۷}{۱۰}\to ۷۲\leq a\leq ۷۸$$

$$\text{تعداد } a=۷۸-۷۲+۱=۷$$

۹.گزینه ۴ نکات:

$$\begin{cases}a^n+b^n\ \text{به ازای } n \text{ فرد بر } a+b \text{ بخش پذیر است}\\ a^n-b^n\ \text{به ازای } n \text{ زوج بر } a+b \text{ بخش پذیر است}\\ a^n-b^n\ \text{به ازای هر } n \text{ بر } a-b \text{ بخش پذیر است}\end{cases}$$

$$۳^{۲۵۲}+۲^{۳۹}=(۳^۴)^{۱۳}+(۲^۳)^{۱۳}=۸۱^{۱۳}+۸^{۱۳}\xrightarrow{n=۱۳\ \text{فرد است}}$$ این عدد بر $۸+۸۱=۸۹$ بخش‌پذیر است.

۱۰.گزینه ۴

نکته:

$$a^x+b^x\,\Big|\,a^n-b^n\leftrightarrow\frac{n}{x}=\text{زوج}$$

$$a^x+b^x\,\Big|\,a^n+b^n\leftrightarrow\frac{n}{x}=\text{فرد}$$

اگر $۳^۳+۱\,|\,۳^n-۱$ ، آنگاه n مضرب زوج ۳ یا به عبارت دیگر مضرب ۶ است، یعنی:

$$\frac{n}{۳}=۲k\Rightarrow n=۶k\Rightarrow n\in\{۶,۱۲,۱۸,\cdots\}$$

اگر $۲^۴+۱\,|\,۲^n+۱$ آنگاه n مضرب فرد ۴ است یعنی :

$$\frac{n}{۴}=۲k+۱\Rightarrow n=۸k+۴\Rightarrow n\in\{۴,۱۲,۲۰,\cdots\}$$

بنابراین برای برقراری هر دو شرط، n باید به اشتراک این دو مجموعه تعلق داشته باشد. بنابراین مقادیر ممکن برای n عبارتند از:
۱۲,۳۶,۶۰,۸۴

۱۱.گزینه ۱

$$\begin{cases} x|a-۲ \Rightarrow a-۲=xk \\ x|b-۵ \Rightarrow b-۵=xk' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=xk+۲ \\ b=xk'+۵ \end{cases}$$

$$\overset{\times}{\Rightarrow} ab=x^۲kk'+۵xk+۲xk'+۱۰ \Rightarrow ab=xk''+۱۰ \Rightarrow ab-۹=xk''+۱$$

یعنی باقی مانده $ab-۹$ بر x برابر ۱ است.

راه حل دیگر: در حالت کلي داریم:

$$\left.\begin{matrix} x|a-b \Rightarrow x|ac-bc \\ x|c-d \Rightarrow x|bc-bd \end{matrix}\right\} \Rightarrow x|ac-bd$$

لذا:

$$\left.\begin{matrix} x|a-۲ \\ x|b-۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x|ab-۱۰ \Rightarrow ab-۱۰=xq \Rightarrow ab-۹=xq+۱$$

۱۲.گزینه ۱

$$\left.\begin{matrix} ۳a+۴b|۵a+۹b \xrightarrow{\times ۳} ۳a+۴b|۱۵a+۲۷b \\ ۳a+۴b|۳a+۴b \xrightarrow{\times ۵} ۳a+۴b|۱۵a+۲۰b \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۳a+۴v|۷b \qquad (*)$$

یعنی $۷b$ مضرب $۳a+۴b$ می‌باشد اما در هیچ یک از گزینه‌ها $۷b$ وجود ندارد. باید ببینیم از رابطه‌ی (*) کدام یک از گزینه‌ها را می توان نتیجه گرفت.

