دبیرستان علامه حلی تهران

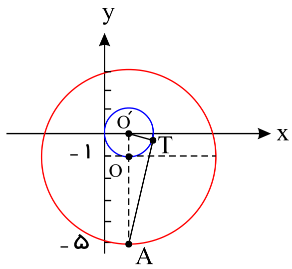
۳۶. گزینه ۳ ابتدا مختصات مرکز و شعاع دو دایره را تعیین می‌کنیم:

$$C: x^۲+y^۲-۲x+۲y-۱۴=۰ \qquad O\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right. \qquad R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴+۵۶}=۴$$

$$C': x^۲+y^۲-۲x=۰ \qquad O\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right. \qquad R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴}=۱$$

چون $OO'<|R-R'|$ پس دو دایره متداخلند از طرفی مختصات مرکز دایره C' در معادله دایره اول صدق می کند پس طول بزرگترین مماس ارسالی از نقاط روی دایره C برابر طول مماسی است که از A بر دایره کوچکتر رسم می‌شود:

$$\overset{\Delta}{O'AT}: AT=\sqrt{O'A^۲-O'T^۲}=\sqrt{۲۵-۱}=۲\sqrt{۶}$$



۳۷. گزینه ۳

$$a=(۲,-۲,۱)\Rightarrow \cos\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۴+۴+۱}}=\frac{۲}{۳}, \cos\beta=-\frac{۲}{۳}, \cos\gamma=\frac{۱}{۳}$$

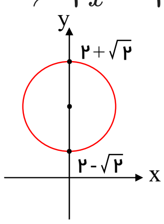
چون $۰\le\alpha,\beta\le\pi$ و $\cos\alpha=-\cos\beta$ پس $\alpha+\beta=\pi$ و داریم:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(\pi+\gamma)=-\cos\gamma=-\frac{۱}{۳}$$

۳۸. گزینه ۴ در آغاز، باید معادله‌ی دایره را با دسته بندی پیدا کنیم. برای این منظور باید ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ با هم برابر باشند، داریم:

$$۲a-۱=-۲\Rightarrow a=-۱$$

$$\rightarrow -۳x^۲-۳y^۲+۱۲y-۱-۵=۰\Rightarrow -۳x^۲-۳y^۲+۱۲y-۶=۰\xrightarrow{\div(-۳)}x^۲+y^۲-۴y+۲=۰$$



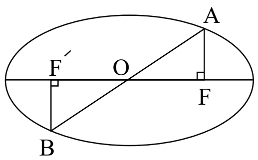
$$\Rightarrow x^۲+(y-۲)^۲=۲$$ (معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $(۰,۲)$ و شعاع $\sqrt{۲}$)

باتوجه به شکل، روشن است که بیش ترین فاصله ی نقاط دایره تا محور xها، $۲+\sqrt{۲}$ است.

۳۹. گزینه ۱ نکته: وتر کانونی بیضی (هذلولی) وتری است که از کانون می‌گذرد و بر محور کانونی عمود است. طول وتر کانونی بیضی (هذلولی) برابر است با: $\frac{۲b^۲}{a}$

$$x^۲+۲y^۲=۴\xrightarrow{\div۴}\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۲}=۱\Rightarrow a=۲\ ,\ b=\sqrt{۲}\Rightarrow c=\sqrt{۲}$$

باتوجه به شکل، AA'وتر کانونی بیضی است. پس طول آن برابر است با: $|AA'|=\frac{۲\times۲}{۲}=۲$

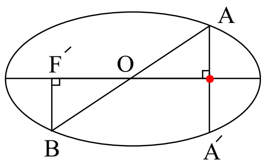


بنابراین: $\frac{|AA'|}{۲}=۱=|AF|$، همچنین داریم: $|OF|=c=\sqrt{۲}$

حال در مثلث قائم‌الزاویه AOF داریم: $|OA|=\sqrt{OF^۲+AF^۲}=\sqrt{۳}$

باتوجه به اینکه $|OB|=|OA|$ است، داریم $|AB|=۲\sqrt{۳}$

راه‌حل دیگر:



$$x^۲+۲y^۲=۴\Rightarrow\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۲}=۱\Rightarrow\begin{cases}a^۲=۴\\b^۲=۲\end{cases}\Rightarrow c^۲=۲\Rightarrow c=\sqrt{۲}$$

