



۲۱. گزینه ۳

$$(\vec{a} + 2\vec{i}) \parallel (\vec{a} - 2\vec{i}) \Rightarrow \vec{a} + 2\vec{i} = m(\vec{a} - 2\vec{i}) \Rightarrow (m-1)\vec{a} = (2+2m)\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(\frac{2+2m}{m-1}\right)\vec{i} = \vec{a} \parallel \vec{i} \xrightarrow{|a|=3} \begin{cases} \vec{a} = (3, 0, 0) \\ \vec{a} = (-3, 0, 0) \end{cases}$$

راه حل دیگر: بردارهای  $\vec{a} + 2\vec{i}$  و  $\vec{a} - 2\vec{i}$  بردارهای جمع و تفاضل اند بنابراین قطره‌های متوازی الاضلاع بنا شده بر  $2\vec{i}$  و  $\vec{a}$  می‌باشند که نمی‌توانند با هم موازی باشند، مگر آن که متوازی الاضلاع تشکیل نشود. یعنی  $a$  و  $2\vec{i}$  هم‌راستا باشند:

$$\vec{a} \parallel \vec{i} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{i} \xrightarrow{|a|=3} \begin{cases} \vec{a} = (3, 0, 0) \\ \vec{a} = (-3, 0, 0) \end{cases}$$

۲۲. گزینه ۱

$$\begin{cases} 2a - b = x \\ a + b = y \end{cases} \xrightarrow{+} 3a = x + y \Rightarrow |3a|^2 = |x + y|^2$$

$$\Rightarrow 9|a|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2x \cdot y \Rightarrow 9|a|^2 = |2a - b|^2 + |a + b|^2 + 2|2a - b||a + b|\cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow 9|a|^2 = (3\sqrt{2})^2 + 1^2 + 2 \times 3\sqrt{2} \times 1 \times \cos 45^\circ = 18 + 1 + 6 = 25 \Rightarrow |a|^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow |a| = \frac{5}{3}$$

۲۳. گزینه ۱ با توجه به رابطه  $(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (c \cdot b)a$  داریم:

$$a \cdot c = b \cdot c = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$a \cdot ((a \times b) \times c) = a \cdot ((a \cdot c)b - (b \cdot c)a) = a \cdot \left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{2}a \cdot b - \frac{1}{2}|a|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

۲۴. گزینه ۲

$$M(x, y, z): \begin{cases} \text{فاصله از محور } x \text{ ها} &= \sqrt{y^2 + z^2} \\ \text{فاصله از صفحه } yoz &= |x| \end{cases} \Rightarrow \sqrt{y^2 + z^2} = 2|x|$$

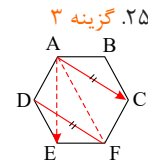
از بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی ۲ در این تساوی صدق می‌کند.

۲۵. گزینه ۳

$$\text{عبارت} = \vec{CA} + \underbrace{\vec{AE} + \vec{DA}}_{\vec{DE}} + \vec{BF}$$

$$\vec{CA} = \vec{FD}$$

$$\text{عبارت} = \underbrace{\vec{FD} + \vec{DE}}_{\vec{FE}} + \vec{BF} = \vec{BF} + \vec{FE} = \vec{BE}$$



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

نکته:

۲۶. گزینه ۲ راه حل اول: با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$\begin{cases} |\vec{ea} + \vec{eb}|^2 = |ea|^2 + |eb|^2 + 2|ea||eb|\cos 60^\circ = 1 + 1 + 1 = 3 \\ |\vec{ea} - \vec{eb}|^2 = |ea|^2 + |eb|^2 - 2|ea||eb|\cos 60^\circ = 1 + 1 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{|\vec{ea} + \vec{eb}|}{|\vec{ea} - \vec{eb}|} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

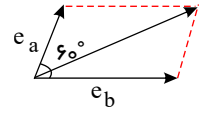
نکته: اگر  $|a| = |b|$  باشد، آن‌گاه با توجه به قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$|a-b| = 2|a| \sin \frac{\theta}{2} \quad |a+b| = 2|a| \cos \frac{\theta}{2}$$

