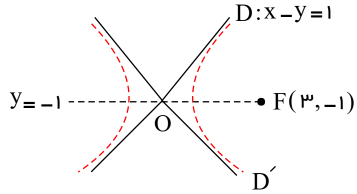
۴۱. گزینه ۲   چون هذلولی افقی است، مطابق شکل باید خط D را با خط $y=-1$ قطع دهیم تا مرکز هذلولی به دست آید:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow x=0 \Rightarrow \textbf{مرکز هذلولی}: O(0\,,\,-1)$$



چون شیب مجانب‌ها در هذلولی قرینه‌ی یکدیگرند و شیب خط D برابر ۱ است، پس باید شیب خط D' (مجانب دوم) برابر ۱− باشد.

$$\begin{cases} O(0\,,\,-1) \\ m=-1 \end{cases} \Rightarrow D': y+1=-x \Rightarrow x+y+1=0$$

۴۲. گزینه ۳   راه حل اول: این دو خط موازی نیستند، چون بردارهای هادی موازی ندارند.

$$u_D=(1\,,\,0\,,\,0) \qquad u_{D'}=(1\,,\,1\,,\,1)$$

لذا کافی است متقاطع نباشند تا متنافر شوند. برای بررسی تقاطع دو خط نقطه‌ای دلخواه به‌صورت پارامتری روی خط D در نظر می‌گیریم مثلاً: $P_0\,(t\,,\,2\,,\,a)$ (برای به دست آوردن نقطه‌ی پارامتری، کافی است معادله‌ی متقارن خط را برابر t قرار دهیم.) و مختصات P را در معادله‌ی D' قرار دهیم:

$$t=2=a+2$$

برای تقاطع دو خط باید t به دست آورده از هر ۲ تساوی یکسان باشد. در این‌جا چون دو تا از پارامترهای خط ثابتند. لذا تنها یک t به دست می‌آید که باید تساوی سوم هم برقرار باشد، پس باید:

$$a+2=2 \Rightarrow a=0$$

حال اگر $a\neq 0$ باشد، دو خط متنافر می‌شوند.

راه حل دوم: بردارهای هادی دو خط را حساب کرده و دیدیم که موازی نیستند. پس باید متقاطع نباشند. اگر متقاطع باشند، y در هر دو خط باید ۲ باشد. $y=2$ را در معادله‌ی دوم جایگذاری می‌کنیم:

$$x=2=z+2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$$

این نقطه باید در خط اول صدق کند تا دو خط متقاطع باشند. در نتیجه $a=0$ ، پس برای تنافر دو خط a باید مخالف صفر باشد.

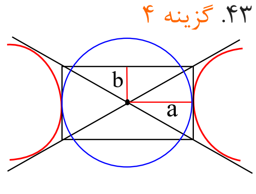
راه حل سوم: $A\in D$ و $B\in D'$ در نظر می‌گیریم. اگر دو خط متنافر باشند $AB\cdot(u_D\times u_{D'})$ غیر صفر می‌شود:

$$A=(0\,,\,2\,,\,a)\ ,\ B=(0\,,\,0\,,\,-2)\ ,\ u_D=(1\,,\,0\,,\,0)\ ,\ u_{D'}=(1\,,\,1\,,\,1)$$

$$AB\cdot(u_D\times u_{D'})=\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2-a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2+(-2-a)\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$$

در حالت کلی راه مستقیم کنترل تنافر دو خط این است.

۴۳. گزینه ۴



$$\text{دایره}: O\left|\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right. \qquad R=2$$

$$4x^2-9y^2-8x-18y=5+k$$

$$f'_x=0 \to 8x-8=0 \to x=1=\alpha$$

$$f'_y=0 \to -18y-18=0 \to y=-1=\beta$$

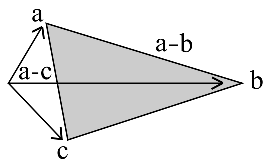
معادله استاندارد هذلولی: $4(x-1)^2-9(y+1)^2=5+k+4-9=k \xrightarrow{\div k} \dfrac{(x-1)^2}{\frac{k}{4}}-\dfrac{(y+1)^2}{\frac{k}{9}}=1$

چون طبق فرض k مثبت است، هذلولی افقی است.