بنابراین مختصات کانون‌های بیضی عبارت است از: $F(\sqrt{۲},\circ)$, $F'(-\sqrt{۲},\circ)$

حال باتوجه به اینکه A و B روی بیضی هستند، مختصات آن‌ها را به دست می‌آوریم.

$$xA=xF=\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{(\sqrt{۲})^۲}{۴}+\frac{y_A^۲}{۲}=۱\Rightarrow y_A^۲=۱\xrightarrow{yA>\circ}y_A=۱\Rightarrow A(\sqrt{۲},۱)$$

$$xB=xF'=-\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{(-\sqrt{۲})^۲}{۴}+\frac{y_B^۲}{۲}=۱\Rightarrow y_B^۲=۱\xrightarrow{yB<\circ}y_B=-۱\Rightarrow B(-\sqrt{۲},-۱)$$

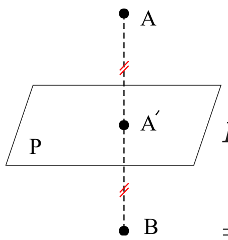
بنابراین طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{(-\sqrt{۲}-\sqrt{۲})^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

۴۰. گزینه ۴

با توجه به شکل در واقع باید قرینه نقطه A را نسبت به صفحه P بیابیم تا مختصات نقطه B حاصل شود.

بدین منظور ابتدا معادله خط گذرنده از A و عمود بر صفحه P را می‌نویسیم:



$$L:\frac{x-۲}{۱}=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z+۱}{-۳}$$

$$\Rightarrow L:\begin{cases}x=t+۲\\y=۲t+۱\\z=-۳t-۱\end{cases}\Rightarrow A'(t+۲,۲t+۱,-۳t-۱)$$

P جایگذاری در معادله‌ی صفحه‌ی $\Rightarrow t+۲+۴t+۲+۹t+۳+۷=\circ\Rightarrow ۱۴t=-۱۴\rightarrow t=-۱\Rightarrow A'(۱,-۱,۲)$

$$\Rightarrow B=۲A'-A=(۲,-۲,۴)-(۲,۱,-۱)=(\circ,-۳,۵)$$

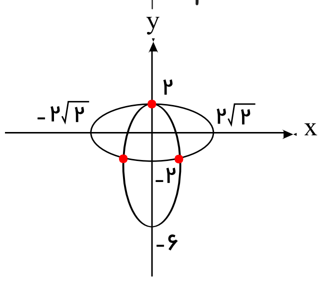
۴۱. گزینه ۳ معادله‌ی هردو بیضی را به حالت استاندارد در می‌آوریم و آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$x^۲+۲y^۲-۸=\circ\Rightarrow x^۲+۲y^۲=۸\Rightarrow\frac{x^۲}{۸}+\frac{y^۲}{۴}=۱\Rightarrow$ مرکز: $W_۱\left|\begin{matrix}\circ\\\circ\end{matrix}\right.$, $a=۲\sqrt{۲}$, $b=۲$ بیضی افقی و

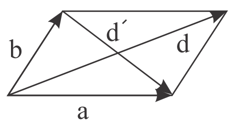
$$۴x^۲+y^۲+۴y-۱۲=\circ\Rightarrow ۴x^۲+(y+۲)^۲=۱۶\Rightarrow\frac{x^۲}{۴}+\frac{(y+۲)^۲}{۱۶}=۱$$

$\Rightarrow$ مرکز: $W_۲\left|\begin{matrix}\circ\\-۲\end{matrix}\right.$, $a=۴$, $b=۲$ بیضی قائم و

با توجه به شکل، دو بیضی، سه نقطه‌ی مشترک دارند.

