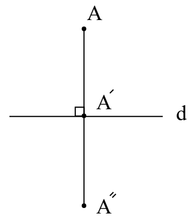
۲۱. گزینه ۴  تذکر: برای تعیین مختصات تصویر نقطه $A$ روی خط $d$ مراحل زیر را حل می‌کنیم:

۱) ابتدا خط $d$ را پارامتری کرده و $A'$ را برحسب $t$ روی آن می‌یابیم.

۲) بردار $AA'$ را می‌سازیم این بردار بر خط $d$ و از آنجا بر بردار هادی خط $d$ عمود است بنابراین $AA'\cdot u_d=۰$ و از اینجا مقدار $t$ بدست می‌آید.

۳) با داشتن $t$ مختصات $A'$ تصویر $A$ روی خط $d$ و از آنجا مختصات قرینه $A$ نسبت به خط $d$ از دستور $A''=۲A'-A$ بدست می‌آید.




$$d:\begin{cases} y=۳ \\ \dfrac{x-۳}{۲}=\dfrac{z}{-۱}=t \end{cases} \Rightarrow A'=(۲t+۳,۳,-t) \quad ,A=(۲,۱,۱)$$

$$\overrightarrow{AA'}=A'-A=(۲t+۱,۲,-t-۱) \qquad ,u_d=(۲,۰,-۱)$$

$$AA'\cdot u_d=۰\Rightarrow ۴t+۲+t+۱=۰\Rightarrow t=-\frac{۳}{۵}\Rightarrow A'=(۱/۸,۳,۰/۶)$$

$$A''=۲A'-A=(۱/۶,۵,۰/۲)\Rightarrow A'' \text{ مجموع مختصات } =۶/۸$$

۲۲. گزینه ۴  تذکر: مساحت مثلث ساخته‌شده روی سه نقطه‌ی $C,B,A$ از دستور $\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ به‌دست می‌آید.

تذکر: برای تعیین محل برخورد یک خط یا یک صفحه با یکی از محورهای مختصات یا یکی از صفحات سه‌گانه، کافی است مؤلفه‌های غیرمرتبط را در معادله آن‌ها مساوی صفر قرار بدهیم.

برای تعیین نقطه برخورد $d_۲,d_۱$ با صفحه $xoz$ کافی است مؤلفه‌ی $y$ را در معادله آن‌ها مساوی صفر قرار بدهیم.

$$d_۱:\frac{x-۱}{۳}=\frac{y+۲}{-۱}=\frac{z+۱}{۲}\xrightarrow{y=۰}\frac{x-۱}{۳}=-۲=\frac{z+۱}{۲}\to\begin{cases}x=-۵\\ z=-۵\end{cases}$$

پس نقطه‌ی $A(-۵,۰,-۵)$ نقطه‌ی برخورد $d_۱$ با صفحه‌ی $xoz$ می‌باشد.

$$d_۲:\begin{cases}x+y-z-۲=۰\\ x+y-۱۲=۰\end{cases}\xrightarrow{y=۰}\begin{cases}x-z=۲\\ x=۱۲\end{cases}\to z=۱۰$$

پس نقطه‌ی $B(۱۲,۰,۱۰)$ نقطه‌ی تلاقی خط $d_۲$ با صفحه‌ی $xoz$ است.

$$OA\times OB=(-۵,۰,-۵)\times(۱۲,۰,۱۰)=(۰,-۱۰,۰)$$

$$O=\frac{۱}{۲}=|OA\times OB|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}=۵$$

۲۳. گزینه ۲  نکته: اگر خط $L$ از دو نقطه‌ی $A$ و $B$ بگذرد آن‌گاه بردار هادی آن بردار $\overrightarrow{AB}$ است.

$$\overrightarrow{u_L}=\overrightarrow{AB}$$

نکته: مساحت مثلثی که سه رأس آن نقاط $A$ و $B$ و $C$ باشند از دستور $\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ بدست می‌آید.

