دبیرستان علامه حلی تهران

۲۱. گزینه ۴ مثلث ABC در رأس B قائم‌الزاویه است اگر a ضلع مکعب باشد آنگاه $BC=a\sqrt{۲}$ و $AC=a\sqrt{۳}$ در این مثلث کسینوس زاویه‌ی C را باید محاسبه کنیم.

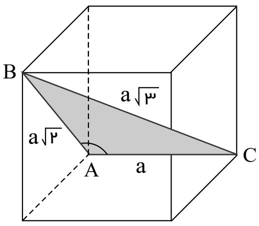
$$\cos C=\frac{BC}{AC}=\frac{a\sqrt{۲}}{a\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

۲۲. گزینه ۱ در حقیقت حجم مکعب به یال a برابر حجم استوانه به شعاع قاعده‌ی a و ارتفاع h می‌باشد.

$V_۱=a^۳$ حجم مکعب ، $V_۲=\pi r^۲h=\pi a^۲h$ حجم استوانه

$$V_۱=V_۲\Rightarrow a^۳=\pi a^۲h\Rightarrow a=\pi h\Rightarrow h=\frac{a}{\pi}$$

۲۳. گزینه ۱



ته: در مکعبی به طول یال a داریم: $a^۳=$ حجم ، $\sqrt{۳}a=$ قطر مکعب ، $\sqrt{۲}a=$ قطر وجه

$$\begin{cases} AC=a : \text{یال مکعب} \\ AB=a\sqrt{۲} : \text{قطر وجه} \\ BC=a\sqrt{۳} : \text{قطر مکعب} \end{cases}$$

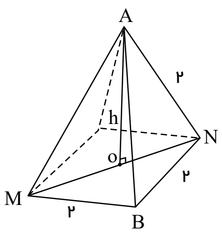
سه عدد، فیثاغورسی‌اند $\left[a^۲+(a\sqrt{۲})^۲=(a\sqrt{۳})^۲\right]$. پس مثلث ABC در رأس A قائمه است.

$$\text{حجم}: V=a^۳=۱$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}a\sqrt{۲}\times a=\frac{a^۲\sqrt{۲}}{۲}\xlongequal{\text{طبق فرض}}\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a^۲=۱\xrightarrow{a>۰}a=۱$$

۲۴. گزینه ۴ نکته: حجم هرمی با مساحت قاعده‌ی S و ارتفاع h، برابر است با: $V=\frac{۱}{۳}Sh$

ابتدا طول ارتفاع هرم را به دست می‌آوریم.



$$MN=MB\sqrt{۲}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow ON=\frac{MN}{۲}=\sqrt{۲}$$

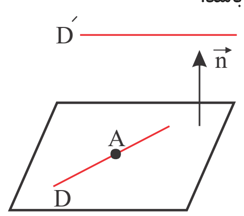
حال با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAN داریم:

$$OA=\sqrt{AN^۲-ON^۲}=\sqrt{۴-۲}=\sqrt{۲}\Rightarrow h=\sqrt{۲}$$

بنابراین با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}S\cdot h=\frac{۱}{۳}\times ۲^۲\times\sqrt{۲}=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$$

۲۵. گزینه ۲ بردار نرمال این صفحه بر بردار هادی هر دو خط D و D' عمود است، پس می‌تواند ضرب خارجی بردارهای هادی این دو خط باشد:

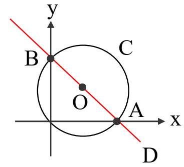


$$\vec{n_P}=\vec{u_D}\times\vec{u_{D'}}=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{vmatrix}=(۱\,,\,-۱\,,\,۱)$$

حال نقطه‌ای دلخواه از خط D مانند $A(۰\,,\,۰\,,\,۲)$ را انتخاب کرده و معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم:

$A(۰,۰,۲)\in P \Rightarrow P$ معادله‌ی صفحه : $۱(x-۰)-۱(y-۰)+۱(z-۲)=۰ \Rightarrow P: x-y+z=۲$

۲۶. گزینه ۳ محل تلاقی دایره با محورهای مختصات، دو سر قطر این دایره است که روی خط D قرار دارند:



$$x+۳y=۶:\begin{cases} y_A=۰ \Rightarrow x_A=۶ \Rightarrow & A(۶\,,\,۰) \\ x_B=۰ \Rightarrow y_B=۲ \Rightarrow & B(۰\,,\,۲) \end{cases}$$

مرکز دایره : $O=\dfrac{A+B}{۲}=(۳\,,\,۱)\;,\;۲R=AB=\sqrt{۳۶+۴}=۲\sqrt{۱۰}\Rightarrow R=\sqrt{۱۰}$

معادله‌ی دایره : $(x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۱۰ \Rightarrow x^۲+y^۲-۶x-۲y=۰$

۲۷. گزینه ۲ راه حل اول: برای به‌دست آوردن نزدیک‌ترین و دورترین نقاط یک دایره از نقطه‌ی داده شده، ابتدا قطر (یا امتداد قطری) که از نقطه‌ی داده شده می‌گذرد را رسم می‌کنیم. یکی از نقاط تقاطع این قطر (یا امتداد قطر) با دایره، نزدیک‌ترین نقطه و نقطه‌ی تقاطع دیگر دورترین نقطه است.

