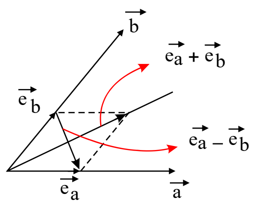
۲۱. گزینه ۲



نکته: اگر a و b دو بردار غیرصفر باشند، مطابق شکل بر روی e_a و e_b یک لوزی بنا می‌شود. باتوجه به اینکه قطرهای لوزی نیمساز زاویه‌ها و عمود برهم‌اند، پس $\vec{e}_a+\vec{e}_b$ در راستای نیمساز زاویهٔ بین a و b و $\vec{e}_a-\vec{e}_b$ در راستای عمود بر این نیمساز قرار دارد.

باتوجه به نکتهٔ بالا، باید راستای $\vec{e}_a-\vec{e}_b$ را به‌دست بیاوریم.

$$\begin{cases} \vec{a}=(۳,۰,۴) \Rightarrow \vec{e}_a=\dfrac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}=\dfrac{۱}{۵}(۳,۰,۴) \\ \vec{b}=(۱,-۲,۲) \Rightarrow \vec{e}_b=\dfrac{۱}{|\vec{b}|}\vec{b}=\dfrac{۱}{۳}(۱,-۲,۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_a-\vec{e}_b=(\frac{۳}{۵},۰,\frac{۴}{۵})-(\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})=(\frac{۴}{۱۵},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۱۵})$$

با ضرب این بردار در $\dfrac{۱۵}{۲}$، بردار $(۲,۵,۱)$ به‌دست می‌آید که در راستای $\vec{e}_a-\vec{e}_b$ قرار دارد.

۲۲. گزینه ۴

$$۲a\cdot[(۳a+b\times c)\times a]=۲a\cdot[۳a\times a+(b\times c)\times a]=۲a\cdot[(b\times a)\times a]$$

بردار $(b\times a)\times a$ بر بردار a عمود است

۲۳. گزینه ۳ نکته: اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$، آن‌گاه $\overrightarrow{AB}=(x_۲-x_۱,y_۲-y_۱,\ z_۲-z_۱)$

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواه $A(x,y,z)$ از مبدأ مختصات که آن‌را با $|OA|$ نشان می‌دهند برابر است با: $|OA|=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$

$$M(x,y,z):\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(۱-x,-۲-y,۳-z)\\ \overrightarrow{MB}=(-۱-x,۲-y,-۳-z)\end{cases}$$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=۱۱\Rightarrow(x^۲-۱)+(y^۲-۴)+(z^۲-۹)=۱۱\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۲۵$$

۲۴. گزینه ۲ با انتخاب مناسب بردارهای a و b و استفاده از نامساوی کوشی- شوارتس داریم:

$$a=(x\ ,\ ۲y\ ,\ ۳z)\qquad b=(۲\ ,\ ۳\ ,\ ۱)$$

$$\xrightarrow[\text{نامساوی کوشی - شوارتس}]{|a\cdot b|\le|a||b|}|۲x+۶y+۳z|\le\sqrt{x^۲+۴y^۲+۹z^۲}\cdot\sqrt{۴+۹+۱}\Rightarrow|۲x+۶y+۳z|\le\sqrt{۱۴}$$

تذکر: در این مسائل برای انتخاب دو بردار، یک بردار از جذر هر جمله‌ی عبارت مربع کامل به‌دست می‌آید:

$$x^۲+۴y^۲+۹z^۲\xrightarrow{\text{جذر جملات}}a=(x\ ,\ ۲y\ ,\ ۲z)$$

سپس با توجه به عبارت ضرب داخلي، بردار دوم را پيدا مي‌كنيم:

$$a\cdot b=۲x+۶y+۳z\xrightarrow{a=(x\ ,\ ۲y\ ,\ ۳z)}b=(۲\ ,\ ۳\ ,\ ۱)$$

۲۵. گزینه ۲

$$\begin{cases}a\times b=d\times c\\ a\times d=b\times c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\times b=-c\times d\\ a\times d=-c\times b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\times b+c\times d=\vec{O} & (۱)\\ a\times d+c\times b=\vec{O} & (۲)\end{cases}$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم.