یعنی $۲۱b$ مضرب $۳a+۴b$ می‌باشد.

$$۳a+۴b|۷b \xrightarrow{\times ۳} ۳a+۴b|۲۱b$$

۱۳.گزینه ۴

اگر گزینه‌ی «۴» درست باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a^۳|۳b^۲+a^۴ \\ a^۳|a^۳ \to a^۳|a^۴ \end{cases} \Rightarrow a^۳|(۳b^۲+a^۴)-a^۴ \Rightarrow a^۳|۳b^۲$$

از $a|b$ نمی‌توان نتیجه گرفت که همواره $a^۳|۳b^۲$ درست است. درستی سایر گزینه‌ها را بررسی می کنیم:

$$۱)\ a|b \Rightarrow a^۲|b^۲ \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^۲|۳b^۲ \\ a^۲|a^۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^۲|۳b^۲+a^۳$$

$$۲)\ \left.\begin{matrix} a|b \\ a|a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a|a-b \Rightarrow a^۲|(a-b)^۲ \Rightarrow a^۲|(a-b)^۳$$

$$۳)\ \begin{matrix} a|b \\ a|a \end{matrix} \ \begin{matrix} \times ۷ \\ \Rightarrow \\ \times -۵ \end{matrix} \ a|۷b-۵a$$

۱۴.گزینه ۲ نکته: در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b اعداد منحصر بفرد r و q وجود دارد به شکلی که $a=bq+r$ که در آن $۰\leq r<b$ می‌باشد.

$$a=bq+r \quad , \quad ۰\leq r<b$$

حداکثر مقدار r برابر با $b-۱$ می‌باشد. پس:

$$\left.\begin{matrix} a=۸r \\ r\max=b-۱ \end{matrix}\right] \Rightarrow ۸(b-۱)=bq+b-۱ \Rightarrow ۸b-۸=bq+b-۱$$

$$\Rightarrow ۷b-bq=۷ \Rightarrow b(۷-q)=۷=۷\times ۱ \Rightarrow \begin{cases} b=۷ \Rightarrow r=۶ \\ ۷-q=۱ \Rightarrow q=۶ \end{cases} \Rightarrow \quad a=۸r=۸\times ۶=۴۸$$

۱۵.گزینه ۲ عضو ابتدای مجموعه‌ی S برابر ۳ است، یعنی کوچک ترین عضو این مجموعه عدد ۳ می‌باشد. از آنجایی که برای هر $k\in S$ عدد $k+۵$ هم عضو S است، پس:

$$۳\in S \xrightarrow{k+۵} ۳+۵\in S \Rightarrow ۸\in S$$

$$۸\in S \xrightarrow{k+۵} ۸+۵\in S \Rightarrow ۱۳\in S$$

یعنی اعضای S می‌توانند به صورت $۳,۸,۱۳,\cdots$ باشند، که تشکیل دنباله حسابی به قدر نسبت ۵ داده‌اند، جمله عمومی این تصاعد به صورت $an=۳+(n-۱)(۵)$ یعنی $an=۵n-۲$ است.

در بین گزینه‌ها تنها عدد ۱۵۸ می تواند به صورت $۵n-۲$ باشد، دقت کنید.

$$۵n-۲=۱۵۸ \Rightarrow n=۳۲$$

۱۶.گزینه ۴ برای هر دو عدد به شکل $۴q+۳$ داریم:

$$(۴q+۳)(۴q'+۳)=۱۶qq'+۱۲q+۱۲q'+۹=۴(۴qq'+۳q+۳q'+۲)+۱=۴q''+۱$$

یعنی باقی‌مانده‌ی تقسیم حاصل‌ضرب دو عدد بفرم $۴q+۳$ عددی است که باقی‌مانده‌اش بر ۴ برابر ۱ است.

برای هر دو عدد بفرم $۶k+۵$ داریم:

$$(۶k+۵)(۶k'+۵)=۳۶kk'+۳۰k+۳۰k'+۲۵=۶(۶kk'+۵k+۵k'+۴)+۱=۶k''+۱$$

یعنی باقی‌مانده‌ی تقسیم حاصل‌ضرب دو عدد به‌فرم $۶k+۵$ عددی است که باقی‌مانده‌ی آن بر ۶ برابر ۱ است.