دایره و هذلولی هم مرکز هستند، پس اگر بخواهند بر هم مماس شوند، باید شعاع دایره با a هذلولی برابر باشد:

$$a^{۲}=\frac{k}{۴}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{k}}{۲}\Rightarrow\frac{\sqrt{k}}{۲}=۲\xrightarrow{k>۰}k=۱۶$$

۴۴. گزینه ۴ مطابق شکل داده شده مثلث هاشورخورده با اضلاع $a-b$ و $a-c$ می‌باشد پس مساحت آن برابر است با:



$$S=\frac{۱}{۲}|(a-b)\times(a-c)|$$

$$a-b=(۰,۱,۱)-(۴,۵,-۳)=(-۴,-۴,۴)$$

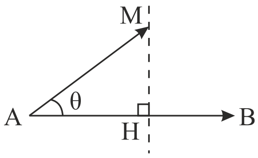
$$a-c=(۰,۱,۱)-(۲,۵,۱)=(-۲,-۴,۰)$$

$$(a-b)\times(a-c)=(۱۶,-۸,۸)$$

$$S=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶^{۲}+(-۸)^{۲}+۸^{۲}}=\frac{۸}{۲}\sqrt{۴+۱+۱}=۴\sqrt{۶}$$

۴۵. گزینه ۳

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=۵\Rightarrow|AM|\,|AB|\cos\theta=۵\xrightarrow{|AM|\cos\theta=|AH|}|AH|\,|AB|=۵\Rightarrow|AH|=\frac{۵}{|AB|}=\text{ثابت}$$

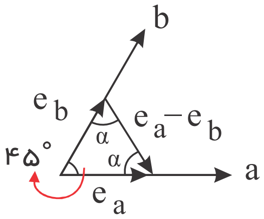


یعنی M نقاطی میتواند باشد که اندازه تصویر $\overrightarrow{AM}$ روی $\overrightarrow{AB}$ مقدار ثابتی باشد پس مکان هندسی M خطی عمود بر AB می باشد .

۴۶. گزینه ۳

$$|a|=۲\,|b|=۴\rightarrow\begin{cases}|a|=۴\\|b|=۲\end{cases}$$

$$a\cdot b=۴\sqrt{۲}\Rightarrow|a|\,|b|\cos\theta=۴\sqrt{۲}\Rightarrow ۸\cos\theta=۴\sqrt{۲}\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\theta=۴۵^{\circ}$$



مطابق شکل چون $|eb|=|ea|$ پس مثلث درون شکل متساوی‌الساقین است.

پس $\alpha=\dfrac{۱۸۰-۴۵}{۲}=۶۷/۵$

چون انتهای بردار eb بر ابتدای بردار $ea-eb$ منطبق است.

پس زاویه‌ی واقعی بین بردارهای $\overrightarrow{ea}-\overrightarrow{eb}$ و $\overrightarrow{eb}$ برابر $۱۸۰-۶۷/۵=۱۱۲/۵$ است.

تذکر: اگر ابتدای یک بردار منطبق بر انتهای بردار دیگر باشد مکمل زاویه‌ی بین آنها زاویه‌ی واقعی بین دو بردار است.

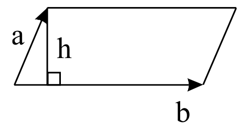
۴۷. گزینه ۳

نکته: اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردار دلخواه در فضا باشند آنگاه مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده روی بردارهای $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ برابر $|a\times b|$ می‌باشد.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}&=(۱,۲,-۱)\\\overrightarrow{b}&=(\alpha,-\alpha,۲\alpha)\end{aligned}\Rightarrow a\times b=\begin{pmatrix}۱&۲&-۱\\\alpha&-\alpha&۲\alpha\end{pmatrix}=(۳\alpha-۳\alpha,-۳\alpha)$$

