



۲۱. گزینه ۳ ابتدا محل برخورد L_1 و L_2 را به دست می آوریم: برای این کار خط L_1 را پارامتری کرده و مختصات نقطه برخورد دو خط بر حسب t تعیین و آنرا در L_2 صدق می دهیم.

$$L_1 : \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -t + 5 \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow A = (2t - 2, -t + 5, 2t) \text{ نقطه برخورد}$$

$$\xrightarrow{\text{را در } L_2 \text{ صدق می دهیم}} \frac{2t - 2 + 6}{-4} = \frac{-t + 5 - 7}{2} = \frac{2t - 12}{4} \Rightarrow t = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ نقطه برخورد}$$

حال اگر v_1 و v_2 به ترتیب بردارهای هادی دو خط L_1 و L_2 باشند، آنگاه بردار نیمساز بین دو بردار v_1 و v_2 در راستای $ev_1 + ev_2$ قرار دارد.

$$ev_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right), \quad ev_2 = \left(\frac{-4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{4}{6} \right)$$

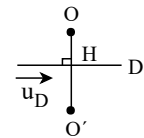
$$ev_1 + ev_2 = (0, 0, \frac{4}{3}) = UD$$

$$A = (2, 3, 4) \in D \Rightarrow D : \frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-4}{\frac{4}{3}} \Rightarrow D : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

پس خط $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ که موازی محور z ها است همان خط مطلوب است.

۲۲. گزینه ۳ نقطه متغیر $(3, 2t - 1, 3 - t)$ را روی خط $D : (x = 3, y = 2t - 1, z = 3 - t)$ در نظر می گیریم. در این صورت $u_D = (0, 2, -1)$ برای یافتن مختصات H کافی است معادله برداری زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{UD} &= 0 \Rightarrow (3, 2t - 1, 3 - t) \cdot (0, 2, -1) = 0 \\ \Rightarrow 4t - 2 - 3 + t &= 0 \Rightarrow t = 1 \end{aligned}$$



پس $H = (3, 1, 2)$ و داریم:

$$O' = 2H - O = (6, 2, 4) - (0, 0, 0) = (6, 2, 4)$$

جمع مختصات این نقطه برابر ۱۲ است.

۲۳. گزینه ۳ اگر خط L با محورهای x, y, z به ترتیب زاویه های α و β و γ بسازد، آنگاه بردار $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ موازی خط L می باشد.

پس داریم:

$$u_{L_1} = (1, 1, 0), \quad u_L = (\cos \alpha, \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \gamma)$$

$$L \perp L_1 \Rightarrow u_L \perp u_{L_1} \Rightarrow u_L \cdot u_{L_1} = 0 \Rightarrow \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos^2 \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \gamma = 45^\circ \\ \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \gamma = 135^\circ \end{cases}$$

۲۴. گزینه ۲ دو خط L و L' به ترتیب با بردارهای $u = (1, 1, 1)$ و $u' = (0, 1, 2)$ مفروضند، خط مورد نظر با بردار $u' \times u$ موازی است. بنابراین:

$$u'' = u \times u' = (1, 1, 1) \times (0, 1, 2) = (1, -2, 1) \Rightarrow \text{معادلات متقارن خط مورد نظر} \quad x = \frac{y}{-2} = z$$

$$0 \in L''$$

در بین گزینه‌ها، تنها مختصات نقطه‌ی گزینه‌ی «۲» در معادلات این خط صدق می‌کند.

