۲۱. گزینه ۲

$$d: x=y-1=z+2 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\1\\-2\end{matrix}\right. \quad , \quad u_1=(1,1,1)$$

$$\text{محور } y \text{ ها} \Rightarrow B\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right. \quad , \quad u_2=(0,1,0)$$

$$\overrightarrow{AB}=(0,-1,2) \quad , \quad \vec{u}_1\times\vec{u}_2=(-1,0,1)$$

$$\text{طول عمودمشترک}: L=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}_1\times\vec{u}_2)\right|}{\left|\vec{u}_1\times\vec{u}_2\right|}=\frac{|0+0+2|}{\sqrt{1+0+1}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

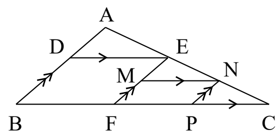
۲۲. گزینه ۱ چون خط D بر خطوط d_1 و d_2 عمود است پس بردارهادی آن از ضرب خارجی بردارهای هادی خطوط d_1 و d_2 بدست می‌آید.

$$\left.\begin{matrix} d_1: x-2=y=\dfrac{z-2}{3} \to u_{d_1}=(1,1,3) \\ d_2: x=\dfrac{y-1}{2}=z \Rightarrow u_{d_2}=(1,2,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_d=u_{d_1}\times u_{d_2}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&1\end{pmatrix}=(-5,2,1)$$

$$A\left|\begin{matrix}1\\-1\\2\end{matrix}\right. \in D \Rightarrow D: \frac{x-1}{-5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$$

در بین گزینه‌ها، مختصات نقطه $(-4,1,3)$ در معادله خط D صدق می‌کند.

۲۳. گزینه ۱ چون $BDEF$ و $MNPF$ متوازی‌الاضلاع‌اند، لذا $DE\|BC$ و $AB\|FE\|NP$.



$$DE\|BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{2}{3}$$

$$EF\|AB \Rightarrow \frac{CF}{FB}=\frac{CE}{EA}=\frac{3}{2}$$

$$MN\|FC \Rightarrow \frac{EM}{EF}=\frac{EN}{EC}=\frac{MN}{FC}=\frac{1}{2}$$

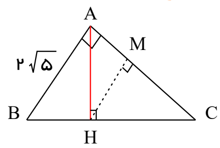
از طرفی $MN=FP$ لذا $MN=PC$. بنابراین N و P به ترتیب وسط CE و CF هستند. لذا مساحت مثلث‌های $N\overset{\Delta}{P}C$ (اگر از رأس C به مثلث CEF نگاه کنیم) و $M\overset{\Delta}{N}E$ (اگر از رأس E نگاه کنیم) هر کدام $\frac{1}{4}$ مساحت $E\overset{\Delta}{F}C$ است. لذا مساحت $MNPF$ نصف مساحت $E\overset{\Delta}{F}C$ است.

نسبت تشابه $C\overset{\Delta}{E}F$ به $A\overset{\Delta}{B}C$ نیز ۳ به ۵ است. لذا نسبت مساحت‌های آن‌ها ۹ به ۲۵ است.

لذا:

$$S_{MNPF}=\frac{1}{2}S_{EFC}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{25}S_{ABC}=0/18S_{ABC}$$

۲۴. گزینه ۱



$$\overset{\Delta}{ABC} : BC^{۲} = (۲\sqrt{۵})^{۲} + (۴\sqrt{۵})^{۲} \Rightarrow BC^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow BC = ۱۰$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH \times ۱۰ = (۲\sqrt{۵})(۴\sqrt{۵}) \Rightarrow AH = ۴$$

$$AC^{۲} = CH \cdot BC \Rightarrow (۴\sqrt{۵})^{۲} = CH \times ۱۰ \Rightarrow CH = ۸$$

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{AHC}$ $HM \cdot$ ارتفاع نظیر وتر AH است. بنابراین:

$$AH \cdot HC = HM \cdot AC \Rightarrow ۴ \times ۸ = HM \times ۴\sqrt{۵} \Rightarrow HM = \frac{۸}{\sqrt{۵}}$$

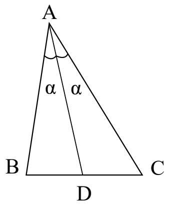
۲۵. گزینه ۴ اگر وسط اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، مثلثی متشابه با مثلث بزرگتر به دست می‌آید که نسبت تشابه آنها $K = \frac{۱}{۲}$ است.

