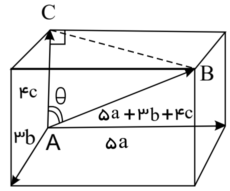
دبیرستان علامه حلی تهران

۲۱. گزینه ۲ راه‌حل اول: $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ دو به دو عمود برهم هستند. پس $5\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ قطر مکعب‌مستطیل بنا شده بر $5\vec{a}$، $2\vec{b}$ و $4\vec{c}$ است. بنابراین:

$$\left|5\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}\right| = \sqrt{25|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+16|\vec{c}|^2} = \sqrt{25+9+16} = 5\sqrt{2}$$

باتوجه به شکل، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

$$\cos\theta = \frac{|5\vec{a}|}{\left|5\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}\right|} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$



راه‌حل دوم: نکته: اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر θ باشد، آنگاه: $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

نکته: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمود باشند، آنگاه: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\left|5\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}\right|^2 = (5\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})\cdot(5\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c})$$

$$= 25|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+16|\vec{c}|^2+15\vec{a}\cdot\vec{b}+20\vec{a}\cdot\vec{c}+15\vec{b}\cdot\vec{a}+12\vec{b}\cdot\vec{c}+20\vec{c}\cdot\vec{a}+12\vec{c}\cdot\vec{b}$$

$$\xlongequal[\text{برهم عمودند.}]{b\cdot a \text{ و } c \text{ یکه و دو به دو}} 25+9+16=50 \Rightarrow \left|5\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}\right| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

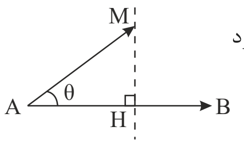
اگر زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $5\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ را θ درنظر بگیریم، داریم:

$$\cos\theta = \frac{(5\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})\cdot\vec{a}}{\left|5\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}\right|\,|\vec{a}|} = \frac{5|\vec{a}|^2+0}{5\sqrt{2}\times 1} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

۲۲. گزینه ۳

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 5 \Rightarrow |AM|\,|AB|\cos\theta = 5 \xrightarrow{|AM|\cos\theta = |AH|} |AH|\,|AB| = 5 \Rightarrow |AH| = \frac{5}{|AB|} = \text{ثابت}$$

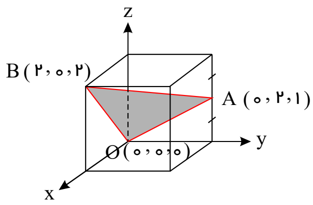
یعنی M نقاطی میتواند باشد که اندازه تصویر $\overrightarrow{AM}$ روی $\overrightarrow{AB}$ مقدار ثابتی باشد پس مکان هندسی M خطی عمود بر AB می باشد .



۲۳. گزینه ۲ نکته: مساحت مثلثی که با دو بردار a و b تولید می‌شود، برابر است با:

$$\frac{1}{2}|a\times b|$$

باتوجه به شکل، داریم:



$$\overrightarrow{OA}=(۰,۲,۱)\quad,\quad \overrightarrow{OB}=(۲,۰,۲)$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{vmatrix}=(۴,۲,-۴)$$

حال با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

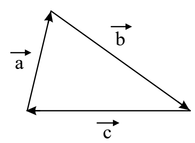
$$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{۱}{۲}|(۴,۲,-۴)|=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$

۲۴. گزینه ۴

نکته: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^{۲}$

نکته: $\vec{e}_a=\dfrac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}$

باتوجه به شکل داریم:



بنابراین:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\Rightarrow\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot(-\vec{a})=-|\vec{a}|^{۲}\quad(*)$$

باتوجه به نکتهٔ بالا، $\vec{e}_a=\dfrac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}$، پس $\vec{a}=|\vec{a}|\,\vec{e}_a$. از مقایسهٔ این عبارت با فرض $\vec{a}=۴\vec{e}_a$ نتیجه می‌گیریم $|\vec{a}|=۴$. با جایگذاری این مقدار در $(*)$ داریم:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=-|\vec{a}|^{۲}=-۴^{۲}=-۱۶$$

۲۵. گزینه ۲ نکته: تصویر بردار $a=(x_۱,y_۱,z_۱)$ روی محور xها به‌صورت $(x_۱,۰,۰)$ روی محور yها به‌صورت $(۰,y_۱,۰)$ و روی محور zها به‌صورت $(۰,۰,z_۱)$ می‌باشد.

نکته: اگر a, b و c سه بردار دلخواه باشند، آن‌گاه داریم: $a\times(b\times c)=(c\cdot a)b-(b\cdot a)c$

$$a=(۱,-۲,۰)\,,b=(۳,۱,-۱),c=(۰,۲,۱)$$

مطابق نکته داریم: $(a\times c)\times b=(a\cdot b)c-(b\cdot c)a\qquad(*)$

$$\begin{cases} a\cdot b=(۱,-۲,۰)\cdot(۳,۱,-۱)=۱ \\ b\cdot c=(۳,۱,-۱)\cdot(۰,۲,۱)=۱ \end{cases}$$

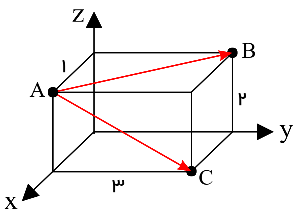
با جایگذاری در $(*)$ داریم:

$$(a\times c)\times b=-b\times(a\times c)=c-a=(۰,۲,۱)-(۱,-۲,۰)=(-۱,۴,۱)$$

حال تصویر این بردار روی محور yها به‌صورت $(۰,۴,۰)$ می‌باشد که اندازه‌ی آن برابر ۴ است.

