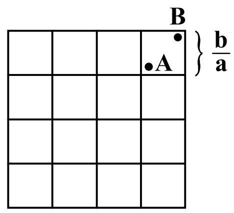
پاسخ تشریحی:

۱- گزینه ۴ پاسخ است.



مربع را به‌صورت یک شبکه‌ی $a\times a$ درمی‌آوریم. یعنی هر ضلع را به a قسمت تقسیم می‌کنیم. بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط هنگامی است که دو سر قطر مربع قرار گیرند.

$$d = |AB| \leq \frac{b}{a}\sqrt{۲}$$

۲- گزینه ۲ پاسخ است.

از گزینه‌ی (۲) امتحان را آغاز می‌کنیم:

$$\checkmark\ m = ۶ \xrightarrow{?} ۶! \leq (\frac{۶}{۲})^{۶} \Rightarrow ۷۲۰ \leq ۷۲۹$$

البته در این حالت لازم است یک عدد کم‌تر را هم کنترل کنیم، اما با توجه به نزدیکی ۷۲۰ به ۷۲۹، احتمالاً جمله‌ی قبلی درست نخواهد بود:

$$۵! \leq (\frac{۵}{۲})^{۵} \Rightarrow ۱۲۰ \nleq \frac{۳۱۲۵}{۳۲} = ۹۷/...$$

۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\text{تعداد لانه‌ها} = \underset{\text{ماه}}{۱۲} \times \underset{\text{روز}}{۷} = ۸۴$$

برای آن‌که حداقل ۳ نفر در یک روز از هفته و یک ماه از سال متولد شده باشند، باید اقلاً $۲\times ۸۴ + ۱ = ۱۶۹$ نفر موجود باشند.

۴- گزینه ۳ پاسخ است.

روزی وجود دارد که در آن اقلاً $\left[\frac{۱۰۰-۱}{۷}\right] + ۱ = ۱۵$ نفر به دنیا آمده باشند.

۵- گزینه ۴ پاسخ است.

بدترین انتخاب هنگامی است که ابتدا ۶ توپ سفید و سپس ۵ توپ قرمز برداریم. در این انتخاب هنوز از هر رنگ حداقل ۲ توپ نداریم. با خروج توپ ۱۲ و ۱۳ با هر نوع انتخابی از هر رنگ ۲ توپ خواهیم داشت.

$$۴^{۳} \ngeq ۳^{۴}$$

$$۴^{۴} \geq ۴^{۴}$$

۶- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\sum_{i=۱}^{n} i(i+۱) = \sum_{i=۱}^{n} i^{۲} + i = \sum_{i=۱}^{n} i^{۲} + \sum_{i=۱}^{n} i = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} + \frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{n(n+۱)}{۲}(\frac{۲n+۱}{۳}+۱) = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۳}$$

۷- گزینه ۴ پاسخ است.

در بدترین انتخاب، ۸ مهره‌ی قرمز و ۱۰ مهره‌ی سبز انتخاب می‌کنیم. با انتخاب مهره‌ی ۱۹ اُم، حتماً از هر دو رنگ سبز و آبی خواهیم داشت.

۸- گزینه ۴ پاسخ است.

گزینه‌ی ۱: $n^{۲} = ۲^{۲}\times ۳^{۲} \Rightarrow n = ۲\times ۳$

گزینه‌ی ۲: $n = ۱۹ \Rightarrow ۱۹^{۲} + ۳۷\times ۱۹ + ۱۹ = ۱۹q$

گزینه‌ی ۳: $۱,۲,۳ \Rightarrow ۱+۲ \not> ۳$

گزینه‌ی (۴) قضیه‌ی کلی است:

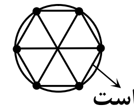
$$(۲k+۱)^{۲} = ۴k^{۲} + ۴k + ۱ = \underbrace{۴k(k+۱)}_{۲q} + ۱ = ۸q + ۱$$

۹- گزینه ۲ پاسخ است.