پس گزینه‌ای درست است که باقی‌مانده‌ی آن بر ۴ برابر ۳ و دیگری بر ۶ برابر ۵ باشد. که اعداد ۱۲۹ و ۸۵ دارای این ویژگی است.

۱۷.گزینه ۴

نکته: اگر a عدد اول و $a|bc$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$

$$x^۳-۳x^۲-۴x=x(x^۲-۳x-۴)=x(x-۴)(x+۱)$$

$$۱۱\,|x\,(x-۴)(x+۱)\Rightarrow\begin{cases}۱۱\,|x\\ \text{یا}\\ ۱۱\,|(x-۴)\\ \text{یا}\\ ۱۱\,|(x+۱)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۱۱k\xrightarrow{k=۹}x_{\text{ماکسیمم مقدار دو رقمی}}=۹۹\\ \text{یا}\\ x=۱۱k+۴\xrightarrow{k=۸}x_{\text{ماکسیمم مقدار دو رقمی}}=۹۲\\ \text{یا}\\ x=۱۱k-۱\xrightarrow{k=۹}x_{\text{ماکسیمم مقدار دو رقمی}}=۹۸\end{cases}$$

بزرگترین عدد طبیعی دو رقمی که در یکی از روابط فوق صدق کند، عدد ۹۹ است که مجموع ارقام آن برابر ۱۸ می‌باشد.

۱۸.گزینه ۴ با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\left.\begin{aligned}&a=bq+r\\&a+۳۰=(b+۲)q+r+۴\end{aligned}\right\}\Rightarrow bq+r+۳۰=bq+۲q+r+۴\Rightarrow ۲q=۲۶\Rightarrow q=۱۳$$

۱۹.گزینه ۴ نکته:

$$۱)\ a\,|b\rightarrow\begin{cases}a|b^n & ,\quad n\in N\\ a\,|kb & ,\quad k\in Z\end{cases}$$

یعنی سمت راست رابطه بخش‌پذیری را می‌توان به هر توان دلخواه رساند یا در هر عدد صحیح دلخواه ضرب کرد.

$$۲)\ \left.\begin{aligned}a\,|b\\a\,|c\end{aligned}\right\}\xrightarrow{m,n\in Z}a\,|mb+nc$$

$$\left.\begin{aligned}&a\,|b+c\xrightarrow{\times c}a\,|bc+c^۲\\&\qquad\qquad\quad a\,|bc\end{aligned}\right\}\Rightarrow a\,|bc+c^۲-bc\Rightarrow a\,|c^۲$$

به‌همین ترتیب $a\,|b^۲$ چون n زوج است می‌توانیم آن‌را به شکل $n=۲k$ فرض می‌کنیم. پس:

$$\begin{aligned}&a|c^۲\xrightarrow{\text{توان}\,k}a|c^{۲k}\Rightarrow a\,|c^n\\&a|b^۲\xrightarrow{\text{توان}\,k}a|b^{۲k}\Rightarrow a|b^n\end{aligned}\Rightarrow\begin{cases}a|b^n+c^n\\ a|b^n-c^n\end{cases}$$

بنابراین هر ۳ گزاره‌ی $a|b^n$ و $a|b^n+c^n$ و $a|b^n-c^n$ صحیح است.

۲۰.گزینه ۱ ممکن است عبارت $p(n)$ برای یک عدد طبیعی کوچک‌تر از m نیز برقرار باشد ولی برای بعضی از اعداد بین n و m برقرار نگردد، مثلاً حکم $۲^n>n^۲$ برای $n=۱$ برقرار است ولی برای اعداد $n=۲,۳,۴$ برقرار نمی‌باشد پس $m=۵$ است دقت نمائید که گزینه‌ی ۴ همواره صحیح است زیرا از درستی $p(k)$ می‌توان درستی $p(k+۱)$ و سپس درستی $p(k+۲)$ و به همین ترتیب ادامه داد تا درستی $p(۲k)$ را نتیجه گرفت.