خط $L$ موازی بردار $\overrightarrow{AB}=(۱,۲,۰)$ است. پس معادله‌اش به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{x-۲}{۱}=\frac{y-۲}{۲}=\frac{z+۳}{۰}\xrightarrow[\text{آن صفر است را مساوی صفر می‌گذاریم}]{\text{صورت کسری که مخرج}}L:\begin{cases}\dfrac{x-۲}{۱}=\dfrac{y-۲}{۲}\\ z=۳\end{cases}$$

اگر $x=۰$، آنگاه $C=(۰,-۲,-۳)$ نقطه‌ی برخورد $L$ با صفحه‌ی $yz$ است و اگر $y=۰$، آنگاه $D=(۱,۰,-۳)$ نقطه‌ی برخورد $L$ با صفحه‌ی $xz$ است. حال مساحت مثلثی با دو ضلع $\overrightarrow{OC}=(۰,-۲,-۳)$ و $\overrightarrow{OD}=(۱,۰,-۳)$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}=(۰,-۲,-۳)\times(۱,۰,-۳)=(۶,-۳,۲)$$

$$\left|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}\right|=\sqrt{۴۹}=۷$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}\right|=\frac{۷}{۲}=۳/۵$$

۲۴. گزینه ۲ راستای عمود مشترک برابر است با حاصل‌ضرب خارجی راستاهای دو خط $L_۱$ و $L_۲$ یعنی:

$$L_۱:\begin{cases}x=-y+۳\\ z=۴\end{cases}\Rightarrow u_۱(۱,-۱,۰)$$

$$L_۲:\begin{cases}x=۲z+۲\\ y=۱\end{cases}\Rightarrow u_۲(۱,۰,\frac{۱}{۲})\xrightarrow{\times(۲)}(۲,۰,۱)$$

$$\Rightarrow u=u_۱\times u_۲=\begin{vmatrix}i & j & k\\ ۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & ۰ & ۱\end{vmatrix}=i(-۱)-j(۱)+k(۲)\Rightarrow u(-۱,-۱,۲)$$

چون راستای این خط بر صفحه عمود است پس راستای این خط، نقش نرمال صفحه را خواهد داشت. واضح است که بردار $u$، موازی بردار نرمال صفحه مشخص شده در گزینه «۲» است.

تذکر۱: راستای عمود مشترک دو خط متنافر $d_۱$ و $d_۲$ از دستور $\overrightarrow{ud_۱}\times\overrightarrow{ud_۲}$ حاصل می‌شود.

تذکر۲: اگر برداری مانند $\vec{a}$ بر صفحه $p$ عمود باشد آنگاه با بردار نرمال صفحه $p$ موازی است یعنی $a\,||\,Np$

۲۵. گزینه ۴ چون این دو خط در صفحه‌ی $xy$ متقاطع هستند، پس در نقطه تقاطع آن‌ها $z=۰$ است.

$$z=۰\xrightarrow{\text{در خط } L}\frac{x-۲}{۲}=\frac{y+۲}{۳}=-۱\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ y=-۵\end{cases}\Rightarrow A=(۰,-۵,۰)$$

$$A\xrightarrow[\text{صدق}]{\text{در } L'}\frac{a}{۲}=\frac{-۵-۳}{۲}=b\Rightarrow\begin{cases}a=-۸\\ b=-۴\end{cases}$$

بنابراین: $a+b=-۱۲$ است.

تذکر: مختصات نقطه تقاطع دو خط در هر دو خط صدق می‌کند.

۲۶. گزینه ۱ تذکر: طول عمودمشترک دو خط $d$ و $d'$ از دستور $L=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(u_d\times u_{d'})\right|}{|u_d\times u_{d'}|}$ حاصل می‌شود.