مثال نقض گزینه‌ی ۱: ۲^n **را نمی‌توان به‌صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.**

گزینه‌ی ۲: $۱^۳ + ۲^۳ + \cdots + n^۳ = (\frac{n(n+۱)}{۲})^۲$

مثال نقض گزینه‌ی ۳: $۳۲ = ۲^۵ = ۲^{۶-۱}$



۱۲ ناحیه است

مثال نقض گزینه‌ی ۴: $۲ = e^{Ln ۲}$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$۸۹ = ۸۱ + ۴ + ۴$

$۵۹ = ۴۹ + ۹ + ۱$

$۲۴ = ۱۶ + ۴ + ۴$

۱۱- گزینه ۳ پاسخ است.

۱۲- گزینه ۴ پاسخ است.

$\forall x \in A \;;\; x \le a \;\Rightarrow\; -x \ge -a \;\Rightarrow\; ۲a - x + ۱ \ge a + ۱$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است.

گزینه‌های (۱) و (۲) چون زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی‌اند، طبق اصل خوش‌ترتیبی دارای عضو ابتداست.

گزینه‌ی (۴) هم مسلماً از جایی به بعد برقرار است. اما چون: $۳^n \ge n^۳$ **است، گزینه‌ی (۳) تهی است.**

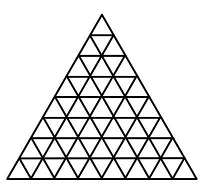
۱۴- گزینه ۴ پاسخ است.

چون می‌توانیم ثابت کنیم $a^۲ \ge ۰$ **است، پس:**

$a^۲ \ge ۰ \;\Rightarrow\; a^۴ \ge ۰$

اما دقت کنید در سؤال از مثبت بودن توان چهارم سخن به میان آمده که با $a = ۰$ **قابل رد است.**

۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.



باید هر ضلع را به هشت قسمت تقسیم کنیم که: $۸^۲ = ۶۴$ **لانه است.**

پس به ۶۵ نقطه نیاز است.

۱۶- گزینه ۳ پاسخ است.

اعداد $۲۵ + ۳k$ **عضو Sاند** $(k \ge ۰)$ **پس:**

$۴۶ = ۲۵ + ۳ \times ۷$

گزینه‌ی (۱) نیاز به $k < ۰$ **دارد، که طبق سؤال تعریف نشده است.**

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$P(۱) : ۱^۳ + ۱۱(۱) = ۱۲ = ۲ \times ۶$

فرض استقرا $P(k) : k^۳ + ۱۱k = ۶q \;\; (q \in \mathbb{N})$

حکم استقرا $P(k+۱) : (k+۱)^۳ + ۱۱(k+۱) = ۶q' \quad (q' \in \mathbb{N})$

با ساده کردن عبارت حکم استقرا داریم:

$k^۳ + ۳k^۲ + ۳k + ۱ + ۱۱k + ۱۱ = (k^۳ + ۱۱k) + ۱۲ + ۳k(k+۱)$

با توجه به فرض $k^۳ + ۱۱k = ۶q$ **و همین‌طور ۱۲ نیز مضرب ۶ است، پس کافی است داشته باشیم:**

$۳k(k+۱) = ۶t \;\Rightarrow\; k(k+۱) = ۲t$

یعنی حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی، بر ۲ بخش‌پذیر است.

۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\ge\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\ge\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \xleftrightarrow{\times(\sqrt{xy})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\ge 4\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}\ \ge\ 4\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}\ \ge\ 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\ge 0$$

با توجه به آن‌که تمامی روابط بازگشت‌پذیر هستند، پس حکم ثابت می‌شود.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.