۲۱.گزینه ۲ تذکر: در تقسیم عدد a بر b خارج قسمت از دستور $q=\left[\dfrac{a}{b}\right]$ بدست می‌آید.

$$-۴۴\div ۱۷\rightarrow\begin{cases}q=\left[\dfrac{-۴۴}{۱۷}\right]=-۳\\ -۴۴=۱۷\times(-۳)+r\rightarrow r=۷\end{cases}\Rightarrow q+r=۴$$

۲۲.گزینه ۴

تذکر:اگر $a^n|b$ آنگاه $a|b$

تذکر:اگر $a|b$ و $c|d$ آنگاه $ac|bd$

تذکر:اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $\begin{array}{l} a|mb+nc \\ m,n\in Z \end{array}$

$$a^۳|a+b\Rightarrow a|a+b \xrightarrow{a|a} \left.\begin{array}{l} a|b \\ a|a \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a|b-a \\ \text{طبق فرض}: a^۳|a+b \end{array}\right\}\xrightarrow{\times} a^۴|b^۲-a^۲$$

$$a|b\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^۳|b^۳ \\ a^۳|a^۳ \end{array}\right\}\Rightarrow a^۳|b^۳\mp a^۳$$

اگر $a=۲, b=۶$ را در نظر بگیریم مثال نقضی برای گزینه ۴ می باشد. زیرا $۲^۳|۲+۶$ ولی $۲^۴\nmid ۲^۲+۲^۶$

۲۳.گزینه ۲ نکته: کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی $\{x\,|x=a-bq\,,\ \ q\in\mathbb{Z}\}$ برابر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b است. بنابراین کوچک‌ترین عضو مثبت این مجموعه به‌ازای $q=\left[\dfrac{a}{b}\right]$ به‌دست می‌آید.

با توجه به نکته‌ی فوق، کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی $S=\{x\,|x=-۴۳۵-۷q\,|q\in\mathbb{Z}\}$ به‌ازای $q=\left[\dfrac{-۴۳۵}{۷}\right]$ به‌دست می آید.

$$q=\left[\frac{-۴۳۵}{۷}\right]=[-۶۲/۰۰۰]=-۶۳$$

۲۴.گزینه ۳ راه‌حل اول: نکته: اگر $a\,|b$ و $b\,|c$، آن گاه $a\,|c$.

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $a^۵|b^۳ \xrightarrow{a|a^۵} a|b^۳$

گزینه ۲ : $a^۵|b^۳ \xrightarrow{\text{توان ۸}} a^{۴۰}|b^{۲۴} \xrightarrow{b^{۲۴}|b^{۲۵}} a^{۴۰}|b^{۲۵}\Rightarrow a^۸|b^۵$

گزینه ۴ : $a|b^۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^۲|b^۶ \xrightarrow{b^۶|b^۷} a^۲|b^۷$

راه‌حل دوم: نکته: اگر $a^n|b^m$، آن گاه در صورتی که $\begin{vmatrix} n & m \\ p & q \end{vmatrix}\geq ۰$، می‌توان نتیجه گرفت: $a^p|b^q$

گزینه ۱ : $a^۵|b^۳ \xrightarrow{\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=۱۲>۰} a|b^۳$

گزینه ۲ : $a^۵|b^۳ \xrightarrow{\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۸ & ۵ \end{vmatrix}=۱>۰} a^۸|b^۵$

گزینه ۴ : $a^۵|b^۳ \xrightarrow{\begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۷ \end{vmatrix}=۲۹>۰} a^۲|b^۷$

دقت کنید در گزینه ۳ داریم: $۰ > -۱ = \begin{vmatrix} ۵ & ۳ \\ ۷ & ۴ \end{vmatrix}$، پس نمی‌توان رابطه گزینه ۳ را نتیجه گرفت.