در دو مثلث متشابه با نسبت تشابه K، نسبت بین مساحت‌ها $K^{۲}$ (مربع نسبت تشابه) است.

$$K = \frac{۱}{۲} \ (\text{نسبت تشابه}) \Rightarrow \frac{S}{S'} = K^{۲} = (\frac{۱}{۲})^{۲} \Rightarrow \frac{SHSN}{SPRI} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{SHSN}{۱۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow SHSN = ۳cm^{۲}$$

۲۶. گزینه ۱

فرض کنیم AD نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ باشد. داریم:



$$\overrightarrow{AB} = (۲, -۱, -۱) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{۶}$$

$$\overrightarrow{AC} = (۱, -۱, ۲) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{۶}$$

چون $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ پس $\overrightarrow{AD}$ هم‌جهت با $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ است و داریم:

$$vD = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (۲, -۱, -۱) + (۱, -۱, ۲) = (۳, -۲, ۱)$$

$$AD \ \text{معادله} : \frac{x-۱}{۳} = \frac{y-۲}{-۲} = \frac{z-۳}{۱} \xrightarrow{y=۰} \frac{۰-۲}{-۲} = \frac{z-۳}{۱} \Rightarrow ۱ = z-۳ \Rightarrow z = ۴$$

۲۷. گزینه ۲ $u = (۱, ۱, ۰)$ بردار هادی خط D و $B(۰, ۰, ۱)$ نقطه‌ای از این خط می‌باشد و $A(۰, ۰, z)$ نقطه‌ای روی محور zها می‌باشد، پس:

$$\overrightarrow{AB}\times u=(۰,۰,۱-z)\times(۱,۱,۰)=(z-۱,۱-z,۰)$$

$$\text{فاصله‌ی } A \text{ تا خط } D=d_۱=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\vec{u}\right|}{|u|}=\frac{\sqrt{۲(z-۱)^۲}}{\sqrt{۲}}$$

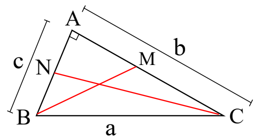
$u'=(۰,۱,۱)$ بردار هادی خط D' و $C(۱,۰,۰)$ نقطه‌ای از این خط می‌باشد.

$$\overrightarrow{AC}\times u'=(۱,۰,-z)\times(۰,۱,۱)=(z,-۱,۱)$$

$$\text{فاصله‌ی } A \text{ تا خط } D'=d_۲=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\times u'\right|}{|u'|}=\frac{\sqrt{z^۲+۲}}{\sqrt{۲}}$$

طبق فرض: $d_۱=d_۲\Rightarrow\dfrac{\sqrt{۲(z-۱)^۲}}{\sqrt{۲}}=\dfrac{\sqrt{x^۲+۲}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow z^۲-۴z=۰\ ,\ z=۰\ ,\ z=۴$

۲۸. گزینه ۱



$$A=۹۰^\circ\ ,\ BM=۲\sqrt{۷}\ ,\ CN=۲\sqrt{۱۳}$$

$$\begin{cases}BM^۲=c^۲+\dfrac{b^۲}{۴}\\ CN^۲=b^۲+\dfrac{c^۲}{۴}\end{cases}\Rightarrow BM^۲+CN^۲=\frac{۵}{۴}(b^۲+c^۲)$$

$$\Rightarrow ۲۸+۵۲=\frac{۵}{۴}a^۲\Rightarrow a^۲=۶۴\Rightarrow a=۸$$

۲۹. گزینه ۴ تذکر: هر زمان صحبت از تعیین نقطه‌ای با یک ویژگی خاص روی خط بود، ابتدا خط را پارامتری کرده و نقطه‌ای برحسب t بصورت شناور روی آن انتخاب می‌کنیم.

$$L=\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۴}=t\Rightarrow L:\begin{cases}x=۲t\\ y=۳t\\ z=۴t\end{cases}\Rightarrow\ \underbrace{A=(۲t,۳t,۴t)}_{\text{مختصات همه نقاط روی } L}$$

حال فاصله نقطه A را از خط $L':\begin{cases}x=۲\\ y=۳\end{cases}$ محاسبه می‌کنیم و برابر $\sqrt{۱۳}$ قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{۱۳}=\sqrt{(۲t-۲)^۲+(۳t-۳)^۲}\xrightarrow{\text{توان }۲}(t-۱)^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}t=۰\Rightarrow A=(۰,۰,۰)\ \text{غ.ق.}\\ t=۲\Rightarrow A=(۴,۶,۸)\end{cases}$$

مجموع مولفه‌های A برابر $۴+۶+۸=۱۸$ می‌باشد.

۳۰. گزینه ۴ نکته: دو خط زمانی بر هم عمودند که ضرب داخلی بردارهای هادی آن‌ها صفر شود.

