Ⓑ **۱۶۴- گزینه‌ی ۳** برای محاسبه $a.(b\times c)$ جای بردارهای a و c را با هم عوض می‌کنیم. می‌دانیم این جابه‌جایی ضرب مختلط را منفی می‌کند. پس $a.(b\times c)$ مساوی $-c.(b\times a)$ است. با جابه‌جایی بردارهای a و b خواهیم داشت:

$$a.(b\times c)=c.(a\times b)\xrightarrow{c=a\times b}a.(b\times c)=c.c=|c|^2=4+1+4=9$$

Ⓑ **۱۶۵- گزینه‌ی ۱** ابتدا عبارت $(a-b).[(2a+b)\times(c-a)]$ را ساده می‌کنیم.

$$(a-b).[(2b+c)\times(c-a)]=(a-b).[2b\times c-2b\times a+\underbrace{c\times c}_{0}-c\times a]$$

$$=2a.(b\times c)-\underbrace{2a.(b\times a)}_{0}-\underbrace{a.(c\times a)}_{0}-\underbrace{2b.(b\times c)}_{0}+\underbrace{2b.(b\times a)}_{0}+b.(c\times a)=2a.(b\times c)+b.(c\times a)$$

چون $c=a\times b$، در ضرب‌های مختلط به‌دست آمده جای بردارها را عوض می‌کنیم تا در آن‌ها $a\times b$ ایجاد شود. می‌دانیم با جابه‌جایی بردارها در ضرب مختلط، حاصل‌ضرب منفی می‌شود، پس $2a.(b\times c)$ مساوی $-2c.(b\times a)$ و مساوی $2c.(a\times b)$ است و همچنین $b.(c\times a)$ مساوی $-c.(b\times a)$ و مساوی $c.(a\times b)$ است، بنابراین داریم:

$$(a-b).[(2b+c)\times(c-a)]=2a.(b\times c)+b.(c\times a)=2c.(a\times b)+c.(a\times b)=3c.(a\times b)$$

بنا بر فرض، $c=a\times b$، پس $3c.(a\times b)$ مساوی $3c.c$ یا $3|c|^2$ است، یعنی برابر $3(1+4+1)=18$ می‌باشد. بنابراین حاصل عبارت خواسته‌شده برابر ۱۸ می‌باشد.

Ⓑ **۱۶۶- گزینه‌ی ۳** بردارهای a ، b و c بر بردار V عمودند، بنابراین بردارهای a ، b و c در یک صفحه قرار دارند، پس حاصل‌ضرب مختلط آن‌ها صفر است، یعنی $a.(b\times c)=0$.

$$b\times c=\begin{bmatrix} m & 3 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}=(7,-1-3m,2m+3)$$

$$a.(b\times c)=(0,1,2).(7,-3m-1,2m+3)=0-3m-1+4m+6=m+5$$

چون $a.(b\times c)=0$ پس داریم:
$$m+5=0\Rightarrow m=-5$$

Ⓑ **۱۶۷- گزینه‌ی ۴** اگر بتوانیم a را به صورت ترکیبی از بردارهای b و c بنویسیم، آن‌گاه بردارهای a، b و c در یک صفحه هستند، بنابراین $a.(b\times c)=0$.

$$a.(b\times c)=0\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 2 & m\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 1(-5)-2(-4)+m(2)=0\Rightarrow m=-\frac{3}{2}$$

Ⓐ **۱۶۸- گزینه‌ی ۱** هر سه بردار $a\times d$ ، $b\times d$ و $c\times d$ بر بردار d عمودند. بنابراین این بردارها موازی صفحه‌ی عمود بر d هستند.

Ⓐ **۱۶۹- گزینه‌ی ۲** نقاط A ، B ، C و D در یک صفحه هستند هرگاه حاصل‌ضرب مختلط پیکان‌های همرس $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ و $\overline{AD}$ صفر باشد، یعنی $\overline{AB}.(\overline{AC}\times\overline{AD})=0$

$$\overline{AB}=B-A=(-2,2,-2)\quad,\quad\overline{AC}=C-A=(2,1,-1)\quad,\quad\overline{AD}=D-A=(-1,1,m-2)$$

$$\overline{AC}\times\overline{AD}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & m-2\end{bmatrix}=(m-1,-2m+5,3)$$

$$\overline{AB}.(\overline{AC}\times\overline{AD})=(-2,2,-2).(m-1,-2m+5,3)=-2m+2-4m+10-6=-6m+6$$

بنا بر آنچه گفته شد، باید $-6m+6$ برابر صفر باشد، پس $m=1$.