به روش برهان خلف، فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد؛ یعنی $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}>2\sqrt{x+1}$ در این صورت داریم:

$$(\sqrt{x}\ +\sqrt{x+2})^2>(2\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow x+x+2+2\sqrt{x(x+2)}>4(x+1) \Rightarrow 2\sqrt{x(x+2)}>2(x+1) \Rightarrow \sqrt{x(x+2)}>x+1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2+2x>x^2+2x+1 \Rightarrow 0>1$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ است.

برای هر عدد حقیقی مانند a که $0<a<4$ طبق تعریف جزء صحیح داریم:

$$[a]\in\{0,1,2,3\}$$

پس اگر هریک از اعداد صحیح $\{0,1,2,3\}$ را لانه و ۳۷ عدد را کبوتر در نظر بگیریم. چون $9\times4<37$ پس حداقل در یک لانه $9+1=10$ کبوتر جای می‌گیرند.

۲۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{matrix}11\mid a+b \to 11\mid 6a+6b\\ 11\mid -11b\end{matrix}\right\} \Rightarrow 11\mid 6a-5b$$

راه‌حل دوم: نکته: اگر $d\mid xa+yb$ و بخواهد $d\mid zu+tb$ باشد، باید: $d\left|\begin{vmatrix}x & y\\ z & t\end{vmatrix}\right.$

$$\begin{matrix}11\mid a+b\\ 11\mid 6a-5b\end{matrix}\quad 11\left|\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & -5\end{vmatrix}\right.=-11$$

راه‌حل سوم:

$$a+b=11q \Rightarrow b=11q-a$$

در گزینه‌ی (۴) به‌جای b قرار می‌دهیم:

$$6a-5b=6a-5(11q-a)=11a-55q=11q'$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$2n+1\mid 2n^2-3n+5 \Rightarrow 2n+1\mid\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+5=7 \Rightarrow 2n+1=\pm1,\pm7 \Rightarrow n=0,-1,3,-4$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$a^5\mid b+c \longrightarrow \left.\begin{matrix}a\mid b+c\\ b+c\mid b^3+c^3\end{matrix}\right\}\Rightarrow a\mid b^3+c^3$$

$$a\mid b+c \Rightarrow a\mid(b+c)(b-c)=b^2-c^2$$

$$a^3\mid b+c \Rightarrow a^3\mid b^2-c^2$$

اما $a^{10}\mid(b+c)^2$ نه: $a^{10}\mid b^2+c^2$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ است.

گزینه‌ی ۱: حاصل $\binom{2n}{n}\in\mathbb{N}$ می‌باشد.

گزینه‌ی ۲: 5^n-9^n ← $9-5\mid 9^n-5^n$ ← $4\mid 9^n-5^n$

گزینه‌ی ۴: 9^n-25^n ← $25-9\mid 25^n-9^n$ ← $16\mid 25^n-9^n$

اما گزینه‌ی (۳) فقط برای nهای فرد عدد صحیح است.

۲۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} x=12k \Rightarrow x^3=2^6\times 3^3 q \\ y=12k' \Rightarrow y^3=2^6\times 3^3 q' \\ z=12k'' \Rightarrow z^3=2^6\times 3^3 q'' \end{array}\right\} \Rightarrow x^3+y^3+z^3=2^6\times 3^3 q^*=2^5\times 3^2\times \boxed{2\times 3q^*}=288q'''q''$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$a^3 \mid b^5 \xrightarrow{\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 7\end{vmatrix}\geq 0} a^4 \mid b^7$$

گزینه‌های دیگر:

$$\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}<0 \qquad \begin{vmatrix}3 & 5\\ 5 & 7\end{vmatrix}<0 \qquad \begin{vmatrix}3 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}<0$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$y(x+1)=20-x \Rightarrow y=\frac{20-x}{x+1} \Rightarrow x+1 \mid 20-x \Rightarrow x+1 \mid 20-(-1)=21 \Rightarrow x+1=\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$$

$$\xrightarrow{x\in\mathbb{N}} \begin{cases} x=2,6,20 \\ y=6,2,0 \end{cases}$$

فقط $x=2,6$ منجر به تولید y طبیعی می‌شوند.