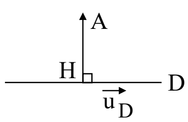
بردارهادی خط موردنظر $u=(۳,-۲,۱)$ و بردارهادی محور $x$ها، بردار $i=(۱,۰,۰)$ است. هم‌چنین $A(۱,-۱,۲)$ یک نقطه از خط اول و $B(۱,۰,۰)$ یک نقطه روی خط محور $ox$ است. پس:

$$u\times u'=u\times i=\begin{pmatrix}۳ & -۲ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۰\end{pmatrix}=(۰,۱,۲)$$

$$\overrightarrow{AB}=(۰,۱,-۲)$$

$$L=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(u\times u')\right|}{|u\times u'|}=\frac{|۰+۱-۴|}{\sqrt{۰+۱+۴}}=\frac{۳}{\sqrt{۵}}=\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$$

۲۷. گزینه ۴




عادله پارامتری خط $D$ به‌صورت $\begin{cases}x=t\\ y=۲t\\ z=t+۲\end{cases}$ است. با در نظر گرفتن نقطه $H(t,۲t,t+۲)$ روی خط $D$ و بردار $u=(۱,۲,۱)$ به‌عنوان بردار هادی خط داریم:

$$\overrightarrow{AH}\perp D\Rightarrow\overrightarrow{AH}\cdot u=۰\Rightarrow(t,۲t+۲,t+۲)\cdot(۱,۲,۱)=۰$$

$$\Rightarrow t+۴t+۴+t+۲=۰ \Rightarrow ۶t+۶=۰ \Rightarrow t=-۱$$

$$\Rightarrow H(-۱,-۲,۱) \Rightarrow m+n+p=-۲$$

۲۸. گزینه ۱ نکته: طول عمودمشترک دو خط متنافر $L$ و $L'$ از دستور $L=\dfrac{|AB\cdot(uL\times uL')|}{|uL\times uL'|}$ حاصل می‌شود که در آن $A$ و $B$ به ترتیب دو نقطه‌ی دلخواه روی خطوط $d$ و $d'$ می‌باشند.

$$\left.\begin{array}{l} uL_۱=(۱,\frac{۱}{۲},۱) \xrightarrow{\times ۲} uL_۱=(۲,۱,۲) \\ uL_۲=(۲,۱,۱) \end{array}\right\} \Rightarrow uL_۱\times uL_۲=\begin{pmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}=(-۱,۲,۰)$$

$$\begin{array}{l} A=(۰,۰,-۲)\in L_۱ \\ B=(۱,۳,۰)\in L_۲ \end{array} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(۱,۳,۲)$$

$$L=\frac{|AB\cdot(uL_۱\times uL_۲)|}{|uL_۱\times uL_۲|}=\frac{|-۱+۶|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

۲۹. گزینه ۲ طول ضلع مربع فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۰,۱,۱)$ از خط $D$ است.

$u=(۲,۱,۱)$ بردار هادی خط $D$ و $B(۱,۳,-۱)$ نقطه‌ای روی خط $D$

$h=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}$ فاصله‌ی نقطه‌ی $A$ از خط $D$

$$\overrightarrow{AB}=(xB-xA, yB-yA, zB-zA)=(۱,۲,-۲)$$

$$\overrightarrow{AB}\times u=(۱,۲,-۲)\times(۲,۱,۱)=(۴,-۵,-۳)$$

$$|\overrightarrow{AB}\times u|=\sqrt{۵۰} \quad , \quad |u|=\sqrt{۶}$$

طول ضلع مربع $h=\dfrac{\sqrt{۵۰}}{\sqrt{۶}} \Rightarrow$ مساحت مربع $S=\dfrac{۲۵}{۳}$

۳۰. گزینه ۴ ابتدا معادله خط گذرا از $A$ و $B$ را یافته سپس آن را پارامتری کرده در خط $L$ صدق می‌دهیم.

$$uD=\overrightarrow{AB}=(۲,۲,۴)$$

$$A\in D \Rightarrow D: \frac{x}{۲}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z}{۴}=t \Rightarrow D: \begin{cases} x=۲t \\ y=۲t+۱ \\ z=۴t \end{cases} \rightarrow M=(۲t,۲t+۱,۴t)$$

مختصات $m$ در خط $L$ صدق می‌کند.

