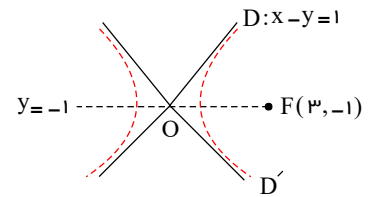




۴۱. گزینه ۲ چون هذلولی افقی است، مطابق شکل باید خط D را با خط $y = -1$ قطع دهیم تا مرکز هذلولی به دست آید:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{مرکز هذلولی: } O(0, -1)$$



چون شیب مجانب‌ها در هذلولی قرینه‌ی یکدیگرند و شیب خط D برابر ۱ است، پس باید شیب خط D' (مجانب دوم) برابر -1 باشد.

$$\begin{cases} O(0, -1) \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow D': y + 1 = -x \Rightarrow x + y + 1 = 0$$

۴۲. گزینه ۱ نکته: برای تعیین معادله قرینه یک خط نسبت به یک محور یا یکی از صفات سه‌گانه دقیقاً شبیه همان چیزی که در فصل بردار دیدیم عمل می‌کنیم.

در واقع برای قرینه کردن نسبت به محور y ها باید x و z در معادله‌ی خط قرینه شوند. پس معادله‌ی قرینه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} -x - 2z = -3 \\ y - z = ab \end{cases}$$

حال باید نقطه‌ی $A(b, 1, 2)$ در معادله این خط صدق کند:

$$\begin{cases} -b + 2(-2) = -3 \Rightarrow b = -1 \\ 1 + (-2) = ab = a(-1) \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

۴۳. گزینه ۱ می‌دانیم اگر $a + b + c = 0$ آنگاه $a \times b = b \times c = c \times a$ حال از این نکته داریم:

$$a - 2b + c = 0 \Rightarrow a \times (-2b) = (-2b) \times c = c \times a \Rightarrow -2a \times b = -2b \times c = c \times a$$

$$a \times b + b \times c - a \times c = b \times c + b \times c - 2b \times c = 0$$

۴۴. گزینه ۳

$$a = (2, -2, 1) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{1}{3}$$

چون $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ و $\cos \alpha = -\cos \beta$ پس $\alpha + \beta = \pi$ و داریم:

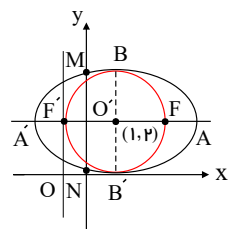
$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos(\pi + \gamma) = -\cos \gamma = -\frac{1}{3}$$

۴۵. گزینه ۳ مرکز بیضی O' است، پس خواهیم داشت:

$$2c = FF' \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$



معادله بیضی $1 = \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4}$ و به ازای $x = 0$ داریم:

$$\frac{1}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \Rightarrow (y-2)^2 = \frac{14}{4} \Rightarrow y = 2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$MN = \left(2 + \frac{\sqrt{14}}{2}\right) - \left(2 - \frac{\sqrt{14}}{2}\right) = \sqrt{14}$$

۴۶. گزینه ۴ نکته: مجانب های هذلولی $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ عبارتند از: $\frac{y-\beta}{b} = \pm \frac{x-\alpha}{a}$

نکته: مجانب های هذلولی در مرکز هذلولی متقاطع هستند.
 مطابق شکل اگر خط $y = 2x + 3$ را با خط $y = 1$ قطع دهیم، مختصات مرکز هذلولی به دست می آید:

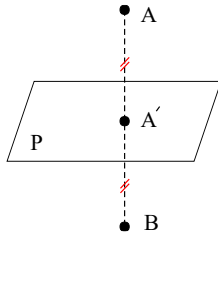
$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow O(-1, 1)$$

 چون شیب مجانب اول برابر ۲ است، پس شیب مجانب دوم برابر -۲ است. با شیب -۲ و نقطه $O(-1, 1)$ معادله ی مجانب دوم را می نویسیم:

$$y - 1 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 1$$

۴۷. گزینه ۴

با توجه به شکل در واقع باید قرینه نقطه A را نسبت به صفحه P بیابیم تا مختصات نقطه B حاصل شود.
 بدین منظور ابتدا معادله خط گذرنده از A و عمود بر صفحه P را می نویسیم:



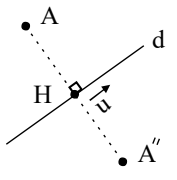
$$L: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-3}$$

$$\Rightarrow L: \begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t+1 \\ z = -3t-1 \end{cases} \Rightarrow A'(t+2, 2t+1, -3t-1)$$

$$P \text{ صفحه ی } P \Rightarrow t+2+4t+2+9t+3+7=0 \Rightarrow 14t = -14 \rightarrow t = -1 \Rightarrow A'(1, -1, 2)$$

$$\Rightarrow B = 2A' - A = (2, -2, 4) - (2, 1, -1) = (0, -3, 5)$$

۴۸. گزینه ۱



$$d \begin{cases} 2y = -3z - 3 = t \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{t}{2} \\ z = \frac{t+3}{-3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(2, \frac{t}{2}, \frac{t+3}{-3}) \Rightarrow \overline{AH} = (3, \frac{t}{2}, \frac{t+6}{-3})$$

$$u = 0 \Rightarrow (3, \frac{t}{2}, \frac{t+6}{-3}) \cdot (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow \frac{t}{4} + \frac{t+6}{9} = 0 \Rightarrow 13t + 24 = 0 \Rightarrow t = -\frac{24}{13} \Rightarrow H = (2, -\frac{12}{13}, \frac{-5}{13})$$

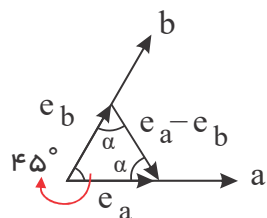
$$A'' = 2H - A = (4, \frac{-24}{13}, \frac{-10}{13}) - (-1, 0, 1) = (5, \frac{-24}{13}, \frac{-23}{13})$$

۴۹. گزینه ۳

$$|a| = 2|b| = 4 \rightarrow \begin{cases} |a| = 4 \\ |b| = 2 \end{cases}$$

$$a \cdot b = 4\sqrt{2} \Rightarrow |a||b| \cos \theta = 4\sqrt{2} \Rightarrow 8 \cos \theta = 4\sqrt{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

مطابق شکل چون $|e_a| = |e_b|$ پس مثلث درون شکل متساوی الساقین است.



$$\alpha = \frac{180 - 45}{2} = 67.5 \text{ پس}$$

چون انتهای بردار e_b بر ابتدای بردار $e_a - e_b$ منطبق است.

پس زاویه ی واقعی بین بردارهای $\vec{e_b}$ و $\vec{e_a} - \vec{e_b}$ برابر $180 - 67.5 = 112.5$ است.

تذکره: اگر ابتدای یک بردار منطبق بر انتهای بردار دیگر باشد مکمل زاویه ی بین آنها زاویه ی واقعی بین دو بردار است.

۵۰. گزینه ۲ نکته: حجم هرم از دستور (ارتفاع \times مساحت قاعده) $\times \frac{1}{3}$ بدست می آید.

در این تست قاعده، متوازی الاضلاع ساخته شده روی بردارهای c و b می باشد پس:

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{3} |a \cdot (b \times c)|$$

$$b \times c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1, 2, 0)$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} |a \cdot (b \times c)| = \frac{1}{3} |(0, 1, 1) \cdot (-1, 2, 0)| = \frac{2}{3}$$