$$\xrightarrow{(۱)-(۲)}a\times b+c\times d-a\times d-c\times b=۰\Rightarrow a\times(b-d)-c\times(b-d)=\vec{O}\Rightarrow(a-c)\times(b-d)=\vec{O}$$

۲۶. گزینه ۳ حجم این منشور نصف حجم متوازی‌السطوح ساخته شده با همین بردارها است (چون قاعده‌ی آن نصف قاعده‌ی متوازی السطوح است).

$$\text{حجم منشور} = \frac{۱}{۲}|a\cdot(b\times c)| = \frac{۱}{۲}$$

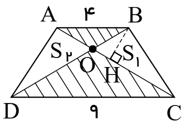
$$(b\times c) = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = (-۱,-۱,۱) \Rightarrow a\cdot(b\times c) = (۳,-۱,۱)\cdot(-۱,-۱,۱) = -۳+۱+۱ = -۱$$

نکته: حجم متوازی السطوحی که سه یال همرس آن بردارهای a ، b و c باشند، عبارت است از: $a\cdot(b\times c)$

۲۷. گزینه ۲ از آن‌جایی که c بر صفحه‌ی گذرا از a و b عمود است پس c موازی با $a\times b$ می‌شود. یعنی زاویه بین بردار $\vec{c}$ با $a\times b$ صفر یا ۱۸۰ درجه می‌باشد.در نتیجه:

$$c\cdot(a\times b) = \left\{\begin{array}{l} |c||a\times b|\cos ۰^\circ = |a||b||c|\sin ۳۰ \cos ۰^\circ = ۳\times ۴\times ۳\times \frac{۱}{۲} = ۱۸ \\ \text{یا} \\ |c||a\times b|\cos ۱۸۰^\circ = |a||b||c|\sin ۳۰ \cos ۱۸۰ = -۱۸ \end{array}\right\} \Rightarrow |c\cdot(a\times b)| = ۱۸$$

۲۸. گزینه ۲



$$S_{\overset{\Delta}{ADC}} = S_{\overset{\Delta}{BDC}} \Rightarrow S_۱ = S_۲$$

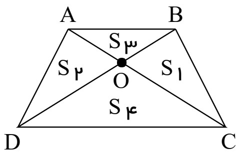
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABO}}}{S_۱} = \frac{OA}{OC} = \frac{S_۲}{S_{\overset{\Delta}{ODC}}} \Rightarrow \frac{۴}{S_۱} = \frac{S_۲}{۹} \xrightarrow{S_۱ = S_۲} S_۱^۲ = ۳۶ \Rightarrow S_۱ = ۶$$

$$S_{\text{کل}} = ۴+۶+۶+۹ = ۲۵$$

نکته : در ذوزنقه‌ی متساوی الساقین همواره داریم:

$$۱)\ S_۱ = S_۲$$

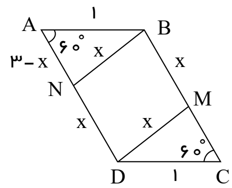
$$۲)\ S_۱^۲ = S_۳ \times S_۴$$



۲۹. گزینه ۳

طبق قضیه‌ي کسینوس‌ها، داریم:

در مثلث ABN :

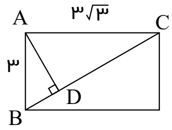


$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$$

$$x^۲ = ۱ + (۳-x)^۲ - ۲(۳-x)\cos ۶۰^\circ \qquad \cancel{x^۲} = ۱۰ - ۶x + \cancel{x^۲} - ۳ + x$$

$$۵x = ۷ \Rightarrow x = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$

۳۰. گزینه ۲



$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ = (۳\sqrt{۳})^۲ + ۳^۲ = ۲۷ + ۹ = ۳۶ \Rightarrow BC = ۶$$

راه حل اول:

$$BD \times BC = AB^۲ \xrightarrow{BC=۶} BD = \frac{۳}{۲} \Rightarrow AD^۲ = AB^۲ - BD^۲$$

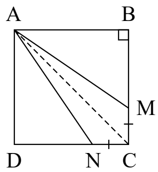
$$= ۹ - \frac{۹}{۴} = \frac{۲۷}{۴} \Rightarrow AD = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