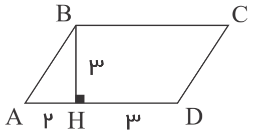


۴۲. گزینه ۳ تذکر: در متوازی‌الاضلاع ساخته شده برای بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ شکل زیر:



$$\xrightarrow[\text{متوازی‌الاضلاع هستند}]{\text{قطرهای } d,d'}\begin{cases}|a\times b|=S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}\\|a\times d|=|a\times d|=|b\times d|=|b\times d'|=S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}\\|d\times d'|=۲S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}\end{cases}$$

در این قسمت فرض می‌کنیم مساحت متوازی‌الاضلاع S باشد:



$$= \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}\right|$$

$= S+S+۲S=۴S=۴\times$ قاعده $\times$ ارتفاع

$$=۴\times۵\times۳=۶۰$$

۴۳. گزینه ۲

نکته: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردار دلخواه باشند. آنگاه:

$$a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c$$

$$v_۱\times(v_۱\times v_۲)=\underbrace{(v_۱\cdot v_۲)}_{۰}v_۱-(v_۱\cdot v_۲)v_۲$$

$$\Rightarrow (-۱۴,-۱۴,-۷۰)=۰\times v_۱-(۹+۴+۱)v_۲ \Rightarrow (-۱۴,-۱۴,-۷۰)=-۱۴v_۲ \xrightarrow{\div(-۱۴)} v_۲=(۱,۱,۵)$$

مجموعه مولفه‌های بردار $\overrightarrow{v_۲}$ برابر $۱+۱+۵=۷$ می‌باشد.

۴۴. گزینه ۱ مختصات رأس‌ها $A(m,۰,۰)$ و $B(۰,m,۰)$ و $C(۰,۰,m)$ است.

طول ضلع مثلث $\sqrt{۲}m$ است. داریم:

$$\sqrt{۲}m=\sqrt{۱۸}\Rightarrow m=۳$$

$$BM=۳MA+۲CM\Rightarrow OM-OB=۳(OA-OM)+۲(OM-OC)$$

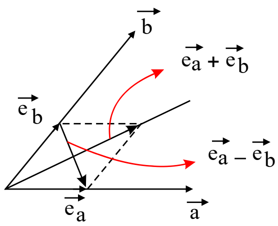
$$\Rightarrow ۲OM=۳OA+OB-۲OC$$

$$\Rightarrow OM=\frac{(۹,۰,۰)+(۰,۳,۰)-(۰,۰,۶)}{۲}=(\frac{۹}{۲},\frac{۳}{۲},-۳)$$

$$OM=\frac{۱}{۲}\sqrt{۹^۲+۳^۲+(-۳)^۲}=\frac{۳\sqrt{۱۴}}{۲}$$

۴۵. گزینه ۲

نکته: اگر a و b دو برادار غیرصفر باشند، مطابق شکل بر روی e_a و eb یک لوزی بنا می‌شود. باتوجه به اینکه قطرهای لوزی نیمساز زاویه‌ها و عمود برهم‌اند، پس $\vec{e}a+\vec{e}b$ در راستای نیمساز زاویهٔ بین a و b و $\vec{e}a-\vec{e}b$ در راستای عمود بر این نیمساز قرار دارد.



باتوجه به نکتهٔ بالا، باید راستای $\vec{e}a-\vec{e}b$ را به‌دست بیاوریم.

$$\begin{cases}\vec{a}=(۳,۰,۴)\Rightarrow \vec{e}a=\frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{۱}{۵}(۳,۰,۴)\\ \vec{b}=(۱,-۲,۲)\Rightarrow \vec{e}b=\frac{۱}{|\vec{b}|}\vec{b}=\frac{۱}{۳}(۱,-۲,۲)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{e}a-\vec{e}b=(\frac{۳}{۵},۰,\frac{۴}{۵})-(\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})=(\frac{۴}{۱۵},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۱۵})$$

با ضرب این بردار در $\frac{۱۵}{۲}$، بردار $(۲,۵,۱)$ به‌دست می‌آید که در راستای $\vec{e}a-\vec{e}b$ قرار دارد.