بنابراین می توانستیم اندازه بردارهای  $ea+eb$  و  $ea-eb$  را به کمک روابط فوق نیز بدست آوریم.

$$|\vec{ea}-\vec{eb}| = 2|\vec{ea}| \sin 30^\circ = 1 \quad |\vec{ea}+\vec{eb}| = 2|\vec{ea}| \cos 30^\circ = \sqrt{3}$$

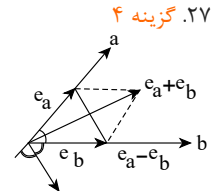
راه حل دوم: می توانیم از شکل هندسی بردارها استفاده کنیم:



$$\begin{cases} |ea+eb| = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} |ea| = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{|ea+eb|}{|ea-eb|} = \sqrt{3} \\ |ea-eb| = |ea| = 1 \end{cases}$$

$$|a\vec{b}+b\vec{a}| = |a||b| \left( \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} + \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) = |a||b|(\vec{ea}+\vec{eb})$$

$$|a\vec{b}-b\vec{a}| = |a||b| \left( \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} - \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right) = |a||b|(\vec{eb}-\vec{ea})$$



نکته:  $\vec{eb}$  و  $\vec{ea}$  بردارهای جهت  $b, a$  اند با اندازه‌ی واحد، لذا برای به دست آوردن راستای نیمسازهای داخلی و خارجی کافی است اقطار لوزی بنا شده بر  $\vec{eb}$  و  $\vec{ea}$  را به دست آوریم.

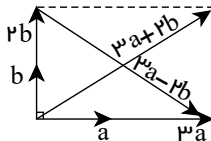
لذا  $\vec{ea}+\vec{eb}$  و  $\vec{eb}-\vec{ea}$  راستای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی بین دو بردار را نشان می‌دهند. بنابراین دو بردار مطرح شده در سؤال نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر یک زاویه‌اند که گاهی اوقات به جای استفاده از خود  $\vec{eb}+\vec{ea}$  یا  $\vec{eb}-\vec{ea}$  از مضاربی آن استفاده می‌شود.

مثلاً به جای نوشتن  $\frac{a}{|\vec{a}|} + \frac{b}{|\vec{b}|}$  می‌توان آن را در  $|\vec{a}||\vec{b}|$  ضرب کرد. بردارهای  $|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}||\vec{a}|$  و  $|\vec{a}||\vec{b}| - |\vec{b}||\vec{a}|$  نیز نشان‌دهنده‌ی راستای

نیمسازهای داخلی و خارجی یک زاویه می‌باشند.

۲۸. گزینه ۱ اگر دو بردار  $a$  و  $b$  بر هم عمود باشند، آن‌گاه بردارهای  $3a+2b$  و  $3a-2b$  هم‌اندازه خواهند بود. علت این امر آن است که این دو بردار قطرهای مستطیلی است که بر دو بردار  $3a$  و  $2a$  بنا شده است.

$$|3a+2b| = |3a-2b| \Rightarrow \sqrt{16+m^2+1} = \sqrt{4m^2+4+1} \Rightarrow 17+m^2 = 4m^2+5 \Rightarrow 3m^2 = 12 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$



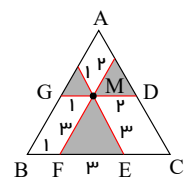
راه حل دوم: اگر  $x = 3a+2b$  و  $y = 3a-2b$  فرض شود.  $x+y$  در راستای  $a$  و  $x-y$  در راستای  $b$  است.