راه حل دوم (استفاده از فرمول مساحت):

$$۲S = AB \times AC = AD \times BC \xrightarrow{AB=۳, AC=۳\sqrt{۳}} ۳ \times ۳\sqrt{۳} = AD \times ۶$$

$$\Rightarrow AD = \frac{۹\sqrt{۳}}{۶} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۱. گزینه ۲



$$SAMCN = \frac{۱}{۳} SABCD = \frac{a^۲}{۳}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ANC}} = \frac{۱}{۲} SAMCN = \frac{a^۲}{۶} = \frac{۱}{۲} NC \cdot AD \;\Rightarrow\; \frac{a^۲}{۶} = \frac{۱}{۲} NC \cdot a$$

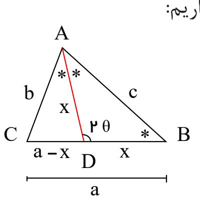
$$\Rightarrow \; NC = \frac{a}{۳}$$

به همین ترتیب: $MC = \frac{a}{۳}$

فیثاغورس : $MN = \sqrt{\frac{a^۲}{۹} + \frac{a^۲}{۹}} = \frac{\sqrt{۲}}{۳} a$

۳۲. گزینه ۲

اگر نیمساز زاویه A را رسم کنیم تا BC را در D قطع کند، آنگاه مطابق شکل دو مثلث ADB و ABC متشابهند داریم:



$$\underbrace{\frac{x}{c}}_{}^{\text{مقابل}c} = \overbrace{\frac{a-x}{b}}^{\text{مقابل}*} = \overbrace{\frac{b}{a}}^{\text{قطع سوم}} \Rightarrow x = \frac{bc}{a}$$

راه حل دوم: با توجه به رابطه‌ی نیمساز در مثلث داریم:

$$AD^۲ = AB \times AC - BD \times CD \Rightarrow x^۲ = cb - x(a-x) \Rightarrow ax = bc \Rightarrow x = \frac{bc}{a}$$

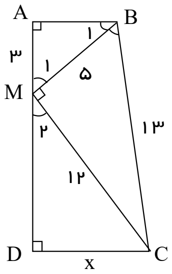
۳۳. گزینه ۲

سه مثلث موجود در شکل متشابه‌اند بنابراین داریم:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{۲}{۷} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AM}{AB} = \frac{۲}{۷} \\ \frac{CN}{AC} = \frac{۵}{۷} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SAMN = \frac{۴}{۴۹} SABC \\ SCNP = \frac{۲۵}{۴۹} SABC \end{cases}$$

$$\Rightarrow SMNPB = (۱ - \frac{۴}{۴۹} - \frac{۲۵}{۴۹}) SABC = \frac{۲۰}{۴۹} SABC \Rightarrow \frac{SMNPB}{SABC} = \frac{۲۰}{۴۹} \approx ۴۰\%$$

۳۴. گزینه ۳ نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر مجموع مجذورات اضلاع قائمه است.



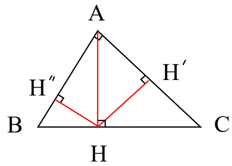
$$\overset{\Delta}{ABM}: \ MB=\sqrt{AM^{۲}+AB^{۲}}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$$\overset{\Delta}{BMC}: \ MC:\sqrt{BC^{۲}-MB^{۲}}=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=۱۲$$

$$\begin{cases} \hat{M}_{۱}+\hat{M}_{۲}=۹۰^{\circ} \\ \hat{B}_{۱}+\hat{M}_{۱}=۹۰^{\circ} \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_{۱}=\hat{M}_{۲} \Rightarrow \sin\hat{B}_{۱}=\sin\hat{M}_{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{x}{۱۲} \Rightarrow x=\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

.۳۵ گزینه ۱ هر دو مثلث کوچک‌تر با مثلث قائم‌الزاویه‌ی اصلی متشابه‌اند.

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=\frac{۹}{۱۰} \ \frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=\frac{۱}{۹}=K^{۲} \Rightarrow K=\frac{۱}{۳}$$



نسبت فاصله‌ی H از دو ضلع قائم، در واقع نسبت ارتفاع‌های این دو مثلث متشابه است و می‌دانیم در دو مثلث متشابه نسبت هر دو جزء طولی متناظر همان نسبت متشابه است.