۲۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} m \mid n^2+n-1 \\ m \mid n-1 \to m \mid n^2-n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m \mid 2n-1 \\ m \mid n-1 \to m \mid 2n-2 \end{array}\right\} \Rightarrow m \mid 1 \xrightarrow{m\in\mathbb{N}} m=1$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} n+1 \mid 2n+5n+18 \\ n+1 \mid n+1 \to n+1 \mid 2n^2+2n \end{array}\right\} \Rightarrow n+1 \mid 3n+18$$

$$\left.\begin{array}{l} n+1 \mid 3n+18 \\ n+1 \mid n+1 \to n+1 \mid 3n+3 \end{array}\right\} \Rightarrow n+1 \mid 15$$

$$\Rightarrow n+1=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15 \Rightarrow n=2,4,14$$

۳۰- گزینه ۳ پاسخ است.

اثبات گزینه‌ی ۱:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow a^2 \mid b^2 \\ a \mid c \Rightarrow a^2 \mid c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 \mid b^2+c^2$$

اثبات گزینه‌ی ۲: بنابر قاعده‌ی روبه‌رو واضح است:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ c \mid d \end{array}\right\} \Rightarrow ac \mid bd \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 \mid bc$$

اثبات گزینه‌ی ۴:

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid b-c \overset{\times b}{\Rightarrow} ab \mid b^2-bc$$

و البته گزینه‌ی ۳ را با فرضیات داده شده نمی‌توان اثبات کرد.

۳۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a=bq+r \qquad b+q=10$$

$$a=(b+1)(q-1)+(r+1)=bq+q-b-1+r+1=bq+q-b+r$$

از هم کم می‌کنیم: $q-b=0 \Rightarrow q=b \Rightarrow q=b=5$

$$a_{max}=bq+\underset{\substack{\downarrow \\ b-1}}{r_{max}}=5\times 5+4=29$$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ است.

$۶۰۰ = b(۶) + r \qquad ۰ \le r < b$

$r = ۶۰۰ - ۶b \Rightarrow ۰ \le ۶۰۰ - ۶b < b \Rightarrow \frac{۶۰۰}{۷} < b \le ۱۰۰ \Rightarrow ۸۶ \le b \le ۱۰۰ \Rightarrow ۱۰۰ - ۸۶ + ۱ = ۱۵$ مقدار

۳۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$a = ۳۰q + r$

$a + ۱۲۵ = ۳۰q + r + ۱۲۵ = ۳۰(q + ۴) + r + ۵$

۳۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$A = ۲۳q + ۷ \Rightarrow ۵A - ۲ = ۲۳(۵q) + ۳۵ - ۲ = ۲۳q' + ۳۳ = ۲۳q'' + ۱۰$

۳۵-گزینه ۳ پاسخ است.

$a = ۳۷q + q^۲ \qquad ۰ \le q^۲ < ۳۷ \rightarrow ۰ \le q \le ۶$

$a_{max} = ۳۷ \times ۶ + ۳۶ = ۲۵۸$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} a = ۹q + ۴ \Rightarrow a = ۹(q+۲) - ۱۴ \Rightarrow ۹ \mid a + ۱۴ \\ a = ۵q' + ۱ \Rightarrow a = ۵(q'+۳) - ۱۴ \Rightarrow ۵ \mid a + ۱۴ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴۵ \mid a + ۱۴ \Rightarrow a + ۱۴ = ۴۵q''$$

$$\Rightarrow a = ۴۵q'' - ۱۴ \Rightarrow a = ۴۵q''' + ۳۱$$

راه‌حل دوم:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۹q + ۴ \Rightarrow ۵a = ۴۵q + ۲۰ \\ a = ۵q' + ۱ \Rightarrow ۹a = ۴۵q' + ۹ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴a = ۴۵q'' - ۱۱$$