۲۵.گزینه ۲ نکته: (الگوریتم تقسیم): اگر a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی باشد، آنگاه اعداد صحیح یکتای q و r وجود دارند که:

$$\text{مقسوم}\leftarrow a=\overset{\text{مقسوم‌علیه}}{b}\ \ \underset{\text{خارج‌قسمت}}{q}+\overset{\text{باقی‌مانده}}{r}\ \ ;\ ۰\leq r<b$$

با استفاده از الگوریتم تقسیم داریم:

$$a=۲۵\times q+q^۳\ \ ;\ \ ۰\leq q^۳<۲۵$$

چون a عددی طبیعی است، پس q هم عددی طبیعی است.

$$۰ \le q^{۳} < ۲۵ \Rightarrow ۰ \le q \le ۲ \xrightarrow{q\in\mathbb{N}} q = ۱ \text{ یا } ۲$$

۲۶.گزینه ۲ نکته: اگر a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه اعداد یکتای $r, q \in \mathbb{Z}$ وجود دارند که:

$$\begin{cases} a = bq + r \\ ۰ \le r < b \end{cases}$$

عدد مورد نظر را با a و خارج قسمت را با q نمایش می‌دهیم. در این صورت طبق فرض داریم:

$$a = ۱۲ \times q + (\frac{۳}{۵}q + ۲)$$

چون $\frac{۳}{۵}q + ۲$ باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۱۲ است. داریم:

$$۰ \le \frac{۳}{۵}q + ۲ < ۱۲ \Rightarrow \frac{۳}{۵}q < ۱۰ \Rightarrow q < \frac{۵۰}{۳} \xrightarrow{q\in\mathbb{Z}} q \le ۱۶ \quad (*)$$

چون $a \in \mathbb{N}$ پس باید $\frac{۳}{۵}q + ۲ \in \mathbb{N}$ ، بنابراین باید q مضرب ۵ باشد. از $(*)$ نتیجه می گیریم:

$$\max(q) = ۱۵$$

در نتیجه:

$$\max(a) = ۱۲ \times ۱۵ + (\frac{۳}{۵} \times ۱۵ + ۲) = ۱۸۰ + ۱۱ = ۱۹۱$$

مجموع ارقام این عدد برابر است با: $۱ + ۹ + ۱ = ۱۱$

۲۷.گزینه ۴ می‌دانیم $b|bc$ و $c|bc$ ، بنابراین اگر $bc|a$ ، آن‌گاه $b|a$ و $c|a$ ، مثال نقض برای سایر گزینه‌ها عبارت است از:

۱) $a = ۲$ ، $b = ۳$ و $c = ۵$

۲) $a = ۸$ ، $b = ۳$ و $c = ۵$

۳) $a = ۴$ ، $b = ۲$ و $c = ۲$

۲۸.گزینه ۲ می‌دانیم هر عدد صحیح را می‌توان تنها به یکی از صورت‌های $۵k - ۱$ ،$۵k - ۲$ ،$۵k + ۳$ ،$۵k + ۲$ ،$۵k + ۱$ ،$۵k$ نمایش داد.

طبق فرض $a \neq ۵k$، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a = ۵k \pm ۱ \Rightarrow a^{۲} = ۲۵k^{۲} \pm ۱۰k + ۱ \Rightarrow a^{۲} = ۵k' + ۱ \\ a = ۵k \pm ۲ \Rightarrow a^{۲} = ۲۵k^{۲} \pm ۲۰k + ۴ \Rightarrow a^{۲} = ۵k' + ۴ \end{cases}$$

بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^{۲}$ بر ۵، دو مقدار مختلف ۱ و ۴ می‌تواند داشته باشد.