$$L: \frac{x-m}{-۱}=y=z \xrightarrow[\text{صدق می دهیم } L]{m \text{ را در}} \frac{۲t-m}{-۱}=۲t+۱=۴t$$

$$\begin{cases} ۲t+۱=۴t \Rightarrow t=\dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{۲t-m}{-۱}=۲t+۱ \xrightarrow{t=\frac{۱}{۲}} \dfrac{۱-m}{-۱}=۲ \Rightarrow m=۳ \end{cases}$$

۳۱. گزینه ۲

$$x+۱=y=z+۲=t \Rightarrow \begin{cases} x=t-۱ \\ y=t \\ z=t-۲ \end{cases}$$

اکنون این روابط را در معادله‌ی دوم جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{t-۱-m}{۳}=t-۳=\frac{t-۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} t-۱-m=۳t-۹ \Rightarrow ۲t=۸-m \\ ۲t-۶=t-۳ \Rightarrow t=۳ \quad (*) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲(۳)=۸-m \Rightarrow m=۲$$

۳۲. گزینه ۴

$$\begin{cases} D: \frac{x}{۲}=۲-y=\frac{۳-z}{۲} \Rightarrow \overrightarrow{u_D}=(۲,-۱,-۲) \\ D': \frac{x+۱}{۴}=\frac{y+۱}{-۲}=\frac{z-۲}{-۲} \Rightarrow \overrightarrow{u_{D'}}=(۴,-۲,-۲) \end{cases} \Rightarrow u_D \not\parallel u_{D'}$$

بنابراین این دو خط موازی یا منطبق نیستند. برای بررسی متنافر یا متقاطع بودن آن‌ها، نقطه‌ای شناور از یکی را در دیگری جایگذاری می‌کنیم: اگر جواب یکتایی به دست آمد متقاطع هستند، در غیر این صورت متنافرند.

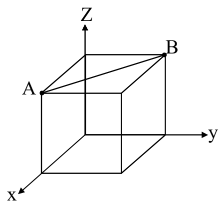
$$D: \frac{x}{۲}=۲-y=\frac{۳-z}{۲}=t \Rightarrow \quad \text{نقطه‌ی شناور :} \begin{cases} x=۲t \\ y=۲-t \\ z=۳-۲t \end{cases}$$

حال این مقادیر را در معادله‌ی خط $D'$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{۲t+۱}{۴}=\frac{۳-t}{-۲}=\frac{۱-۲t}{-۲} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲t+۱}{۴}=\frac{۳-t}{-۲} \Rightarrow -۲t-۱=۶-۲t \Rightarrow -۱=۶ \quad \text{غ ق ق} \\ \frac{۳-t}{-۲}=\frac{۱-۲t}{-۲} \Rightarrow ۳-t=۱-۲t \Rightarrow t=-۲ \end{cases}$$

بنابراین $D$ و $D'$ متنافرند.

۳۳. گزینه ۳




$A(۲,۰,۲)$

$B(۰,۲,۲)$

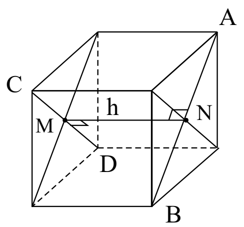
باید معادله‌ی خط گذرنده از نقاط $A$ و $B$ را بنویسیم:

$$\text{هادی } \overrightarrow{AB}=(-۲,۲,۰) \parallel (۱,-۱,۰)$$

بنابراین معادله‌ی خط شامل پاره‌خط $AB$ عبارت است از:

$$x=\frac{y-۲}{-۱} \ , \ z=۲ \Rightarrow x=۲-y \ , \ z=۲$$

۳۴. گزینه ۱




مطابق شکل، خطی که مراکز دو وجه روبه‌رو را به‌هم وصل می‌کند، بر هر دو وجه عمود است و $AB$ و $CD$ را نیز قطع می‌کند. لذا عمود مشترک آن‌ها است. طول $MN$ همان اندازه‌ی یال مکعب است.