ابتدا بردار هادی هریک از خطوط D',D را به دست می آوریم (در تعیین بردارهای مقادیر مخرج کسرها به شرط آنکه ضریب z,y,x در صورت یک باشد، مولفه‌های بردار هادی می‌باشند.)

$$D=\frac{mx}{۳}=\frac{۴-y}{۲}=mz-۳\Rightarrow\frac{x}{\frac{۳}{m}}=\frac{y-۴}{-۲}=\frac{z-\frac{۳}{m}}{\frac{۱}{m}}\Rightarrow D\quad\text{بردار هادی خط}:\vec{u}_D=(\frac{۳}{m},-۲,\frac{۱}{m})$$

تذکر: در معادله پارامترهای ضرایب t مولفه های بردارهای می باشند.

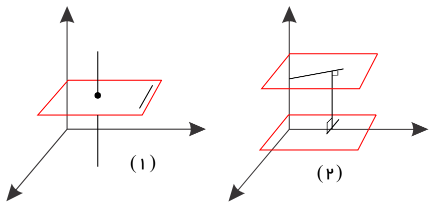
$$D':\begin{cases}x=mt\\ y=t-۷\\ z=۵\end{cases}\Rightarrow D'\quad\text{بردار هادی خط}:\vec{u}_{D'}=(m,۱,-m)$$

$$\vec{u}_D\cdot\vec{u}_{D'}=۰\Rightarrow\frac{۳}{m}(m)-۲(۱)+\frac{۱}{m}(-m)=۰\Rightarrow ۳-۲-۱=۰$$

حال به یک تساوی همواره درست رسیدیم. پس به ازای هر مقدار غیر صفر m دو خط بر عمودند (با توجه به بردارهای خط D، مقدار صفر برای m قابل قبول نیست.)

۳۱. گزینه ۲ برای به دست آوردن عمود مشترک دو خط متنافر در حالت کلی، باید دو نقطه‌ی شناور با پارامترهای مختلف مانند $A(t)$ و $B(t')$ روی دو خط در نظر گرفت، سپس از حل دستگاه:

$$\begin{cases} AB\cdot u_D=\circ \\ AB\cdot u_{D'}=\circ \end{cases}$$



t و t' را به دست آوریم، سپس خط گذرنده از A و B را بنویسیم، اما معادله‌ی عمود مشترک در تست‌ها، معمولاً در یکی از حالت زیر سؤال می‌شود:

۱) یکی از خط‌ها موازی یکی از محورها و خط دوم موازی صفحه‌ی دو محور دیگر باشد. در این صورت باید دو پارامتر در یک خط و پارامتر سوم در خط دیگر عدد ثابت باشند، مانند:

$$d:\begin{cases} \dfrac{x-x_\circ}{a}=\dfrac{y-y_\circ}{b} \\ z=z_\circ \end{cases} \quad , \quad d':\begin{cases} x=x_۱ \\ y=y_۱ \end{cases}$$

برای یافتن معادله‌ی عمود مشترک ابتدا خط موازی محور را با صفحه‌ی خط موازی صفحات دو محور قطع می‌دهیم، یعنی نقطه‌ی $(x=x_۱\ ,\ y=y_۱\ ,\ z=z_\circ)$ ، سپس از نقطه‌ی داخل صفحه بر خط دوم عمود می‌کنیم (بدون آن‌که پارامتر ثابت را لحاظ کنیم) یعنی مثلاً از نقطه‌ی $(x=x_۱\ ,\ y=y_۱)$ بر خط $\dfrac{x-x_\circ}{a}=\dfrac{y-y_\circ}{b}$ عمود رسم می کنیم.

۲) هر دو خط موازی صفحه دو محور باشند، در این صورت باید در معادله‌ی هر دو، متغیر یکسانی عدد ثابت باشد مثلاً:

$$d:\begin{cases} \dfrac{x-x_\circ}{a}=\dfrac{y-y_\circ}{b} \\ z=z_\circ \end{cases} \quad , \quad d'\begin{cases} \dfrac{x-x_۱}{a'}=\dfrac{y-y_۱}{b'} \\ z=z_۱ \end{cases}$$

در این صورت چون عمود مشترک موازی محوری است که ثابت است لذا بدون در نظر گرفتن متغیری که ثابت است معادلات دو خط را در یک دستگاه حل می‌کنیم. نقطه‌ی حاصل از جواب دستگاه در واقع معادله‌ی عمود مشترک دو خط متنافر است.