Ⓑ **۱۷۰- گزینه‌ی ۳** می‌دانیم بردار $a\times b$ بر صفحه شامل دو بردار a و b عمود است. از طرفی، بنا بر فرض تست، بردار c نیز بر صفحه شامل دو بردار a و b عمود است، پس بردارهای $a\times b$ و c موازی‌اند، بنابراین زاویه‌ی بین بردارهای $a\times b$ و c یا صفر یا ۱۸۰ درجه است. چون همه‌ی گزینه‌ها مثبت هستند، پس زاویه را صفر در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$c.(a\times b)=|c||a\times b|\underbrace{\cos 0}_{1}=|c||a||b|\sin 30^\circ=2\times3\times4\times\frac{1}{2}=12$$

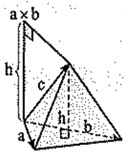
Ⓐ **۱۷۱- گزینه‌ی ۳** حجم متوازی‌السطوحی که با بردارهای a ، b و c ساخته می‌شود، برابر $|a.(b\times c)|$ می‌باشد.

$$b\times c=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}=(8,-3,1)\Rightarrow a.(b\times c)=(2,-1,1).(8,-3,1)=16+3+1=20$$

حجم متوازی‌السطوح : $V=|a.(b\times c)|=20$

بنابراین حجم هرم هم‌حجم با این متوازی‌السطوح نیز برابر ۲۰ می‌باشد.

Ⓑ **۱۷۲- گزینه‌ی ۲** با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی ارتفاع h را باید تعیین کنیم.



راه‌حل اول: برای این کار ابتدا حجم هرم و سپس مساحت قاعده‌ی آن را تعیین می‌کنیم.

می‌دانیم حجم هرم برابر $\frac{1}{3}Sh$ می‌باشد و به این وسیله می‌توانیم ارتفاع h را به‌دست آوریم:

$$a\times b=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=(-3,-2,1)$$

مساحت قاعده: $S=\frac{1}{2}|a\times b|=\frac{1}{2}\sqrt{9+4+1}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

حجم هرم: $V=\frac{1}{6}|c.(a\times b)|=\frac{1}{6}|(3,1,0).(-3,-2,1)|=\frac{1}{6}|-9-2|=\frac{11}{6}$ ، حجم هرم: $V=\frac{1}{3}Sh\Rightarrow\frac{11}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{14}}{2}h\Rightarrow h=\frac{11}{\sqrt{14}}$

راه‌حل دوم: طول ارتفاع برابر طول تصویر قائم بردار c روی $a\times b$ است، پس:

$$h=\frac{|c.(a\times b)|}{|a\times b|}=\frac{11}{\sqrt{14}}$$

Ⓐ **۱۷۳- گزینه‌ی ۴** با رئوس A ، B ، C و D پیکان‌های همرس $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ و $\overline{AD}$ را به‌دست می‌آوریم. در این صورت حجم هرم خواسته شده برابر $\frac{1}{6}|\overline{AB}.(\overline{AC}\times\overline{AD})|$ می‌باشد.

$$\overline{AB}=B-A=(0,0,-2),\ \overline{AC}=C-A=(0,4,-2),\ \overline{AD}=D-A=(-2,0,1)$$

$$\overline{AC}\times\overline{AD}=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}=(4,4,8)\Rightarrow\overline{AB}.(\overline{AC}\times\overline{AD})=(0,0,-2).(4,4,8)=-16$$

حجم هرم: $V=\frac{1}{6}|\overline{AB}.(\overline{AC}\times\overline{AD})|=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

Ⓑ **۱۷۴- گزینه‌ی ۱** برای محاسبه‌ی $|b-c|$ باید زاویه‌ی بین دو بردار b و c را به‌دست آوریم. فرض کنید θ زاویه‌ی بین بردارهای b و c است. طبق فرض تست، $\theta<90^\circ$.

حجم هرم : $V=\frac{1}{6}|a.(b\times c)|\Rightarrow4\sqrt{3}=\frac{1}{6}|a||b\times c|\cos60^\circ\Rightarrow4\sqrt{3}=\frac{1}{6}|a||b||c|\sin\theta\cos60^\circ$

$$\Rightarrow4\sqrt{3}=\frac{1}{6}(4)(4)(6)\sin\theta(\frac{1}{2})\Rightarrow4\sqrt{3}=8\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

حال می‌توانیم $|b-c|$ را به‌دست آوریم.

$$|b-c|=\sqrt{|b|^2+|c|^2-2|b||c|\cos\theta}=\sqrt{16+36-2(4)(6)\cos60^\circ}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$

Ⓐ **۱۷۵- گزینه‌ی ۴** حجم منشور مثلث‌القاعده، نصف حجم متوازی‌السطوح ساخته شده بر روی بردارهای a ، b و c است، بنابراین حجم منشور مثلث‌القاعده برابر $\frac{1}{2}|a.(b\times c)|$ می‌باشد.

$$b\times c=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}=(-4,-3,5)\Rightarrow a.(b\times c)=(1,3,-1).(-4,-3,5)=-4-9-5=-18$$

حجم منشور مثلث‌القاعده: $V=\frac{1}{2}|a.(b\times c)|=\frac{1}{2}|-18|=9$

Ⓐ **۱۷۶- گزینه‌ی ۲** می‌دانیم $a\times(b\times c)$ برابر $(a.c)b-(a.b)c$ است و بردار $a\times(b\times c)$ بر بردار a عمود است، پس زاویه‌ی بین دو بردار a و $(c.a)b-(a.b)c$ برابر ۹۰ درجه است.