چون دو خط $\begin{cases} x=۲ \\ y+z=۵ \end{cases}$ و $\begin{cases} x=۴ \\ ۲y-z=۶ \end{cases}$ عمود بر محور $x$هاست، پس تفاضل طول‌ها در دو خط، طول عمود مشترک آن‌هاست.

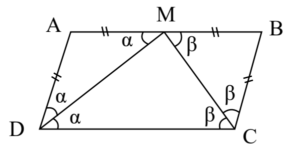
بنابراین طول عمود مشترک برابر است با:

$$h=MN=۴-۲=۲$$

در نتیجه حجم مکعب برابر است با:

$$V=۲^۳=۸$$

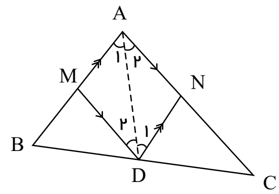
۳۵. گزینه ۴




$$AB = ۲BC, AB \text{ وسط } M \Rightarrow AM = MB = BC = AD$$

$$AM \parallel DC \Rightarrow A\hat{M}D = M\hat{D}C = \alpha, AM = AD = \alpha \Rightarrow \text{ نیمساز } DM \text{ است } \hat{D}$$
$$MB \parallel CD \Rightarrow M\hat{C}D = C\hat{M}B = B, MB = BC \Rightarrow B\hat{M}C = B\hat{C}M = \beta \Rightarrow \text{ نیمساز } MC \text{ است } C$$
$$\hat{D} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = ۹۰^\circ \Rightarrow D\hat{M}C = ۹۰^\circ$$

۳۶. گزینه ۲ مطابق شکل:



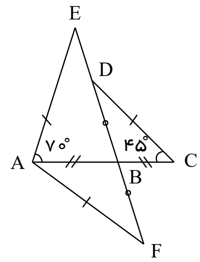

$$AN \parallel MD, AM \parallel DN \Rightarrow AMDN \text{ متوازی الاضلاع}$$
$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{A}_۱, \hat{D}_۲ = \hat{A}_۲ \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ = \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$$

پس $AMDN$ متوازی‌الاضلاعی است که قطرش نیمساز است پس لوزی است.

یا به عبارت دیگر:

$$\hat{A}_۲ = \hat{D}_۱ \Rightarrow AN = DN, AMDN \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow AN = MD = DN = AM \Rightarrow AMDN \text{ لوزی}$$

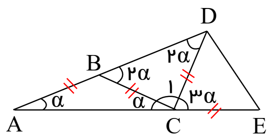
۳۷. گزینه ۲ $BD$ را به اندازه‌ی خود ادامه می‌دهیم تا $F$ به دست آید. چهارضلعی $ADCF$ متوازی‌الاضلاع است چون قطرهایش منصف هستند پس داریم:




$$AF = DC, DC = AE \Rightarrow AE = AF$$
$$\hat{C} = C\hat{A}F = ۴۵^\circ \Rightarrow E\hat{A}F = ۴۵ + ۷۰ = ۱۱۵^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{E} = \hat{F} = \frac{۱۸۰ - ۱۱۵^\circ}{۲} = ۳۲/۵^\circ$$

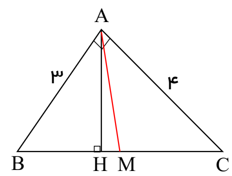
۳۸. گزینه ۳

اگر $\hat{A} = \alpha$ در نظر بگیریم، مقادیر بقیه‌ی زوایا مطابق شکل بر حسب $\alpha$ به‌دست می‌آیند.