لذا در این سؤال:

$$D:\begin{cases} ۲x+y=۱ \\ z=۴ \end{cases} \quad D':\begin{cases} x-۲y=۸ \\ z=-۳ \end{cases}$$

هر دو خط موازی صفحه‌ی xoy هستند، پس عمود مشترک آن‌ها عمود بر صفحه‌ی xoy است و باید در معادله‌ی آن x و y اعداد ثابتی باشند، لذا دستگاه زیر را بدون در نظر گرفتن z حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x+y=۱ \\ x-۲y=۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} ۲x+y-۱-۲(x-۲y-۸)=\circ \Rightarrow d'':\begin{cases} y=-۳ \\ x=۲ \end{cases}$$:معادله‌ی عمود مشترک

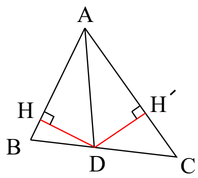
در بین گزینه‌ها تنها نقطه‌ی $(۲\ ,\ -۳\ ,\ ۵)$ روی این خط است.

۳۲. گزینه ۲ مجموع مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD برابر مساحت مثلث ABC است. طول‌های ارتفاع این دو مثلث را DH و DH' فرض می‌کنیم که چون نقطه‌ی D روی نیمساز قرار دارد این دو فاصله با هم برابرند، پس:

$$DH=DH'=h$$

$$S(ABC)=\frac{۱}{۲}AB\times DH+\frac{۱}{۲}AC\times DH'$$

$$=\frac{۱}{۲}\times ۴h+\frac{۱}{۲}\times ۶h=۵h$$

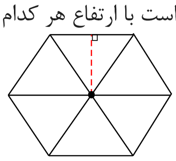


طبق صورت سؤال مساحت مثلث ABC برابر ۱۰ است. پس:

$$۱\circ=۵h\Rightarrow h=۲$$

۳۳. گزینه ۲

در شش ضلعی منتظم که متشکل از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع همنهشت است، فاصله‌ی محل برخورد قطرهای بزرگ از هر کدام از ضلع‌ها، برابر است با ارتفاع هر کدام از آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، پس اگر a طول ضلع شش ضلعی منتظم باشد، خواهیم داشت:



$$\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۶}\Rightarrow a=۲\sqrt{۲} \quad \text{و} \quad S(\text{شش ضلعی})=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$$

$$\Rightarrow S=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\left(۲\sqrt{۲}\right)^{۲}=۱۲\sqrt{۳}$$

۳۴. گزینه ۲ نکته: طول عمودمشترک دو خط متنافر D و D' از دستور $L=\frac{|AB\cdot(u_D\times u_{D'})|}{|u_D\times u_{D'}|}$ به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l} D: x=y=z \\ D': x=\frac{y-۱}{۲}=\frac{z-a}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow u_D\times u_{D'}=(۱,-۲,۱)$$

$A\in D(۰,۰,۰) \quad B\in D'(۰,۱,a)\leftarrow$ صورت کسرها را مساوی صفر قرار دادیم

$$\overrightarrow{AB}=(۰,۱,a)\Rightarrow AB\cdot(u_D\times u_{D'})=۰-۲+a=a-۲$$

$$L=\sqrt{۶}=\frac{|AB\cdot(u_D\times u_{D'})|}{|u_D\times u_{D'}|}\Rightarrow\sqrt{۶}=\frac{|a-۲|}{\sqrt{۱+۴+۱}}\Rightarrow ۶=|a-۲|\Rightarrow\begin{cases}a=۸\\ a=-۴\end{cases}$$

۳۵. گزینه ۳ بردار هادی خط D بردار $\vec{u}=(۳,۰,۱)$ است این بردار محور oy عمود است. زیرا:

$$\vec{u}\cdot j=(۳,۰,۱)\cdot(۰,۱,۰)=۰$$

بنابراین خط بر محور oy عمود است.

دقت کنید اگر در خط D داشتیم $y=۰$ این خط در صفحه xoz قرار گرفت.

۳۶. گزینه ۳ راه حل اول: این دو خط موازی نیستند، چون بردارهای هادی موازی ندارند.

$$u_D=(۱\,,\,۰\,,\,۰) \qquad u_{D'}=(۱\,,\,۱\,,\,۱)$$

لذا کافی است متقاطع نباشند تا متنافر شوند. برای بررسی تقاطع دو خط نقطه‌ای دلخواه به‌صورت پارامتری روی خط D در نظر می‌گیریم مثلاً: $P_۰(t\,,\,۲\,,\,a)$ (برای به دست آوردن نقطه‌ی پارامتری، کافی است معادله‌ی متقارن خط را برابر t قرار دهیم.) و مختصات P را در معادله‌ی D' قرار دهیم:

$$t=۲=a+۲$$

برای تقاطع دو خط باید t به دست آورده از هر ۲ تساوی یکسان باشد. در این‌جا چون دو تا از پارامترهای خط ثابتند. لذا تنها یک t به دست می‌آید که باید تساوی سوم هم برقرار باشد، پس باید:

$$a+۲=۲\Rightarrow a=۰$$

حال اگر $a\neq ۰$ باشد، دو خط متنافر می‌شوند.