۲۶. گزینه ۲

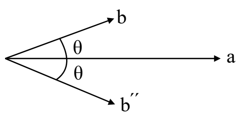
یک گوشه مکعب مستطیل را بر مبدأ مختصات منطبق کرده به رئوس آن مختصات می‌دهیم.



$$\begin{matrix} A(۱,۰,۲) \\ B(۰,۳,۲) \\ C(۱,۳,۰) \end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-۱,۳,۰) \\ \overrightarrow{AC}=(۰,۳,-۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=۰+۹-۰=۹$$

۲۷. گزینه ۲



$$a\cdot b''=|a|\,|b''|\cos\theta=|a|\,|b|\cos\theta=a\cdot b$$

بنابراین $a\cdot b''$ همان $a\cdot b$ می‌باشد و مقدار آن برابر است با:

$$a\cdot b=۶-۴=۲$$

۲۸. گزینه ۲ نکته: در مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a، ارتفاع و مساحت برابر است با:

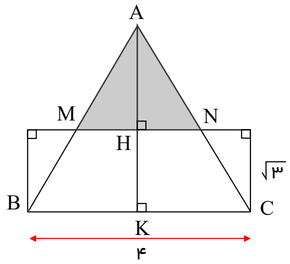
$$h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \quad , \quad S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.

$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A} \\ \hat{M}=\hat{B}\end{cases} \xrightarrow{(\text{زز})} \overset{\Delta}{AMN}\cong\overset{\Delta}{ABC}$$

$$AK=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴=۲\sqrt{۳}\Rightarrow AH=AK-KH=۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=\sqrt{۳}\ (*)$$

راه حل اول:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times(۴)^{۲}=۴\sqrt{۳}$$

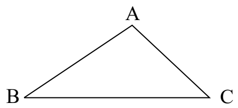
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\left(\frac{AH}{AK}\right)^{۲}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AMN}}=\frac{۱}{۴}\times۴\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

راه حل دوم:

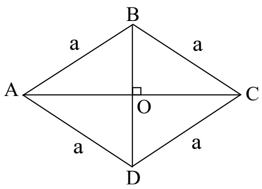
اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع AMN را a در نظر بگیریم، آن‌گاه باتوجه به این که AH ارتفاع این مثلث است داریم:

$$AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\overset{(*)}{=\!=}\sqrt{۳}\Rightarrow a=۲\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AMN}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=\sqrt{۳}$$

۲۹. گزینه ۱



نکته: مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با: $S=\frac{۱}{۲}AB\cdot AC\times\sin\hat{A}$



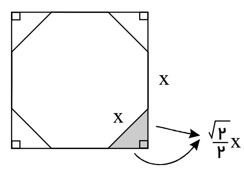
$$AC^{۲}+BD^{۲}=۱۶\Rightarrow\frac{AC^{۲}}{۴}+\frac{BD^{۲}}{۴}=۴\Rightarrow\left(\frac{AC}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{BD}{۲}\right)^{۲}=۴$$

$$\Rightarrow OA^{۲}+OB^{۲}=۴\xrightarrow{\text{فیثاغورس در } \overset{\Delta}{OAB}}a^{۲}=۴\Rightarrow a=۲$$

حال با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$S_{\text{لوزی}}=۲S_{\overset{\Delta}{ABD}}=۲\times\frac{۱}{۲}AB\cdot AD\sin۳۰^{\circ}=۲\times۲\times\frac{۱}{۲}=۲$$

۳۰. گزینه ۴ مثلث‌های اطراف ۸ ضلعی منتظم، متساوی‌الساقین‌هستند.



$$\text{ضلع مربع}=(۱+\sqrt{۲})x\sqrt{۲}\ \Rightarrow\ x=\frac{\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}(\sqrt{۲}-۱)\ \Rightarrow\ x=۲-\sqrt{۲}$$

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}x^{۲}=\frac{۱}{۴}(۲-\sqrt{۲})^{۲}=\frac{۶-۴\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۳}{۲}-\sqrt{۲}$$

۳۱. گزینه ۲ نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$

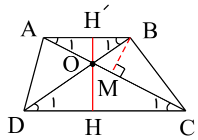
برای این که a حداقل مقدار خود را داشته باشد، باید $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ حداقل مقدار ممکن باشد، چون S باید طبیعی باشد، پس حداقل مقدار آن ۱ است، بنابراین:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=۱\Rightarrow a^{۲}=\frac{۴}{\sqrt{۳}}\xrightarrow{a>۰}a=\frac{۲}{\sqrt[۴]{۳}}$$

بنابراین حداقل مقدار a برابر $\frac{۲}{\sqrt[۴]{۳}}$ است.