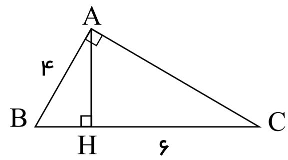

$$C\overset{\Delta}{D}E: \begin{cases} \hat{D} = \hat{E} = ۵۴^\circ \\ \hat{C} = ۳\alpha \end{cases} \Rightarrow ۳\alpha = ۱۸۰^\circ - ۲(۵۴^\circ) \Rightarrow ۳\alpha = ۷۲^\circ \Rightarrow \alpha = ۲۴$$

۳۹. گزینه ۳ مثلث ABC به اضلاع ۳، ۴ و ۵، در رأس A قائم‌الزاویه است. میانه‌ی نظیر وتر نصف وتر است، پس $AM = BM = CM = \frac{۵}{۲}$. از طرفی بنا به رابطه‌ی طولی در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:




$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۳^۲ = BH \times ۵ \Rightarrow BH = \frac{۹}{۵}$$
$$MH = BM - BH = \frac{۵}{۲} - \frac{۹}{۵} = \frac{۲۵ - ۱۸}{۱۰} = \frac{۷}{۱۰} = ۰/۷$$

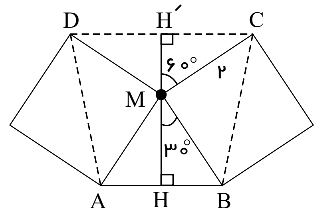
۴۰. گزینه ۴




$$AB^{۲}=BH\times BC\ ,\ BH=BC-۶\Rightarrow\ ۱۶=(BC-۶)\,BC$$
$$\Rightarrow\ BC^{۲}-۶BC-۱۶=۰\ \Rightarrow\ BC=۸\quad \text{جواب قابل قبول}$$
$$AC^{۲}=BC^{۲}-AB^{۲}=۸^{۲}-۴^{۲}=۴۸\ \Rightarrow\ AC=۴\sqrt{۳}$$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه مربع یک ضلع برابر است با حاصل‌ضرب وتر در تصویر آن ضلع بر وتر.

۴۱. گزینه ۳ به راحتی می‌توان نشان داد که $AB\|CD$، یعنی $ABCD$ یک ذوزنقه است. مطابق شکل، از رأس سوم مثلث متساوی‌الاضلاع (نقطه‌ی $M$) عمودهای $MH$ و $MH'$ را بر $AB$ و $CD$ رسم می‌کنیم. داریم:

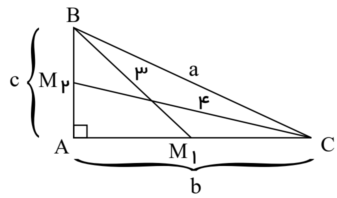



$$MH=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(۲)=\sqrt{۳}$$
$$\overset{\Delta}{MCH'}:\begin{cases}MH'=۲\cos ۶۰^{\circ}=۱\\ CH'=۲\sin ۶۰^{\circ}=\sqrt{۳}\end{cases}$$

پس $CD=۲CH'=۲\sqrt{۳}$ و $HH'=MH+MH'=\sqrt{۳}+۱$، در نتیجه:

$$S(ABCD)=\frac{۱}{۲}(AB+CD)HH'=\frac{۱}{۲}(۲+۲\sqrt{۳})(\sqrt{۳}+۱)$$
$$=(\sqrt{۳}+۱)^{۲}=۴+۲\sqrt{۳}$$

۴۲. گزینه ۳

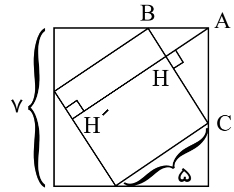



$$\overset{\Delta}{ABM_۱}:c^{۲}+(\frac{b}{۲})^{۲}=۳^{۲}\Rightarrow c^{۲}+\frac{b^{۲}}{۴}=۹$$
$$\overset{\Delta}{ACM_۲}:b^{۲}+(\frac{c}{۲})^{۲}=۴^{۲}\Rightarrow b^{۲}+\frac{c^{۲}}{۴}=۱۶$$

حالا طرفین عبارت بالا را با هم جمع می‌کنیم:

$$b^{۲}+c^{۲}+\frac{b^{۲}}{۴}+\frac{c^{۲}}{۴}=۲۵\Rightarrow\frac{۵b^{۲}}{۴}+\frac{۵c^{۲}}{۴}=۲۵$$
$$\Rightarrow\frac{۵}{۴}\underbrace{(b^{۲}+c^{۲})}_{a^{۲}}=۲۵\Rightarrow a^{۲}=\frac{۲۵\times ۴}{۵}\Rightarrow a=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