۲۵. گزینه ۴ بردارهای $u = (1, 1, 1)$ و $u' = (2, 3, 1)$ دو خط:

چون نسبت‌های هر دو مؤلفه متناظر دو بردار مساوی نیستند، دو خط موازی نمی‌باشند و چون حاصل ضرب داخلی دو بردار صفر نیست، دو خط بر هم عمود نیستند. بنابراین، باید تعیین کنیم که دو خط متقاطع هستند یا متناظر. معادلات یکی از دو خط، مثلاً خط D ، را پارامتری می‌کنیم.

$$D: M = (x = \frac{2t-1}{2}, y = t-2, z = t)$$

مختصات پارامتری این نقطه را در معادلات خط D' قرار می‌دهیم:

$$D' \Rightarrow \frac{t+1}{2} = \frac{t+2}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} \frac{t+1}{2} = t \Rightarrow t = 1 \\ \frac{t+2}{3} = t \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

چون دو معادله جواب مشترک $t = 1$ دارند، دو خط متقاطع اند و نقطه تلاقی:

$$t = 1 \Rightarrow M(\frac{1}{2}, -1, 1)$$

۲۶. گزینه ۴ ابتدا معادله خط گذرا از B, A را می‌نویسیم.

$$u_{d'} = AB = (m-4, 2, -4)$$

$$A \in d' \Rightarrow d': \frac{x-3}{m-4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-4}$$

حالا خط d را پارامتری می‌کنیم مختصات A بر حسب t روی d در d' صدق می‌کند.

$$d: \begin{cases} x = 2t-2 \\ y = 3t+2 \Rightarrow A(2t-2, 3t+2, t-5) \\ z = t-5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در } A \text{ صدق می‌کند}} d': \frac{2t-5}{m-4} = \frac{3t}{2} = \frac{t-7}{-4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2t-5}{m-4} = \frac{3t}{2} \xrightarrow{t=1} m = 2 \\ \frac{3t}{2} = \frac{t-7}{-4} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

۲۷. گزینه ۱

$$L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2} = t \Rightarrow L: \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -t+2 \\ z = 2t \end{cases}$$

معادلات پارامتری خط L را در معادلات متقارن خط L' جایگزین می‌کنیم.

$$L': \frac{(2t-1)-3}{1} = \frac{(-t+2)+a}{2} = -(2t)$$

باتوجه به معادلات بالا، باید جواب‌های حاصل از دو معادله‌ی $\frac{(-t+2)+a}{2} = -2t$ و $\frac{(2t-1)-3}{1} = -2t$ باهم برابر باشند.

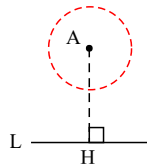
$$\begin{cases} \frac{(2t-1)-3}{1} = -2t \Rightarrow 2t-4 = -2t \Rightarrow 4t = 4 \Rightarrow t = 1 \\ \frac{(-t+2)+a}{2} = -2t \xrightarrow{t=1} \frac{1+a}{2} = -2 \Rightarrow 1+a = -4 \Rightarrow a = -5 \end{cases}$$

۲۸. گزینه ۳ خط شامل $A = (-1, 2, 3)$ و $B = (1+m, 0, 2)$ موازی $\overrightarrow{BA}$ است و خط شامل B و $C = (m, -2, 1)$ موازی $\overrightarrow{BC}$ ، در نتیجه باید داشته باشیم $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ داریم:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (-2-m, 2, 1) \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -(-2-m) + (-2) \times 2 + (-1) \times 1 = 2+m-5 = m-3 \\ \overrightarrow{BC} = (-1, -2, -1) \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow m-3=0 \Rightarrow m=3$$

۲۹. گزینه ۱



مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ هستند یک کره به مرکز A و به شعاع ۳ است. محل تلاقی این کره و خط L خاصیت مسأله را داراست. باید فاصله‌ی A را از خط مفروض بیابیم. نقطه‌ی $B = (1, -1, 0)$ روی خط L واقع و بردار $u = (1, 2, 2)$ موازی با آن است.

$$L \text{ از خط } A \text{ فاصله } AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \times u|}{|u|} = \frac{|(0, -3, 3) \times (1, 2, 2)|}{|(1, 2, 2)|} = \frac{|(-12, 3, 3)|}{3} = 3\sqrt{2}$$

چون فاصله‌ی A از خط L بیش از ۳ واحد است. پس کره و خط همدیگر را قطع نمیکنند و در نتیجه نقطه‌ای با شرایط مذکور وجود ندارد.