۲۹.گزینه ۲ با توجه به صورت سوال:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۳۴q + r \\ r = ۷q \end{array}\right\} \Rightarrow a = ۳۴q + ۷q \qquad (۱)$$

می‌دانیم در قضیه تقسیم $۰ \le r < b$ بنابراین:

$$- \le r < b \Rightarrow ۰ \le ۷q < ۳۴ \Rightarrow q_{\max} = ۴$$

$$\xrightarrow{(۱)} a = ۴۱q = ۴۱ \times ۴ = ۱۶۴$$

۳۰.گزینه ۳ مطابق الگوریتم تقسیم داریم $\underset{k\in Z}{a = ۲۳k + ۹}$ چون a زوج است و ۹ فرد است پس $۲۳k$ عددی فرد است و در نتیجه k فرد است پس می‌توان k را به صورت $۲q + ۱$ نشان داد. داریم:

$$a = ۲۳(۲q + ۱) + ۹ = ۴۶q \div ۳۲ \Rightarrow \frac{a}{۲} = ۲۳q + ۱۶$$

۳۱.گزینه ۳

الف) $S=\{x\,|5x-6\geq 0\ ,\ x\in\mathbb{Z}\}=\left\{x\in\mathbb{Z}\,|x\geq\frac{6}{5}\right\}=\{2,3,4,\cdots\}\Rightarrow \min S=2$

ب) $S=\{-5x+6|x\in\mathbb{Z}\ ,\ x>0\}=\{\underset{(-5\times1+6)}{\overset{1}{\downarrow}}\ ,\ \underset{(-5\times2+6)}{\overset{-4}{\downarrow}}\ ,\ \underset{(-5\times3+6)}{\overset{-9}{\downarrow}}\ ,\cdots\}\Rightarrow$ S دارای عضو min نیست.

ج) $S=\left\{x\,|x\in\mathbb{Z}\ ,\ 3^x\leq x^3\right\}=\{3\}\Rightarrow \min S=3$

بنابراین فقط موارد «الف» و «ج» دارای کوچک‌ترین عضو هستند.

۳۲.گزینه ۳

نکته: اگر a، $b\in N$ و $a\in Z$ اعداد منحصربفرد r و q وجود دارند به قسمی که $a=bq+r$ در این رابطه $0\leq r<b$ می‌باشد

$a=23q+2q^3\ \ ,\ \ 2q^3<23$

$$2q^3<23\Rightarrow q^3\leq 11\Rightarrow q=1,2\Rightarrow\begin{cases}q=1\Rightarrow a=23+2=25\\ q=2\Rightarrow b=46+16=62\end{cases}\ \text{یا}\ \begin{cases}a=62\\ b=25\end{cases}$$

$$2a+b=\begin{cases}50+62=112\\ 124+25=149\end{cases}$$

۳۳.گزینه ۱ اگر $a=2$ ، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی زوج k، رابطه‌ی $a|k^2+2$ برقرار است. اما به ازای $a=4$ ، رابطه هیچ گاه برقرار نیست، زیرا اگر k زوج باشد، k^2 مضرب ۴ بوده و باقی‌مانده تقسیم k^2+2 بر ۴، برابر ۲ است و در صورتی که k فرد باشد، k^2 در تقسیم بر ۴، دارای باقیمانده یک است و در نتیجه k^2+2 بر ۴، بخش‌پذیر نیست. سایر اعضای مجموعه A، قطعاً مضرب ۴ هستند و رابطه برای آنان نیز برقرار نیست.

۳۴.گزینه ۳

نکته: اگر $a|b$ آنگاه $a|kb$ $(k\in Z)$

نکته: اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $\begin{matrix}a\,|mb+nc\\ m,n\in Z\end{matrix}$

$$\left.\begin{matrix}3a+4b\,|5a+9b\xrightarrow{\text{سمت راست}\times 3}3a+4b\,|15a+27b\\ 3a+4b\,|3a+4b\xrightarrow{\text{سمت راست}\times 5}3a+4b\,|15a+20b\end{matrix}\right\}\xrightarrow{-}3a+4b\,|7b\xrightarrow{\text{سمت راست}\times 3}3a+4b\,|21b$$

۳۵.گزینه ۱ نکته:

$1)ka|kb\xrightarrow{\div k}a\,|b$

$$2)abc|x\Rightarrow\begin{cases}a\,|x\\ b\,|x\\ c\,|x\end{cases}$$

$$xyz\,\big|\,xy+yz\xrightarrow{\div y}xz|x+z\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x|x+z\xrightarrow{x|x}x|z\Rightarrow|x|\leq|z|\\ z|x+z\xrightarrow{z|z}z|x\Rightarrow|z|\leq|x|\end{matrix}\right\}\Rightarrow|x|=|z|\xrightarrow{x,z\in N}x=z$$

$$2x^2+2z^2-12y^3\overset{x=z}{=\!=\!=}\ 4x^3-12y^3=4\underbrace{(x^3-2y^3)}_{k}=4k$$

یعنی باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۴ برابر صفر است.

۳۶.گزینه ۴ هر یک از اعداد a، b و c، عددی فرد هستند. همچنین می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ ، $(k\in Z)$ است. پس مربع هر سه عدد a، b و c را می‌توان به فرم خواسته شده نوشت.

۳۷.گزینه ۲ اگر نامعادله‌ی $3q-17\geq 0$ با شرط $q\in Z$ را حل کنیم، داریم $q\geq 6$ یعنی عضو ابتدای A برابر است با: $a=6$

از طرفی در اثبات قضیه‌ی الگوریتم تقسیم در صفحه‌ی ۳۱ کتاب درسی، استنتاج شده که عضو ابتدای مجموعه‌ی $S=\{a-bq\geq ۰ : q\in Z\}$ همان باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b است که در مورد مجموعه‌ی B باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۷− بر ۳− برابر $b=۱$ است.

$$a=۶, b=۱ \Rightarrow a\not| b, b|a$$

توجه کنید که اگر A و B را با اعضای آن‌ها مشخص کنیم داریم:

$$A=\{۶,۷,۸,۹,\cdots\}$$
$$B=\{۱,۴,۷,۱۰,\cdots\}$$

۳۸.گزینه ۴ گزینه‌ی ۱ و ۲: طبق تمرین ۳ صفحه‌ی ۳۵ کتاب درسی. می‌دانیم که هر زیر مجموعه‌ی اعداد صحیح که کران بالا داشته باشد، دارای عضو ماکزیمم و هر زیر محموعه‌ی اعداد صحیح که کران پایین داشته باشد، دارای عضو مینیمم است.

گزینه‌ی ۳: اگر A کران بالا برای یک مجموعه باشد، $A+۱$ ، $A+۲$ و ... هم کران بالای آن است.

گزینه‌ی ۴: نادرست است. به عنوان مثال نقض $\{۰ , -۱ , -۲ , \cdots\}$ دارای عضو ابتدا نیست.

۳۹.گزینه ۳

$$P_k : ۲^k > k^۲ \qquad ; \qquad P_{k+۱} : ۲^{k+۱} > (k+۱)^۲$$

طرفین فرض را در ۲ ضرب می کنیم: $۲^{k+۱} > ۲k^۲$. بنابراین اگر ثابت کنیم $۲k^۲ > (k+۱)^۲$. آن گاه حکم $P_{k+۱}$ نیز ثابت می شود:

$$۲k^۲ > (k+۱)^۲ \Rightarrow ۲k^۲ > k^۲+۲k+۱ \Rightarrow k^۲ > ۲k+۱$$
$$\Rightarrow k^۲-۲k-۱ > ۰ \overset{+۲}{\Rightarrow} k^۲-۲k+۱ > ۲ \Rightarrow (k-۱)^۲ > ۲$$

۴۰.گزینه ۴

الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم:

$$a=۱۵\times q+۶$$

حال k واحد به مقسوم اضافه می‌کنیم. با توجه به این‌که مقسوم‌علیه و خارج قسمت تغییر نمی‌کند، داریم:

$$a+k=۱۵\times q+\overbrace{(۶+k)}^{\text{باقی مانده}}$$

باقی‌مانده باید از مقسوم‌علیه کوچک‌تر باشد، بنابراین:

$$۶+k<۱۵ \Rightarrow k<۹ \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} \max(k)=۸$$