راه حل دوم: بردارهای هادی دو خط را حساب کرده و دیدیم که موازی نیستند. پس باید متقاطع نباشند. اگر متقاطع باشند، y در هر دو خط باید ۲ باشد. $y=۲$ را در معادله‌ی دوم جایگذاری می‌کنیم:

$$x=۲=z+۲\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ y=۲\\ z=۰\end{cases}$$

این نقطه باید در خط اول صدق کند تا دو خط متقاطع باشند. در نتیجه $a=۰$، پس برای تنافر دو خط a باید مخالف صفر باشد.

راه حل سوم: $A\in D$ و $B\in D'$ در نظر می‌گیریم. اگر دو خط متنافر باشند $AB\cdot(u_D\times u_{D'})$ غیر صفر می‌شود:

$$A=(۰\,,\,۲\,,\,a)\;\;,\;\;B=(۰\,,\,۰\,,\,-۲)\;\;,\;\;u_D=(۱\,,\,۰\,,\,۰)\;\;,\;\;u_{D'}=(۱\,,\,۱\,,\,۱)$$

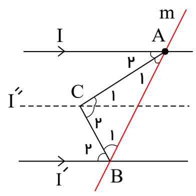
$$AB\cdot(u_D\times u_{D'})=\begin{vmatrix}۰ & -۲ & -۲-a\\ ۱ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=۲+(-۲-a)\neq ۰\Rightarrow a\neq ۰$$

در حالت کلی راه مستقیم کنترل تنافر دو خط این است.

۳۷. گزینه ۲ از رأس C خطی به موازات I و I' رسم می‌کنیم و داریم:

$I \parallel I''\,, AC$ مورب $\Rightarrow \hat{A}_{۲} = \hat{C}_{۱}$

$I' \parallel I'\,, BC$ مورب $\Rightarrow \hat{B}_{۲} = \hat{C}_{۲}$



$$\hat{A}_{۲} + \hat{B}_{۲} = \hat{C}_{۱} + \hat{C}_{۲} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_{۲} + \hat{B}_{۲} \xrightarrow{\text{فرض}} \hat{C} = \frac{۱}{n}\hat{A}_{۱} + \frac{۱}{n}\hat{B}_{۱}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \frac{۱}{n}(\hat{A}_{۱} + \hat{B}_{۱}) \Rightarrow \hat{A}_{۱} + \hat{B}_{۱} = nC \quad (۱)$$

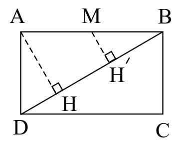
$$A\overset{\Delta}{B}C : \hat{A}_{۱} + \hat{B}_{۱} + \hat{C} = ۱۸۰^{\circ} \xrightarrow{(۱)} n\hat{C} + \hat{C} = ۱۸۰^{\circ}$$

$$\Rightarrow (n+۱)\hat{C} = ۱۸۰^{\circ} \Rightarrow n+۱ = \frac{۱۸۰^{\circ}}{\hat{C}}$$

$$\overset{\text{فرض}}{=\!=} \frac{۱۸۰^{\circ}}{۷۲^{\circ}} = ۲/۵ \Rightarrow n = ۲/۵ - ۱ \Rightarrow n = ۱/۵$$

۳۸. گزینه ۲

نقطه‌ی وسط AB را M می‌نامیم، بنابر داده‌های مسئله $MH' = ۲\sqrt{۳}$ و چون دو مثلث $MH'B$ و ABH متشابه‌اند، پس:



$$\frac{MH'}{AH} = \frac{MB}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AH = ۴\sqrt{۳}$$

ولی در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی دو قطعه‌ی پدید آمده روی وتر است، در نتیجه داریم:

$$AH^{۲} = DH \cdot HB \Rightarrow (۴\sqrt{۳})^{۲} = DH \times ۳DH$$

$$\Rightarrow ۳DH^{۲} = ۴۸ \Rightarrow DH = ۴$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{AH^{۲} + DH^{۲}} = \sqrt{(۴\sqrt{۳})^{۲} + ۴^{۲}} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