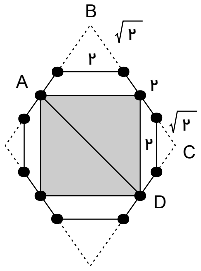
۴۳. گزینه ۳




$$\text{مساحت بین دو مربع}=۷^{۲}-۵^{۲}=۲۴$$
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۴}\times ۲۴=۶$$
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times AH\times ۵=۶$$
$$\Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

**فاصله‌ی رأس $A$ از دورترین ضلع مربع کوچک**: $AH'=AH+HH'=۲/۴+۵=۷/۴$

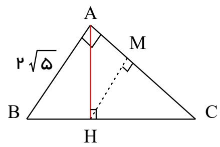
۴۴. گزینه ۲ با ادامه دادن ۴ ضلع از هشت ضلعی منتظم طبق شکل زیر، مربع محیطی ظاهر می‌شود و با توجه به اینکه مثلث‌های گوشه‌ای قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین‌اند و طول وتر آنها که همان ضلع هشت‌ضلعی منتظم می‌باشد برابر ۲ داده شده. در نتیجه اندازه‌ی ساق این مثلث‌های برابر $\sqrt{۲}$ است.




پس $BC=۲(\sqrt{۲}+۱)$ می‌شود از طرفی $AD=BC$ و در نتیجه $AD=۲(\sqrt{۲}+۱)$ و مساحت مربع سایه زده شده برابر می‌شود با:

$$S=\frac{AD^۲}{۲}=\frac{۲^۲(\sqrt{۲}+۱)^۲}{۲}=۲(۳+۲\sqrt{۲})$$

۴۵. گزینه ۱




$$\overset{\Delta}{ABC}: BC^۲=(۲\sqrt{۵})^۲+(۴\sqrt{۵})^۲\Rightarrow BC^۲=۱۰۰\Rightarrow BC=۱۰$$

$$AH\cdot BC=AB\cdot AC\Rightarrow AH\times ۱۰=(۲\sqrt{۵})(۴\sqrt{۵})\Rightarrow AH=۴$$

$$AC^۲=CH\cdot BC\Rightarrow (۴\sqrt{۵})^۲=CH\times ۱۰\Rightarrow CH=۸$$

در مثلث قائم‌الزاویه $HM\cdot \overset{\Delta}{AHC}$ ارتفاع نظیر وتر $AH$ است. بنابراین:

$$AH\cdot HC=HM\cdot AC\Rightarrow ۴\times ۸=HM\times ۴\sqrt{۵}\Rightarrow HM=\frac{۸}{\sqrt{۵}}$$

۴۶. گزینه ۳ حالات زیر را داریم:

۱) ۴ کوچکترین ضلع $b, a, ۴$ باشد، داریم:

$$\begin{cases}\frac{۴}{۲}=\frac{a}{۴}=\frac{b}{۵}\\ \text{یا}\\ \frac{۴}{۲}=\frac{b}{۴}=\frac{a}{۵}\end{cases}\Rightarrow a+b=۱۸$$

مشخص است که هیچ‌گاه نسبت تشابه $\frac{۴}{۴}$ نمی‌شود.

۲) اگر $a$ کوچکترین ضلع $b, a, ۴$ باشد، داریم:

$$\frac{a}{۲}=\frac{b}{۴}=\frac{۴}{۵}$$
$$\Rightarrow a+b=\frac{۸}{۵}+\frac{۱۶}{۵}=\frac{۲۴}{۵}$$

۳) اگر $b$ کوچکترین ضلع $b, a, ۴$ باشد، داریم:

$$\frac{b}{۲}=\frac{a}{۴}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow a+b=\frac{۲۴}{۵}$$

بیشترین مقدار $a+b$ برابر با ۱۸ می‌باشد.