لذا:  $(x+y) \cdot (x-y) = 0$  پس:  $m = \pm 2$

۲۹. گزینه ۲ با امتداد پاره‌خط‌ها و با توجه به موازی بودن اضلاع با خطوط، سه مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته می‌شود.  $MDCE$  و  $GMEB$  متوازی‌الاضلاع‌اند، پس:

$$BC = 1+3+2 = 6$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 = 9\sqrt{3}$$

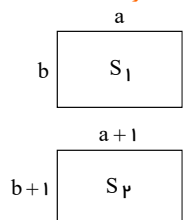


۳۰. گزینه ۲

$$S_2 - S_1 = (a+1)(b+1) - ab = 9 \Rightarrow a+b+1 = 9 \Rightarrow a+b = 8$$

$$\text{قطر} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\min(\sqrt{a^2+b^2}) = \min(\sqrt{(a+b)^2 - 2ab}) = \min(\sqrt{64 - 2ab})$$



اگر جمع دو عدد ثابت باشد  $(a+b=8)$ ، ضرب آن‌ها وقتی ماکسیمم است که با هم برابر باشند:

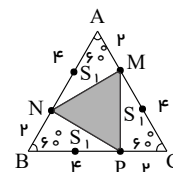
$$a = b = \frac{\lambda}{2} = 4 \quad \min(\sqrt{64 - 2ab}) = \sqrt{64 - 2 \times 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

۳۱. گزینه ۴ مساحت هر مثلث با اندازه‌ی دو ضلع  $a$  و  $b$  و زاویه‌ی بین  $\alpha$  برابر است با:  $S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$S_{MNP} = S_{ABC} - 3S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 - 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

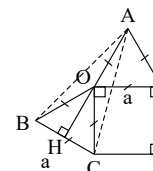
$$S_{MNP} = \frac{\sqrt{3}}{4}(MN)^2 = 3\sqrt{3} \Rightarrow MN = 2\sqrt{3}$$



۳۲. گزینه ۲ روش اول:

$$AH = AO + OH = a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = a(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}a^2(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4})a^2$$



دقت کنید زاویه‌ی  $\hat{AOH}$  برابر  $180^\circ$  است و بنابراین  $A, O, H$  در یک راستا قرار می‌گیرند.  
روش دوم: واضح است که زاویه‌ی  $O$  در مثلث  $AOB$  برابر  $150^\circ$  است بنابراین:

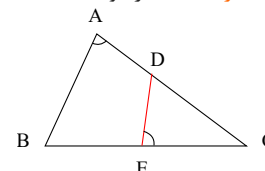
$$SAOB = SAOC = \frac{1}{2}(a)(a) \sin 150^\circ = \frac{a^2}{4}$$

$$SOBC = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$S_{ABC} = 2(\frac{a^2}{4}) + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{\text{مربع}}} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{a^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

۳۳. گزینه ۲ در دو مثلث  $ABC$  و  $CDE$  داریم:

$$\hat{A} = \hat{E}, \quad \hat{C} = \hat{C}$$



بنابراین دو مثلث  $ABC$  و  $CDE$  بنا به حالت دو زاویه متشابه‌اند. حال تناسب اضلاع آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{CE}{AC}$$

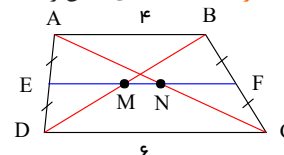
۳۴. گزینه ۴

دو مثلث  $AMN$  و  $ABC$  متشابه‌اند زیرا  $MN \parallel BC$  می‌باشد. اگر نسبت تشابه آنها باشد، داریم:

$$\frac{SMNCB}{S_{ABC}} = \frac{64}{100} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{36}{100} \Rightarrow k^2 = \frac{36}{100} \Rightarrow k = \frac{AM}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{3}{2}$$

۳۵. گزینه ۱ قضیه‌ی تالس را یک‌بار در مثلث  $ABC$  و یک‌بار در مثلث  $BDC$  می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \triangle ABC: \frac{NF}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow NF = \frac{AB}{2} = 2 \\ \triangle BDC: \frac{MF}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow MF = \frac{DC}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow MN = MF - NF = 3 - 2 = 1$$



روش دوم: نکته: بطور کلی اگر وسط‌های ۲ ساق دوزنقه را به هم وصل کنیم، خط میانگین دوزنقه به دست می‌آید و داریم:

$$\begin{cases} MN = \frac{AB + DC}{2} \\ M'N' = \frac{|AB - DC|}{2} \end{cases}$$

بنابراین:  $MN = \frac{6 - 4}{2} = 1$