$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=|a\times b|\xlongequal{\text{طبق فرض}}۹\sqrt{۳}\Rightarrow\sqrt{۹\alpha^{۲}+۹\alpha^{۲}+۹\alpha^{۲}}=۹\sqrt{۳}\Rightarrow ۲۷\alpha^{۲}=۸۱\times۳\xrightarrow{\alpha>۰}\alpha=۳\Rightarrow b=(۳,-۳,۶)$$

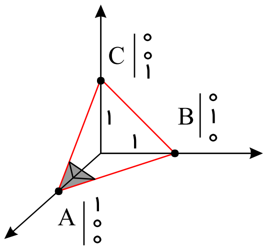
از طرفی مساحت متوازی‌الاضلاع از دستور طول قاعده $\times$ ارتفاع بدست می‌آید قاعده را بردار $\overrightarrow{b}$ می‌نامیم پس:



$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=|b|\times h\Rightarrow ۹\sqrt{۳}=\underbrace{\left(\sqrt{۹+۹+۳۶}\right)}_{|b|}\times h$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}۸۱\times۳=۵۴\times h\Rightarrow h=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۸. گزینه ۴ در صفحه به معادله‌ی $x+y+z=۱$ نقاط برخورد با محورهای ox، oy و oz به‌ترتیب $(۱,۰,۰)$ و $(۰,۱,۰)$ و $(۰,۰,۱)$ می‌باشد. مساحت ناحیه‌ی موردنظر باتوجه به قضیه‌ی تالس یک چهارم مساحت محدود به صفحه‌ی $x+y+z=۱$ است.



$$\text{جواب}=\frac{۱}{۴}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times\left(\sqrt{۲}\right)^{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۸}$$

۴۹. گزینه ۲

تذکر: قدر مطلق تفاضل هر نقطه از محیط هذلولی تا دو کانون مقدار ثابت $۲a$ می‌باشد:

$$۸x^{۲}-y^{۲}+۴y=۱۲\Rightarrow\ ۸x^{۲}-(y-۲)^{۲}\xlongequal{y=۰}۱۲-۴=۸$$

$$(f'_y=۰\Rightarrow -۲y+۴=۰\Rightarrow y=۲)$$

$$\xrightarrow{\div ۸}\frac{x^{۲}}{۱}-\frac{(y-۲)^{۲}}{۸}=۱\Rightarrow\begin{cases}a^{۲}=۱\ \Rightarrow a=۱\\ b^{۲}=۸\Rightarrow b=۲\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}=۱+۸=۹\Rightarrow c=۳\Rightarrow |FF'|=۲c=۶$$

$$\text{طبق فرض}\xrightarrow{PF=FF'}PF=۲c=۶$$

$$|PF-PF'|=۲a\Rightarrow |۶-PF'|=۲\Rightarrow PF'=۸\qquad \text{یا}\ PF'=۴$$

$$PFF'\ \text{محیط مثلث}=PF+PF'+FF'\rightarrow\ \text{حداکثر مقدار محیط}=۶+۸+۶=۲۰$$

۵۰. گزینه ۴ این خط از مبدأ گذشته و بردار هادی آن بردار $u(۰,۱,۱)$ می‌تواند باشد پس:

$$o(۰,۰,۰)\in\Delta\Rightarrow\Delta:\frac{x}{۰}=\frac{y}{۱}=\frac{z}{۱}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=۰\\ y=z\end{cases}$$

$$P_{۰}(۰,۰,۰)\in\Delta\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{P_{۰}P}=(۲,m,۱)\\ u=(۰,۱,۱)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{P_{۰}P}\times u=(m-۱,-۲,۲)$$

$$\Rightarrow \Delta\ \text{از}\ P\ \text{فاصلهٔ}=\frac{\left|\overrightarrow{P_{۰}P}\times u\right|}{|u|}=۲\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\sqrt{(m-۱)^{۲}+۴+۴}}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow (m-۱)^{۲}+۸=۲۴\Rightarrow (m-۱)^{۲}=۱۶\Rightarrow m-۱=\pm۴\xrightarrow{m>۰}m=۵$$