پاسخ تشریحی:

۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l}11\mid a+b \to 11\mid 6a+6b\\ 11\mid -11b\end{array}\right\} \Rightarrow 11\mid 6a-5b$$

راه‌حل دوم: نکته: اگر $d\mid xa+yb$ و بخواهد $d\mid zu+tb$ باشد، باید: $d\left|\begin{vmatrix}x & y\\ z & t\end{vmatrix}\right.$

$$\begin{array}{l}11\mid a+b\\ 11\mid 6a-5b\end{array}\quad 11\left|\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & -5\end{vmatrix}\right.=-11$$

راه‌حل سوم:

$$a+b=11q \Rightarrow b=11q-a$$

در گزینه‌ی (۴) به‌جای b قرار می‌دهیم:

$$6a-5b=6a-5(11q-a)=11a-55q=11q'$$

۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$2n+1\mid 2n^2-3n+5 \Rightarrow 2n+1\mid \frac{1}{2}+\frac{3}{2}+5=7 \Rightarrow 2n+1=\pm 1, \pm 7 \Rightarrow n=0, -1, 3, -4$$

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$a^5\mid b+c \longrightarrow \left.\begin{array}{l}a\mid b+c\\ b+c\mid b^3+c^3\end{array}\right\}\Rightarrow a\mid b^3+c^3$$

$$a^5\mid b+c \longrightarrow a\mid b+c \Rightarrow a\mid (b+c)(b-c)=b^2-c^2$$

$$a^5\mid b+c \longrightarrow a^3\mid b+c \Rightarrow a^3\mid b^2-c^2$$

اما $a^{10}\mid (b+c)^2$ نه: $a^{10}\mid b^2+c^2$

۴- گزینه ۳ پاسخ است.

گزینه‌ی ۱: حاصل $\binom{2n}{n}\in\mathbb{N}$ می‌باشد.

گزینه‌ی ۲: $9^n-5^n \mid 9-5 \leftarrow 4\mid 9^n-5^n$

گزینه‌ی ۴: $25^n-9^n \mid 25-9 \leftarrow 16\mid 25^n-9^n$

اما گزینه‌ی (۳) فقط برای nهای فرد عدد صحیح است.

۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{lll}x=12k & \Rightarrow & x^3=2^6\times 3^3 q\\ y=12k' & \Rightarrow & y^3=2^6\times 3^3 q'\\ z=12k'' & \Rightarrow & z^3=2^6\times 3^3 q''\end{array}\right\} \Rightarrow x^3+y^3+z^3=2^6\times 3^3 q^*=2^5\times 3^2\times \boxed{2\times 3q^*}=288q'''q''$$

۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$a^3\mid b^5 \xrightarrow{\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 7\end{vmatrix}\geq 0} a^4\mid b^7$$

گزینه‌های دیگر:

$$\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}<0 \qquad \begin{vmatrix}3 & 5\\ 5 & 7\end{vmatrix}<0 \qquad \begin{vmatrix}3 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}<0$$

۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$y(x+1)=20-x \;\Rightarrow\; y=\frac{20-x}{x+1} \;\Rightarrow\; x+1\,|\,20-x \;\Rightarrow\; x+1\,|\,20-(-1)=21 \;\Rightarrow\; x+1=\pm1,\pm3,\pm7,\pm21$$

$$\xrightarrow{x\in\mathbb{N}} \begin{cases} x=2,6,20 \\ y=6,2,0 \end{cases}$$

فقط $x=2,6$ منجر به تولید y طبیعی می‌شوند.

۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} m\,|\,n^2+n-1 \\ m\,|\,n-1 \;\to\; m\,|\,n^2-n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m\,|\,2n-1 \\ m\,|\,n-1 \;\to\; m\,|\,2n-2 \end{array}\right\} \Rightarrow\; m\,|\,1 \xrightarrow{m\in\mathbb{N}} m=1$$

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} n+1\,|\,2n+5n+18 \\ n+1\,|\,n+1 \;\to\; n+1\,|\,2n^2+2n \end{array}\right\} \Rightarrow\; n+1\,|\,3n+18$$

$$\left.\begin{array}{l} n+1\,|\,3n+18 \\ n+1\,|\,n+1 \;\to\; n+1\,|\,3n+3 \end{array}\right\} \Rightarrow\; n+1\,|\,15$$

$$\Rightarrow\; n+1=\pm1,\pm3,\pm5,\pm15 \;\Rightarrow\; n=2,4,14$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

اثبات گزینه‌ی ۱:

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,b \;\Rightarrow\; a^2\,|\,b^2 \\ a\,|\,c \;\Rightarrow\; a^2\,|\,c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow\; a^2\,|\,b^2+c^2$$

اثبات گزینه‌ی ۲: بنابر قاعده‌ی روبه‌رو واضح است:

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,b \\ c\,|\,d \end{array}\right\} \Rightarrow\; ac\,|\,bd \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} a\,|\,b \\ a\,|\,c \end{array}\right\} \Rightarrow\; a^2\,|\,bc$$

اثبات گزینه‌ی ۴:

$$\left.\begin{array}{l} a\,|\,b \\ a\,|\,c \end{array}\right\} \Rightarrow\; a\,|\,b-c \;\overset{\times b}{\Rightarrow}\; ab\,|\,b^2-bc$$

و البته گزینه‌ی ۳ را با فرضیات داده شده نمی‌توان اثبات کرد.

۱۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a=bq+r \qquad\qquad b+q=10$$

$$a=(b+1)(q-1)+(r+1)=bq+q-b-1+r+1=bq+q-b+r$$

از هم کم می‌کنیم: $q-b=0 \;\Rightarrow\; q=b \;\Rightarrow\; q=b=5$

$$a_{max}=bq+\underset{b-1}{\underset{\downarrow}{r_{max}}}=5\times5+4=29$$

۱۲- گزینه ۴ پاسخ است.

$$600=b(6)+r \qquad\qquad 0\le r<b$$

$r=600-6b \;\Rightarrow\; 0\le 600-6b<b \;\Rightarrow\; \frac{600}{7}<b\le100 \;\Rightarrow\; 86\le b\le100 \;\Rightarrow\; 100-86+1=15$ مقدار

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a=30q+r$$

$$a+125=30q+r+125=30(q+4)+r+5$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$A = ۲۳q + ۷ \Rightarrow ۵A - ۲ = ۲۳(۵q) + ۳۵ - ۲ = ۲۳q' + ۳۳ = ۲۳q'' + ۱۰$$

۱۵-گزینه ۳ پاسخ است.

$$a = ۳۷q + q^{۲} \qquad ۰ \le q^{۲} < ۳۷ \rightarrow ۰ \le q \le ۶$$

$$a_{max} = ۳۷ \times ۶ + ۳۶ = ۲۵۸$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} a = ۹q + ۴ \Rightarrow a = ۹(q+۲) - ۱۴ \Rightarrow ۹ | a + ۱۴ \\ a = ۵q' + ۱ \Rightarrow a = ۵(q'+۳) - ۱۴ \Rightarrow ۵ | a + ۱۴ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴۵ | a + ۱۴ \Rightarrow a + ۱۴ = ۴۵q''$$

$$\Rightarrow a = ۴۵q'' - ۱۴ \Rightarrow a = ۴۵q''' + ۳۱$$

راه‌حل دوم:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۹q + ۴ \Rightarrow ۵a = ۴۵q + ۲۰ \\ a = ۵q' + ۱ \Rightarrow ۹a = ۴۵q' + ۹ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴a = ۴۵q'' - ۱۱$$