۳۰. گزینه ۲

$$d' : \begin{cases} x = 2y - 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2} \\ z = 3y - 1 \Rightarrow y = \frac{z+1}{3} \end{cases} \Rightarrow d' : \frac{x+1}{2} = y = \frac{z+1}{3}$$

بردارهای هادی دو خط عبارتند از $u = (1, -1, 3)$ و $u' = (2, 1, 3)$ همچنین دو نقطه‌ی $M = (2, -2, 0)$ و $N = (-1, 0, -2)$ را به ترتیب روی دو خط انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= (-3, 2, -2) \\ u \times u' &= (-6, 3, 3) \xrightarrow{\div 3} (-2, 1, 1) \\ L \text{ طول عمود مشترک} &= \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot (u \times u')|}{|u \times u'|} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

۳۱. نکته: برای تعیین معادله قرینه یک خط نسبت به یک محور یا یکی از صفات سه گانه دقیقاً شبیه همان چیزی که در فصل بردار دیدیم عمل می‌کنیم.

در واقع برای قرینه کردن نسبت به محور y ها باید x و z در معادله‌ی خط قرینه شوند. پس معادله‌ی قرینه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} -x - 2z = -3 \\ y - z = ab \end{cases}$$

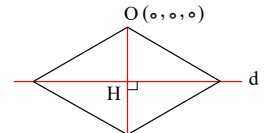
حال باید نقطه‌ی $A(b, 1, 2)$ در معادله این خط صدق کند:

$$\begin{cases} -b + 2(-2) = -3 \Rightarrow b = -1 \\ 1 + (-2) = ab = a(-1) \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

۳۲. گزینه ۱ چون اقطار لوزی عمود منصف یکدیگرند، لذا برای یافتن مرکز لوزی که محل تلاقی اقطار است. باید تصویر نقطه‌ی O را بر خط

داده شده بیابیم. برای این منظور ابتدا نقطه‌ای شناور (پارامتری) روی خط در نظر می‌گیریم:

$$d : \frac{x-1}{2} = y+3 = \frac{z+4}{2} = t \Rightarrow H(2t+1, t-3, 2t-4) \in d$$



حال شرط تعامد پاره‌خط OH بر خط داده شده را کنترل می‌کنیم، تا تصویر نقطه به دست آید:

$$OH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{OH} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 4t+2+t-3+4t-8=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow H(3, -2, -2)$$

پای عمود در واقع همان مرکز لوزی است.

۳۳. گزینه ۳ اگر بردار $a = (a_1, a_2, a_3)$ با محورهای x, y, z به ترتیب زوایای α, β, γ تشکیل دهد، آن‌گاه:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|a|}, \cos \beta = \frac{a_2}{|a|}, \cos \gamma = \frac{a_3}{|a|}$$

$$\beta = \gamma \Rightarrow \cos \beta = \cos \gamma \Rightarrow \frac{a_2}{|a|} = \frac{a_3}{|a|} \Rightarrow a_2 = a_3 \Rightarrow \text{بردار هادی خط } u(\alpha, \beta, \beta)$$

$$u \cdot u' = 0 \Rightarrow (\alpha, \beta, \beta) \cdot (2, -1, 1) = 0 \Rightarrow 2\alpha - \beta + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

پس بردار هادی خط $u(0, 1, 1)$ یا $u(0, \beta, \beta)$ است:

$$\text{معادله‌ی خط: } x = 1, \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow x = 1, y = z - 3$$

۳۴. گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} A(1, -1, 2) \xrightarrow[\text{به } yoz]{\text{قرینه نسبت}} A'(-1, -1, 2) \\ B(0, 2, 1) \xrightarrow[\text{به } xoy]{\text{قرینه نسبت}} B'(0, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (1, 3, -3) = \overrightarrow{u_d} \xrightarrow{B' \in d} d: \frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-3}$$

نکات:

(۱) معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $A = (x_0, y_0, z_0)$ و موازی بردار $u = (a, b, c)$ عبارت است از:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

(۲) برای به دست آوردن معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی A و B ، پیکان $\overrightarrow{AB}$ را به عنوان بردار هادی خط در نظر می‌گیریم.