۳۲. گزینه ۳ **راه حل اول:**

نکته: مساحت ذوزنقه، برابر با نصف حاصل ضرب مجموع دو قاعده در ارتفاع است.



$$AB \| CD \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{قضیه‌ی خطوط}} \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{cases} \xrightarrow{(\text{زز})} \overset{\Delta}{AOB} \sim \overset{\Delta}{COD}$$

نسبت تشابه این دو مثلث برابر $\frac{OC}{OA}$است.

از طرفی داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BOC}}}{S_{\overset{\Delta}{AOB}}} = \frac{\frac{1}{2} \times BM \times OC}{\frac{1}{2} \times BM \times OA} = \frac{OC}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{4}{2} = 2$$

بنابراین $\overset{\Delta}{AOB}$ و $\overset{\Delta}{COD}$ با نسبت تشابه ۲، متشابه‌اند. پس داریم:

$$\begin{cases} CD = 2AB \\ OH = 2OH' \end{cases} \xrightarrow[OH'=h]{AB=a} \begin{cases} CD = 2a \\ OH = 2h \end{cases} \to SABCD = \frac{1}{2}(AB + CD) \times HH' = \frac{1}{2} \times 3a \times 3h = \frac{9ah}{2} \qquad (*)$$

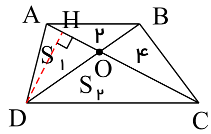
طبق فرض $S_{\overset{\Delta}{AOB}} = 2$، بنابراین:

$$\frac{1}{2} AB \times OH' = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times a \times h = 2 \Rightarrow ah = 4$$

با جایگذاری این مقدار در(*) داریم: $SABCD = 18$

راه حل دوم:

فاصله‌ی A از DC با فاصله‌ی B از DC برابر است (زیرا $AB \| CD$)، پس مساحت دو مثلث ADC و BCD با هم برابر است (زیرا قاعده ی مشترک و ارتفاع برابر دارند).



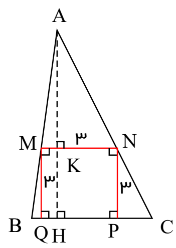
$$S_{\overset{\Delta}{ADC}} = S_{\overset{\Delta}{BDC}} \Rightarrow S_1 + S_2 = 4 + S_2 \Rightarrow S_1 = 4$$

$$\begin{cases} \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\frac{1}{2} DH \cdot OA}{\frac{1}{2} DH \cdot OC} = \dfrac{OA}{OC} \Rightarrow \dfrac{4}{S_2} = \dfrac{OA}{OC} \\ \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AOB}}}{S_{\overset{\Delta}{BOC}}} = \dfrac{OA}{OC} \Rightarrow \dfrac{2}{4} = \dfrac{OA}{OC} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{S_2} = \frac{2}{4} \Rightarrow S_2 = 8$$

بنابراین مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$SABCD = 2 + 4 + 4 + 8 = 18$$

۳۳. گزینه ۲ نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌ها، نیمسازها و میانه‌های متناظر، برابر نسبت تشابه است.

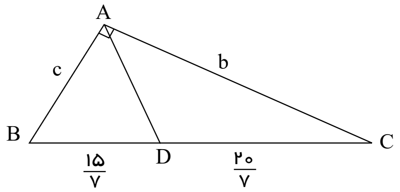


$$AH = h \Rightarrow AK = AH - KH = h - 3$$
$$\text{مربع}\ MNPQ \Rightarrow MN \| PQ \Rightarrow MN \| BC$$

بنابراین دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و نسبت ارتفاع‌های آن‌ها با نسبت تشابه برابر است:

$$\frac{AK}{AH} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{h-3}{h} = \frac{3}{4/8} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{h-(h-3)}{h} = \frac{4/8 - 3}{4/8} \Rightarrow \frac{3}{h} = \frac{1/8}{4/8} \Rightarrow \frac{3}{h} = \frac{3}{8} \Rightarrow h = 8$$

۳۴. گزینه ۲



نکته (قضیه‌ی نیمساز داخلی): اگر AD نیمساز داخلی مثلث ABC باشد، داریم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

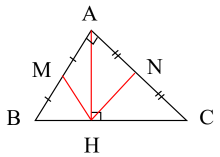
طبق قضیه‌ی نیمساز داخلی داریم: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{\frac{۱۵}{۷}}{\frac{۲۰}{۷}}=\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{c}{b}=\frac{۳}{۴}$

با فرض $b=۴x$ و $c=۳x$ و با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم:

$$b^{۲}+c^{۲}=۵^{۲}\Rightarrow ۱۶x^{۲}+۹x^{۲}=۲۵\Rightarrow x=۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=۴\\c=۳\end{cases}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}bc=۶$$

۳۵. گزینه ۳



دو مثلث AHB و AHC متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}$ است. پس نسبت میانه‌های HN و HM نیز $\frac{۲}{۳}$ است.