چون سمت راست بر ۴ بخش‌پذیر است، باید سمت راست هم بر ۴ بخش‌پذیر باشد لذا حالات مختلف q'' را در تقسیم بر ۴ بررسی می‌کنیم:

$$۴a = ۴۵(۴t) - ۱۱$$

$$۴a = ۴۵(۴t+۱) - ۱۱ = ۴۵(۴t) + ۳۴$$

$$۴a = ۴۵(۴t+۲) - ۱۱ = ۴۵(۴t) + ۷۹$$

$۴a = ۴۵(۴t+۳) - ۱۱ = ۴۵(۴t) + ۱۲۴ = ۴۵t + ۳۱$: تنها این حالت مضرب ۴ است

۱۷- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۶۷ و ۶۸ کتاب

وقتی اعداد طبیعی بر سه مجموعه‌ی A و B و C افراز شده اند یعنی $N = A \cup B \cup C$ و C, B, A از هم جدا هستند. پس از اعداد داده شده عددی متعلق به C است که اولاً متعلق به N باشد و در مرحله‌ی دوم متعلق به B, A نباشد. چنین شرایطی فقط در گزینه (۴) یعنی ۳۴مهیا است. زیرا عدد ۳۴ و باقیمانده عدد ۳۴ بر ۶ برابر یک نیست پس $۳۴ \notin A$ و باقیمانده‌ی ۳۴ بر ۳ برابر ۲ نیست پس $۳۴ \notin B$.

۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

هر عدد صحیح به یکی از سه صوت $۳k$، $۳k + ۱$ و $۳k + ۲$ قابل نوشتن است، پس مکعب هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های زیر است:

$$n = ۳k \Rightarrow n^{۳} = ۲۷k^{۳} = ۹q$$

$$n = ۳k + ۱ \Rightarrow n^{۳} = (۳k+۱)^{۳} = ۲۷k^{۳} + ۲۷k^{۲} + ۹k + ۱ = ۹q' + ۱$$

$$n = ۳k + ۲ \Rightarrow n^{۳} = (۳k+۲)^{۳} = ۲۷k^{۳} + ۵۴k^{۲} + ۳۶k + ۸ = ۹q'' + ۸$$

بنابراین هیچ مکعب کاملی به فرم $۹k + ۵$ نیست. البته با در نظر گرفتن اعداد به‌صورت $۹k$، $۹k \pm ۱$ و $۹k \pm ۲$ و $۹k \pm ۳$ و $۹k \pm ۴$ نیز می‌توان به این نتیجه رسید که عملیاتی اضافه است.

۱۹- گزینه ۴ پاسخ است.

برای دو عدد به شکل $۴q + ۳$ داریم:

$$(۴q+۳)(۴q'+۳) = ۱۶qq' + ۱۲q + ۱۲q' + ۹$$

$$۴(۴qq' + ۳q + ۳q' + ۲) + ۱ = ۴m + ۱$$

و برای دو عدد به شکل $۶k + ۵$ داریم:

$$(۶k+۵)(۶k'+۵) = ۳۶kk' + ۳۰k + ۳۰k' + ۲۵ = ۶(۶kk' + ۵k + ۵k' + ۴) + ۱ = ۶n + ۱$$

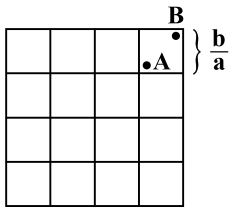
پس گزینه‌ای درست است که بتوان آن‌ها را به‌ترتیب به صورت $۴m + ۱$ و $۶n+۱$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ نوشت که اعداد ۱۲۹ و ۸۵ دارای این ویژگی هستند.

۲۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} a = bq + ۱ \\ a + ۹۹ = bq' + ۱۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{-} ۹۹ = b(q' - q) + ۹ \Rightarrow ۹۰ = b(q' - q) \Rightarrow b \mid ۹۰$$

بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای b، برابر ۹۰ است و با توجه به این‌که باقیمانده‌ی ۱۰ داریم، پس $b > ۱۰$ و در نتیجه کوچک‌ترین مقدار b، ۱۵ است که اختلاف این دو مقدار برابر ۷۵ است.

۲۱- گزینه ۴ پاسخ است.