(۳) نمایش معادله‌ی خط منحصر به فرد نیست. اگر معادله‌ی خط را با نقطه‌ی دیگری بنویسیم، یا بردار هادی خط را در عددی ضرب کنیم، نمایش جدیدی از معادله‌ی خط به وجود می‌آید.

۳۵. گزینه ۳ ابتدا هادی دو خط را به دست می‌آوریم (برای این منظور ضرایب متغیرها را در صورت کسر یک می‌کنیم. سپس مخرج کسر را به عنوان هادی در نظر می‌گیریم).

$$D: x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow u_D = (1, 2, -1)$$

در معادله D' برای بدست آوردن معادله متقارن مولفه y را در هر معادله تنها می‌کنیم:

$$D': \begin{cases} y = 1-x \\ y = 2+z \end{cases} \Rightarrow D': \frac{x-1}{-1} = y = 2+z \Rightarrow u_{D'} = (-1, 1, 1)$$

چون خط مطلوب بر هر دو خط عمود است، لذا هادی خط مطلوب بر هادی هر دو خط عمود است:

$$u_{D''} = u_D \times u_{D'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3i + 3k \quad \text{یا} \quad u_{D''} = (1, 0, 1)$$

دقت کنید که هر ضربی از هادی خط را می‌توان به عنوان هادی خط در نظر گرفت.

$$A(1, 0, -2) \in D'' \Rightarrow D'': \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z+2}{1}$$

$$\Rightarrow D'': \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{z+2}{1} \\ y=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{برخورد با محور } (x)]{y=z=0} \frac{x-1}{1} = 2 \Rightarrow x = 3$$

نکته) اگر معادله پارامتری خط داده شود، همان ضرایب t در واقع مؤلفه‌های هادی خط است.

۳۶. گزینه ۴

$$\begin{aligned} AC = AD &\Rightarrow \hat{ACD} = \hat{ADC} \Rightarrow \hat{ACB} = \hat{CDE} \Rightarrow \angle BCA \cong \angle CDE \Rightarrow \hat{E} = \hat{BAC} \\ &\Rightarrow \hat{B} + \hat{E} = \hat{B} + \hat{BAC} = \hat{ACD} = \frac{180^\circ - 28^\circ}{2} = 76^\circ \end{aligned}$$

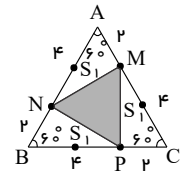
توجه: زاویه $\hat{ACD}$ زاویه خارجی مثلث $\hat{ACB}$ است:

$$(\hat{B} + \hat{BAC} = \hat{ACD})$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$S_{MNP} = S_{ABC} - 3S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 - 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$S_{MNP} = \frac{\sqrt{3}}{4} (MN)^2 = 3\sqrt{3} \Rightarrow MN = 2\sqrt{3}$$

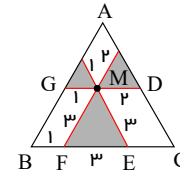


۴۴. گزینه ۲ با امتداد پاره خطها و با توجه به موازی بودن اضلاع با خطوط، سه مثلث متساوی الاضلاع ساخته می شود. $MDC E$ و

$GMFB$ متوازی الاضلاع اند، پس:

$$\text{ضلع } BC = 1 + 3 + 2 = 6$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 = 9\sqrt{3}$$

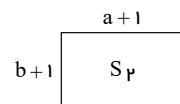
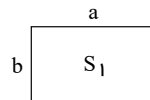


۴۵. گزینه ۲

$$S_2 - S_1 = (a+1)(b+1) - ab = 9 \Rightarrow a+b+1 = 9 \Rightarrow a+b = 8$$

$$\text{قطر} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\min(\sqrt{a^2 + b^2}) = \min(\sqrt{(a+b)^2 - 2ab}) = \min(\sqrt{64 - 2ab})$$