۳۹. گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{c} AD = DC \\ \widehat{D} = \widehat{D} = ۹۰^{\circ} \\ AN = CM \end{array}\right\} \Rightarrow D\overset{\Delta}{A}N \cong C\overset{\Delta}{M}D \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} D\widehat{A}N = M\widehat{C}D = ۲۵^{\circ} \\ DM = DN \end{array}\right.$$

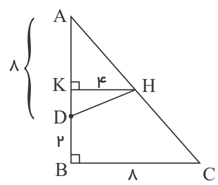
$$D\overset{\Delta}{M}C : D\widehat{M}C = ۹۰^{\circ} - M\widehat{C}D = ۹۰^{\circ} - ۲۵^{\circ} = ۶۵^{\circ}$$

$$D\overset{\Delta}{M}N : \widehat{D} = ۹۰^{\circ} \;,\; DM = DN \Rightarrow D\widehat{M}N = D\widehat{N}M = ۴۵^{\circ}$$

$$C\widehat{M}N = D\widehat{M}C - D\widehat{M}N = ۶۵^{\circ} - ۴۵^{\circ} = ۲۰^{\circ}$$

۴۰. گزینه ۲

$$K = ۹۰^{\circ} \;,\; AC \text{ وسط } H \Rightarrow \frac{KH}{BC} = \frac{AH}{AC} = \frac{AK}{AB} = \frac{۱}{۲}$$



$$\Rightarrow \frac{KH}{۸} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow KH = ۴$$

$$\frac{AK}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AK = \frac{AB}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵ \Rightarrow DK = AD - AK$$

$$\Rightarrow DK = ۸ - ۵ = ۳$$

$$D\overset{\Delta}{K}H : DH^{۲} = KH^{۲} + DK^{۲} \Rightarrow DH^{۲} = ۳^{۲} + ۴^{۲} \Rightarrow DH = ۵$$

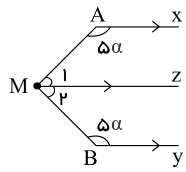
۴۱. گزینه ۳ معادلات خطوط Δ , Δ' با فرض $y=t$ به ترتیب $\begin{cases} x=۲t \\ y=t \\ z=۱ \end{cases}$ و $\begin{cases} x=\frac{۳}{۲}t \\ y=t \\ z=t+۱ \end{cases}$ می‌باشد، یعنی بردارهای هادی آن‌ها به ترتیب $u=(۲,۱,۰)$ و $u'=(\frac{۳}{۲},۱,۱)$ هستند. چون خط D بر این دو خط عمود است، پس بردار هادی آن یعنی v به‌صورت زیر است:

$$v=u\times u'=(۱,-۲,\frac{۱}{۲})\xrightarrow{\times ۲}(۲,-۴,۱)$$

معادله‌ی خط D عبارت است از:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{-۴}=\frac{z}{۱}\xrightarrow{\times ۴}۲x=-y=۴z$$

۴۲. گزینه ۳ مطابق شکل از M، نیم خط Mz را موازی با نیم خط‌های Ax و By رسم می‌کنیم. داریم:



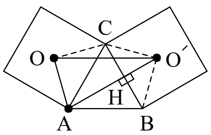
$$\begin{cases} Mz\|Ax\Rightarrow \hat{M}_۱+۵\alpha=۱۸۰^\circ \\ Mz\|By\Rightarrow \hat{M}_۲+۵\alpha=۱۸۰^\circ \end{cases}\Rightarrow(\hat{M}_۱+\hat{M}_۲)+۱۰\alpha=۳۶۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۹۰^\circ}۱۰\alpha=۲۷۰^\circ\Rightarrow\alpha=۲۷^\circ$$

در چهار ضلعی $AMBN$، مجموع زوایای داخلی ۳۶۰ درجه است. پس:

$$۴\alpha+۹۰^\circ+۳\alpha+\hat{N}=۳۶۰^\circ\xrightarrow{\alpha=۲۷^\circ}۱۰۸^\circ+۹۰^\circ+۸۱^\circ+\hat{N}=۳۶۰^\circ\Rightarrow\hat{N}=۸۱^\circ$$

۴۳. گزینه ۲ مثلث AOO' را رسم می‌کنیم. همچنین از O' به دو رأس B و C وصل می‌کنیم. چون $O'B=O'C$ (زیرا محل تلاقی قطرهای مربع از رأس‌های آن به یک فاصله است.) نتیجه می‌شود $\overset{\Delta}{O'CB}$ متساوی‌الساقین است. باتوجه به همنهشتی دو مثلث $O'AB$ و $O'AC$ (به حالت تساوی سه ضلع)، مشخص می‌گردد که $O'H$ نیمساز زاویه ی $BO'C$ است.