مربع را به‌صورت یک شبکه‌ی $a \times a$ درمی‌آوریم. یعنی هر ضلع را به a قسمت تقسیم می‌کنیم. بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط هنگامی است که دو سر قطر مربع قرار گیرند.

$$d = |AB| \le \frac{b}{a}\sqrt{۲}$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ است.

از گزینه‌ی (۲) امتحان را آغاز می‌کنیم:

$$\checkmark\ m = ۶ \xrightarrow{?} ۶! \le (\frac{۶}{۲})^۶ \Rightarrow ۷۲۰ \le ۷۲۹$$

البته در این حالت لازم است یک عدد کم‌تر را هم کنترل کنیم، اما با توجه به نزدیکی ۷۲۰ به ۷۲۹، احتمالاً جمله‌ی قبلی درست نخواهد بود:

$$۵! \le (\frac{۵}{۲})^۵ \Rightarrow ۱۲۰ \not\le \frac{۳۱۲۵}{۳۲} = ۹۷/\ldots$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$۸۴ = \underset{\text{روز}}{۷} \times \underset{\text{ماه}}{۱۲} = \text{تعداد لانه‌ها}$$

برای آن‌که حداقل ۳ نفر در یک روز از هفته و یک ماه از سال متولد شده باشند، باید اقلاً $۱۶۹ = ۱ + ۸۴ \times ۲$ نفر موجود باشند.

۲۴- گزینه ۳ پاسخ است.

روزی وجود دارد که در آن اقلاً: $۱۵ = ۱ + \left[\frac{۱۰۰ - ۱}{۷}\right]$ نفر به دنیا آمده باشند.

۲۵- گزینه ۴ پاسخ است.

بدترین انتخاب هنگامی است که ابتدا ۶ توپ سفید و سپس ۵ توپ قرمز برداریم. در این انتخاب هنوز از هر رنگ حداقل ۲ توپ نداریم. با خروج توپ ۱۲ و ۱۳ با هر نوع انتخابی از هر رنگ ۲ توپ خواهیم داشت.

$$۴^۳ \not\ge ۳^۴$$
$$۴^۴ \ge ۴^۴$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\sum_{i=۱}^{n} i(i+۱) = \sum_{i=۱}^{n} i^۲ + i = \sum_{i=۱}^{n} i^۲ + \sum_{i=۱}^{n} i = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} + \frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{n(n+۱)}{۲}(\frac{۲n+۱}{۳} + ۱) = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۳}$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ است.

در بدترین انتخاب، ۸ مهره‌ی قرمز و ۱۰ مهره‌ی سبز انتخاب می‌کنیم. با انتخاب مهره‌ی ۱۹ اُم، حتماً از هر دو رنگ سبز و آبی خواهیم داشت.

۲۸- گزینه ۴ پاسخ است.

گزینه‌ی ۱: $n^۲ = ۲^۲ \times ۳^۲ \Rightarrow n = ۲ \times ۳$

گزینه‌ی ۲: $n = ۱۹ \Rightarrow ۱۹^۲ + ۳۷ \times ۱۹ + ۱۹ = ۱۹q$

گزینه‌ی ۳: $۳ \not> ۱ + ۲ \Rightarrow ۱,۲,۳$

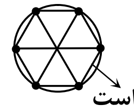
گزینه‌ی (۴) قضیه‌ی کلی است: $(۲k+۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = \underbrace{۴k(k+۱)}_{۲q} + ۱ = ۸q + ۱$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ است.

مثال نقض گزینه‌ی ۱: ۲^n را نمی‌توان به‌صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

گزینه‌ی ۲: $۱^۳+۲^۳+\cdots+n^۳=(\frac{n(n+۱)}{۲})^۲$

مثال نقض گزینه‌ی ۳: $۲^{۶-۱}=۲^۵=۳۲$



۱۲ ناحیه است

مثال نقض گزینه‌ی ۴: $e^{Ln۲}=۲$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$۸۹=۸۱+۴+۴$

$۵۹=۴۹+۹+۱$

$۲۴=۱۶+۴+۴$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ است.