چون سمت راست بر ۴ بخش‌پذیر است، باید سمت راست هم بر ۴ بخش‌پذیر باشد لذا حالات مختلف q'' را در تقسیم بر ۴ بررسی می‌کنیم:

$۴a = ۴۵(۴t) - ۱۱$

$۴a = ۴۵(۴t + ۱) - ۱۱ = ۴۵(۴t) + ۳۴$

$۴a = ۴۵(۴t + ۲) - ۱۱ = ۴۵(۴t) + ۷۹$

$۴a = ۴۵(۴t + ۳) - ۱۱ = ۴۵(۴t) + ۱۲۴ = ۴۵t + ۳۱$: تنها این حالت مضرب ۴ است

۳۷- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۶۷ و ۶۸ کتاب

وقتی اعداد طبیعی بر سه مجموعه‌ی A و B و C افراز شده اند یعنی $N = A \cup B \cup C$ و C, B, A از هم جدا هستند. پس از اعداد داده شده عددی متعلق به C است که اولاً متعلق به N باشد و در مرحله‌ی دوم متعلق به B, A نباشد. چنین شرایطی فقط در گزینه (۴) یعنی ۳۴مهیا است. زیرا عدد ۳۴ و باقیمانده عدد ۳۴ بر ۶ برابر یک نیست پس $۳۴ \notin A$ و باقیمانده‌ی ۳۴ بر ۳ برابر ۲ نیست پس $۳۴ \notin B$.

۳۸- گزینه ۳ پاسخ است.

هر عدد صحیح به یکی از سه صوت $۳k$، $۳k + ۱$ و $۳k + ۲$ قابل نوشتن است، پس مکعب هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های زیر است:

$n = ۳k \Rightarrow n^۳ = ۲۷k^۳ = ۹q$

$n = ۳k + ۱ \Rightarrow n^۳ = (۳k + ۱)^۳ = ۲۷k^۳ + ۲۷k^۲ + ۹k + ۱ = ۹q' + ۱$

$n = ۳k + ۲ \Rightarrow n^۳ = (۳k + ۲)^۳ = ۲۷k^۳ + ۵۴k^۲ + ۳۶k + ۸ = ۹q'' + ۸$

بنابراین هیچ مکعب کاملی به فرم $۹k + ۵$ نیست. البته با در نظر گرفتن اعداد به‌صورت $۹k$، $۹k \pm ۱$ و $۹k \pm ۲$ و $۹k \pm ۳$ و $۹k \pm ۴$ نیز می‌توان به این نتیجه رسید که عملیاتی اضافه است.

۳۹- گزینه ۴ پاسخ است.

برای دو عدد به شکل $۴q+۳$ داریم:

$$(۴q+۳)(۴q'+۳)=۱۶qq'+۱۲q+۱۲q'+۹$$
$$۴(۴qq'+۳q+۳q'+۲)+۱=۴m+۱$$

و برای دو عدد به شکل $۶k+۵$ داریم:

$$(۶k+۵)(۶k'+۵)=۳۶kk'+۳۰k+۳۰k'+۲۵=۶(۶kk'+۵k+۵k'+۴)+۱=۶n+۱$$

پس گزینه‌ای درست است که بتوان آن‌ها را به‌ترتیب به صورت $۴m+۱$ و $۶n+۱$ $(m,n\in\mathbb{Z})$ نوشت که اعداد ۱۲۹ و ۸۵ دارای این ویژگی هستند.

۴۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l}a=bq+۱\\ a+۹۹=bq'+۱۰\end{array}\right\}\xrightarrow{-}۹۹=b(q'-q)+۹\Rightarrow ۹۰=b(q'-q)\Rightarrow b\mid ۹۰$$

بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای b، برابر ۹۰ است و با توجه به این‌که باقیمانده‌ی ۱۰ داریم، پس $b>۱۰$ و در نتیجه کوچک‌ترین مقدار b، ۱۵ است که اختلاف این دو مقدار برابر ۷۵ است