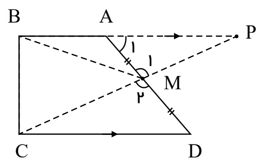
پس $O'H$ میانه (و نیز ارتفاع) وارد بر BC است. می‌دانیم $O\hat{A}C=۴۵^\circ$. بنابراین به کمک زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع و مربع و همچنین متساوی‌الساقین بودن مثلث COO'، خواهیم داشت:

$$O'\hat{A}O=O'\hat{A}C+C\hat{A}O=۳۰^\circ+۴۵^\circ=۷۵^\circ \qquad (I)$$

$$\begin{cases} O\hat{C}O'=۶۰^\circ+۴۵^\circ+۴۵^\circ=۱۵۰^\circ \\ C\hat{O}O'=C\hat{O'}O=\frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ-۱۵۰^\circ)=۱۵^\circ \end{cases}$$

و چون $C\hat{O}A=۹۰^\circ$، پس: $O'\hat{O}A=۹۰^\circ-۱۵^\circ=۷۵^\circ \quad (II)$. از این‌رو مثلث OAO'، بنابر (I) و (II) یک مثلث متساوی الساقین است.

۴۴. گزینه ۲



$$\begin{cases} AD \text{ وسط}: AM=MD \\ AP\parallel CD\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{D}\Rightarrow \overset{\Delta}{AMP}\cong\overset{\Delta}{MCD}\Rightarrow CM=MP \\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲ \end{cases}$$

میانه مثلث مساحت آن را نصف می‌کند. داریم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{PBC} : BM \text{ میانه} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BMC}} = \frac{۱}{۲} S_{\overset{\Delta}{BPC}} \\ \overset{\Delta}{AMP} \cong \overset{\Delta}{MCD} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{AMP}} = S_{\overset{\Delta}{MCD}} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{\overset{\Delta}{BPC}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BMC}} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD} = ۲ \times ۲۰ = ۴۰$$

۴۵. گزینه ۴ بردارهای هادی دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را به ترتیب $u_۱$ و $u_۲$ نامیده و نقاط دلخواه M, N را به ترتیب روی دو خط $d_۱$ و $d_۲$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\left.\begin{matrix} u_۱(۱,۲,-۲) \\ u_۲(۱,-۱,۱) \end{matrix}\right\} \Rightarrow u = u_۱ \times u_۲ = (۰,-۳,-۳)$$

$$\left.\begin{matrix} M(-۱,۰,۰) \\ N(۰,۱,-۲) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (۱,۱,-۲)$$

$$d_۲, d_۱ \text{ طول عمود مشترک در خط} = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot u|}{|u|} = \frac{|۰-۳+۶|}{\sqrt{۰+۹+۹}} = \frac{۳}{۳\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۶. گزینه ۲

$$D: \frac{x-۱}{۲} = \frac{۳-y}{۲} = z+۱ \Rightarrow \overrightarrow{u_D} = (۲,-۲,۱)$$

$$D': x-۳ = -y = ۲(z-۱) \Rightarrow \overrightarrow{u_{D'}} = (۱,-۱,\frac{۱}{۲}) \xrightarrow{\times ۲} \overrightarrow{u_{D'}} = (۲,-۲,۱)$$

چون D و D' بردارهای هادی یکسان دارند، باهم موازی‌اند. به این ترتیب، فاصله بین این دو خط، طول ضلع مربع می‌باشد و آن، فاصله یک نقطه یکی از خط‌ها، از خط دیگر است:
فاصله نقطه اختیاری $A(۱,۳,-۱)$ واقع بر خط D را از خط D' محاسبه می‌کنیم:

D' نقطه دلخواه خط $B(۳,۰,۱)$

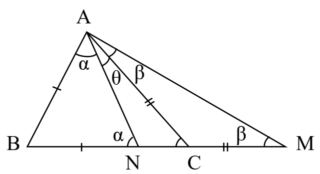
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_۲-x_۱, y_۲-y_۱, z_۲-z_۱) = (۲,-۳,۲)$$

$$\overrightarrow{AB} \times u = (۲,-۳,۲) \times (۲,-۲,۱) = (۱,۲,۲)$$

$$h = \frac{|(۱,۲,۲)|}{|(۲,-۲,۱)|} = \frac{\sqrt{۱+۴+۴}}{\sqrt{۴+۴+۱}} = \frac{۳}{۳} = ۱ \Rightarrow \text{طول ضلع مربع } a = ۱$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مربع } S = a^۲ = ۱$$

۴۷. گزینه ۴ مطابق داده‌های مسئله در مثلث ABC، $\hat{A} = ۶۴^\circ$ است، پس $\alpha + \theta = ۶۴^\circ$.