۳۲- گزینه ۴ پاسخ است.

$\forall x\in A\ ;\ x\le a \Rightarrow -x\ge -a \Rightarrow ۲a-x+۱\ge a+۱$

۳۳- گزینه ۳ پاسخ است.

گزینه‌های (۱) و (۲) چون زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی‌اند، طبق اصل خوش‌ترتیبی دارای عضو ابتداست.

گزینه‌ی (۴) هم مسلماً از جایی به بعد برقرار است. اما چون: $۳^n\ge n^۳$ است، گزینه‌ی (۳) تهی است.

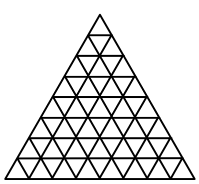
۳۴- گزینه ۴ پاسخ است.

چون می‌توانیم ثابت کنیم $a^۲\ge ۰$ است، پس:

$a^۲\ge ۰ \Rightarrow a^۴\ge ۰$

اما دقت کنید در سؤال از مثبت بودن توان چهارم سخن به میان آمده که با $a=۰$ قابل رد است.

۳۵- گزینه ۳ پاسخ است.



باید هر ضلع را به هشت قسمت تقسیم کنیم که: $۸^۲=۶۴$ لانه است.

پس به ۶۵ نقطه نیاز است.

۳۶- گزینه ۳ پاسخ است.

اعداد $۲۵+۳k$ عضو Sاند $(k\ge ۰)$ پس:

$۴۶=۲۵+۳\times ۷$

گزینه‌ی (۱) نیاز به $k<۰$ دارد، که طبق سؤال تعریف نشده است.

۳۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$P(۱):۱^۳+۱۱(۱)=۱۲=۲\times ۶$

فرض استقرا $P(k):k^۳+۱۱k=۶q\ \ (q\in\mathbb{N})$

حکم استقرا $P(k+۱):(k+۱)^۳+۱۱(k+۱)=۶q'\quad (q'\in\mathbb{N})$

با ساده کردن عبارت حکم استقرا داریم:

$k^۳+۳k^۲+۳k+۱+۱۱k+۱۱=(k^۳+۱۱k)+۱۲+۳k(k+۱)$

با توجه به فرض $k^۳+۱۱k=۶q$ و همین‌طور ۱۲ نیز مضرب ۶ است، پس کافی است داشته باشیم:

$۳k(k+۱)=۶t \Rightarrow k(k+۱)=۲t$

یعنی حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی، بر ۲ بخش‌پذیر است.

۳۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\geq\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\geq\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \xleftrightarrow{\times(\sqrt{xy})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\geq 4\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow\ x+y+2\sqrt{xy}\ \geq\ 4\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}\ \geq\ 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$$

با توجه به آن‌که تمامی روابط بازگشت‌پذیر هستند، پس حکم ثابت می‌شود.

۳۹- گزینه ۱ پاسخ است.

به روش برهان خلف، فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد؛ یعنی $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}>2\sqrt{x+1}$ در این صورت داریم:

$$(\sqrt{x}\ +\sqrt{x+2})^2>(2\sqrt{x+1})^2 \Rightarrow x+x+2+2\sqrt{x(x+2)}>4(x+1) \Rightarrow 2\sqrt{x(x+2)}>2(x+1) \Rightarrow \sqrt{x(x+2)}>x+1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2+2x>x^2+2x+1 \Rightarrow 0>1$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ است.

برای هر عدد حقیقی مانند a که $0<a<4$ طبق تعریف جزء صحیح داریم:

$$[a]\in\{0,1,2,3\}$$

پس اگر هریک از اعداد صحیح $\{0,1,2,3\}$ را لانه و ۳۷ عدد را کبوتر در نظر بگیریم. چون $37>4\times 9$ پس حداقل در یک لانه $9+1=10$ کبوتر جای می‌گیرند.