۴۷. گزینه ۲ دو مثلث $OAB$ و $OFC$ متشابه‌اند زیرا:

$$\begin{cases}\widehat{O}\ \text{مشترک}\\ \frac{OA}{OF}=\frac{OB}{OC}=\frac{۴}{۸/۴}=\frac{۳/۲}{۶/۷۲}\end{cases}$$

می‌دانیم که در دو مثلث متشابه، نسبت نیمسازهای متناظر برابر است با نسبت تشابه. داریم:

$$\frac{OD}{OE}=\frac{۴}{۸٫۴}\Rightarrow\frac{OD}{\underbrace{OE-OD}_{DE}}=\frac{۴}{۸٫۴-۴}=\frac{۴}{۴٫۴}=\frac{۱}{۱٫۱}\Rightarrow\frac{DE}{OD}=۱٫۱$$

۴۸. گزینه ۳

$$OE\parallel AD\Rightarrow\frac{DE}{DC}=\frac{AO}{AC}=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{AO}{OC}=\frac{۱}{۴}$$

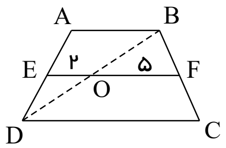
$$\overset{\triangle}{AOB}\sim\overset{\triangle}{DOC}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{AOB}}}{S_{\overset{\triangle}{DOC}}}=\left(\frac{AO}{OC}\right)^{۲}=\frac{۱}{۱۶}\,,\ \frac{OB}{OD}=\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AOD}}}{S_{\overset{\triangle}{AOB}}}=\frac{DO}{BO}=۴\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AOD}}=۴S_{\overset{\triangle}{AOB}}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{BOC}}=۴S_{\overset{\triangle}{AOB}}$$

$$S_{ABCD}=S_{\overset{\triangle}{AOB}}+۴S_{\overset{\triangle}{AOB}}+۱۶S_{\overset{\triangle}{AOB}}+۴S_{\overset{\triangle}{AOB}}=۲۵S_{\overset{\triangle}{AOB}}$$

۴۹. گزینه ۳ در مثلث $ABD$ داریم $OE\parallel AB$ ، پس بنابر قضیه‌ی تالس:

$$\frac{OE}{AB}=\frac{DE}{AD}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow AB=۴$$




به همین شیوه در مثلث $BDC$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{OF}{DC}=\frac{BF}{BC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow DC=۱۰$$

چون محیط ذوزنقه برابر **۲۶** واحد است، خواهیم داشت:

$$AB+BC+DC+AD=۲۶$$

$$\xrightarrow{AB=۴\,,\,DC=۱۰}BC+AD=۲۶-۱۴=۱۲$$

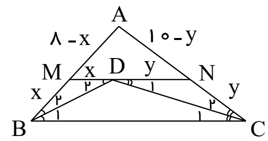
۵۰. گزینه ۲ چون $MN\parallel BC$ ونیز $CD$ و $BD$ نیم‌سازهای زوایای $\widehat{C}$ و $\widehat{B}$ هستند، پس طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:

$$\begin{cases}\widehat{C}_۱=\widehat{C}_۲=\widehat{D}_۱\\ \widehat{B}_۱=\widehat{B}_۲=\widehat{D}_۲\end{cases}$$

و لذا مثلث‌های $\overset{\triangle}{DNC}$ و $\overset{\triangle}{DMB}$ هر دو متساوی‌الساقین اند.

حال باتوجه به شکل و طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{۸-x}{۸}=\frac{x+y}{۱۲}=\frac{۱۰-y}{۱۰}$$




$$\Rightarrow\begin{cases}۹۶-۱۲x=۸x+۸y\\ ۱۲۰-۱۲y=۱۰x+۱۰y\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۱۰x+۴y=۴۸\\ ۱۰x+۲۲y=۱۲۰\end{cases}\Rightarrow y=۴\ ,\ x=۳٫۲\Rightarrow x+y=۷٫۲\Rightarrow MN=۷٫۲$$