زاویه‌ی $A\hat{C}B$، زاویه‌ی خارجی مثلث ACM است پس $A\hat{C}B = ۲\beta$ و $A\hat{N}B$ هم زاویه‌ی خارجی مثلث AMN است. پس:

$$\alpha = M\hat{A}N + \beta = ۲\beta + \theta$$

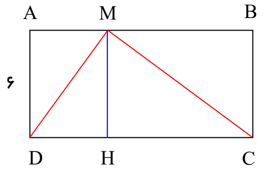
در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$\hat{A} = \alpha + \theta = ۶۴^\circ \Rightarrow (۲\beta + \theta) + \theta = ۶۴^\circ \Rightarrow ۲\beta + ۲\theta = ۶۴^\circ$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = ۳۲^\circ$$

که همان زاویه‌ی $M\hat{A}N$ است.

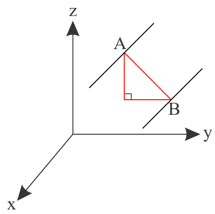
۴۸. گزینه ۱
ارتفاع MH در مثلث قائم الزاویه DMC را رسم می‌کنیم. بنابر رابطه‌ی طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:



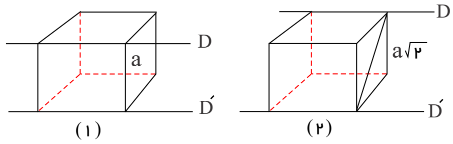
$$MH^{۲} = DH \times CH \Rightarrow ۶^{۲} = AM \times MB \Rightarrow AM \times MB = ۳۶$$

۴۹. گزینه ۳ اگر دو خط هر دو موازی یکی از محورها باشند، کافی است فاصله‌ی آن‌ها را مانند دو نقطه در صفحه به دست آوریم. مثلاً اگر دو خط موازی محور x ها باشند، خواهیم داشت:

$$D:\begin{cases} y = y_{۰} \\ z = z_{۰} \end{cases} \quad D':\begin{cases} y = y_{۱} \\ z = z_{۱} \end{cases} \Rightarrow |AB| = \sqrt{\Delta y^{۲} + \Delta z^{۲}}$$



دو خط موازی‌اند، بنابراین مطابق شکل‌ها دو حالت برای یال موازی وجود دارد. (بسته به آن‌که دو خط داده شده کدام یال مکعب باشند.)



$$\text{فاصله‌ی دو خط} = \sqrt{(-۴-۲)^{۲} + (۵+۳)^{۲}} = ۱۰ \quad (۱)$$

$$۱)\ a = \sqrt{۳۶+۶۴} = ۱۰ \Rightarrow a = ۱۰ \Rightarrow V = a^{۳} = ۱۰۰۰$$

$$۲)\ a\sqrt{۲} = \sqrt{۳۶+۶۴} = ۱۰ \Rightarrow a = \frac{۱۰}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow V = a^{۳} = \frac{۱۰۰۰}{۲\sqrt{۲}} = ۲۵۰\sqrt{۲}$$

۵۰. گزینه ۳ تذکر: فاصله نقطه A از خط d از دستور $L = \dfrac{\left|\overrightarrow{AA_{۰}} \times \overrightarrow{ud}\right|}{|ud|}$ بدست می آید. که در آن $A_{۰}$ نقطه دلخواهی از خط d می باشد.

$$\begin{cases} \dfrac{x-۱}{۲} = y \\ \dfrac{y+۲}{۳} = \dfrac{z}{۶} \end{cases} \xrightarrow{y} \begin{cases} \dfrac{x-۱}{۲} = y \\ y = \dfrac{z-۴}{۲} \end{cases} \rightarrow d: \frac{x-۱}{۲} = y = \frac{z-۴}{۲}$$

با انتخاب نقطه $(۱, ۰, ۴)$ $A_{۰}$ روی خط d داریم:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA_{۰}} = (۰, ۲, ۱) \\ ud = (۲, ۱, ۲) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AA_{۰}} \times ud = (۵, -۲, -۴)$$

$$\text{فاصله } A \text{ ازخط } d = L = \frac{\left|\overrightarrow{AA_{۰}} \times ud\right|}{|ud|} = \frac{\sqrt{۲۵+۴+۱۶}}{\sqrt{۴+۱+۴}} = \sqrt{۵}$$