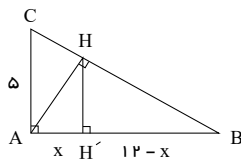


اگر جمع دو عدد ثابت باشد $(a+b=8)$ ، ضرب آنها وقتی ماکسیمم است که با هم برابر باشند:

$$a = b = \frac{8}{2} = 4 \quad \min(\sqrt{64 - 2ab}) = \sqrt{64 - 2 \times 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

۴۶. گزینه ۱

$$HH' \parallel AC \Rightarrow \frac{12-x}{x} = \frac{BH}{CH}$$



چون $AB = 12$ و $AC = 5$ پس $BC = 13$ (پیتاغورس)
با توجه به تشابه مثلثهای ABH و ACH با مثلث ABC داریم:

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow 5^2 = CH \times 13 \Rightarrow CH = \frac{25}{13}$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 12^2 = BH \times 13 \Rightarrow BH = \frac{144}{13}$$

$$HH' \parallel AC \Rightarrow \frac{BH'}{AH'} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow \frac{12-x}{x} = \frac{\frac{144}{13}}{\frac{25}{13}} = \frac{144}{25} \Rightarrow \frac{12}{x} = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25} \Rightarrow x = \frac{300}{169}$$

روش دوم: می دانیم ارتفاع وارد بر وتر است:

$$AH = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$$

$$AHB: AH^2 = AB \cdot AH' \rightarrow \left(\frac{60}{13}\right)^2 = 12x \rightarrow x = \frac{300}{169}$$

۴۷. گزینه ۲

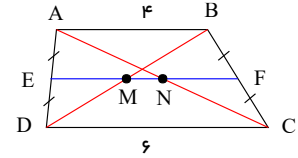
سه مثلث موجود در شکل متشابه اند بنابراین داریم:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{2}{7} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AM}{AB} = \frac{2}{7} \\ \frac{CN}{AC} = \frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{AMN} = \frac{4}{49} S_{ABC} \\ S_{CNP} = \frac{25}{49} S_{ABC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{MNPB} = (1 - \frac{4}{49} - \frac{25}{49}) S_{ABC} = \frac{20}{49} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{MNPB}}{S_{ABC}} = \frac{20}{49} \approx 40\%$$

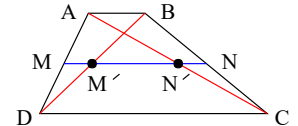
۴۸. گزینه ۱ قضیه‌ی تالس را یک بار در مثلث ABC و یک بار در مثلث BDC می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \triangle ABC: \frac{NF}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow NF = \frac{AB}{2} = 2 \\ \triangle BDC: \frac{MF}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow MF = \frac{DC}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow MN = MF - NF = 3 - 2 = 1$$



روش دوم: نکته: بطور کلی اگر وسط‌های ۲ ساق دوزنقه را به هم وصل کنیم، خط میانگین دوزنقه به دست می‌آید و داریم:

$$\begin{cases} MN = \frac{AB+DC}{2} \\ M'N' = \frac{|AB-DC|}{2} \end{cases}$$

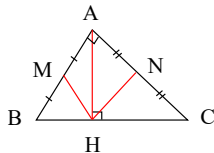


بنابراین: $MN = \frac{6-4}{2} = 1$

۴۹. گزینه ۳

دو مثلث AHB و AHC متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$ است. پس نسبت میانه‌های HN و

HM نیز $\frac{2}{3}$ است.



۵۰. گزینه ۳ محیط مثلث اول $3 + 4 + 6 = 13$ است، نسبت تشابه هم $\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{4}$ یا $\frac{1}{6}$ است. پس محیط دومی $\frac{13}{3}$ یا $\frac{13}{4}$ یا $\frac{13}{6}$

است و $x+y$ برابر $\frac{10}{3}$ یا $\frac{9}{4}$ یا $\frac{7}{6}$ می‌شود.