A: خارج دایره است

$$\begin{cases} Lmax = \text{بیشترین فاصله} = AN = OA+R \\ Lmin = \text{کمترین فاصله} = AM = OA-R \end{cases}$$

A: داخل دایره است

$$\begin{cases} Lmax = \text{بیشترین فاصله} = AN = OA+R \\ Lmin = \text{کمترین فاصله} = AM = R-OA \end{cases}$$

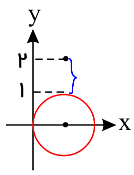
$$x^۲+y^۲-۲x=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲+y^۲=۱ \Rightarrow \begin{cases} O=\begin{vmatrix} ۱ \\ ۰ \end{vmatrix} \\ R=۱ \end{cases}$$

$c(۱,۱۲)=۱^۲+۱۲^۲-۲(۱)>۰ \rightarrow$ A خارج دایره است

$\Rightarrow d=OA=\sqrt{۰+۴}=۲ \Rightarrow |AM|=|d-R|=|۲-۱|=۱$

راه حل دوم: ابتدا شکل را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل واضح است که کمترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از دایره برابر ۱ است.



۲۸. گزینه ۲ چون مرکز دایره روی قطر آن قرار دارد، ابتدا مرکز دایره را به دست آورده و سپس در معادله‌ی قطر آن صدق می‌دهیم:

$$O(-\frac{a}{۲}\,,\,-\frac{b}{۲})\Rightarrow O(m\,,\,\frac{-m+۱}{۲})\Rightarrow -m+۱-m=۱\Rightarrow m=۰$$

معادله‌ی دایره به صورت زیر در می‌آید:

$$x^۲+y^۲-y=۶\Rightarrow (x)^۲+(y-\frac{۱}{۲})^۲=۶+\frac{۱}{۴}=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow R=\frac{۵}{۲}$$

یا: $R=\dfrac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\dfrac{\sqrt{۰+۱+۲۴}}{۲}=\dfrac{۵}{۲}$

تذکر: در دایره‌ی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ مرکز به صورت $O(-\frac{a}{۲}\,,\,-\frac{b}{۲})$ است و شعاع دایره از رابطه‌ی $R=\dfrac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$ به دست می‌آید.

البته به جای رابطه‌ی فوق می‌توان به یاد سپرد:

$$R=\sqrt{\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۴}-c}=\sqrt{(-\frac{a}{۲})^۲+(-\frac{b}{۲})^۲-c}=\sqrt{x^۲_{\text{مرکز}}+y^۲_{\text{مرکز}}-c}$$

۲۹. گزینه ۳ ابتدا هادی دو خط را به دست می‌آوریم (برای این منظور ضرایب متغیرها را در صورت کسر یک می‌کنیم. سپس مخرج کسر را به عنوان هادی در نظر می‌گیریم).

$$D: x-۱=\frac{y}{۲}=\frac{z-۱}{-۱}\Rightarrow u_D=(۱\,,\,۲\,,\,-۱)$$

در معادله D' برای بدست آوردن معادله متقارن مولفه y را در هر معادله تنها می‌کنیم:

$$D':\begin{cases} y=1-x \\ y=2+z \end{cases} \Rightarrow D': \frac{x-1}{-1}=y=2+z \Rightarrow u_{D'}=(-1\,,\,1\,,\,1)$$

چون خط مطلوب بر هر دو خط عمود است، لذا هادی خط مطلوب بر هادی هر دو خط عمود است:

$$u_{D''}=u_D\times u_{D'}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3i+3k \quad \text{یا} \quad u_{D''}=(1\,,\,0\,,\,1)$$

دقت کنید که هر ضریبی از هادی خط را می‌توان به عنوان هادی خط در نظر گرفت.

$$A(1,0,-2)\in D'' \Rightarrow D'': \frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z+2}{1}$$

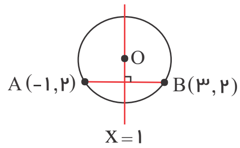
$$\Rightarrow D'':\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z+2}{1} \\ y=0 \end{cases} \xrightarrow[y=z=0]{\text{برخورد با محور } (x)} \frac{x-1}{1}=2 \Rightarrow x=3$$

نکته) اگر معادله پارامتری خط داده شود، همان ضرایب t در واقع مؤلفه‌های هادی خط است.

۳۰. گزینه ۴ راه ۱) چون مرکز دایره از نقاط A و B به یک فاصله است، پس باید مرکز روی عمود منصف AB باشد که مطابق شکل خط $x=1$ است، بنابراین برای یافتن مرکز باید خط $x=1$ را با خط $y=3x$ قطع دهیم:

$$\begin{cases} y=3x \\ x=1 \end{cases} \text{مرکز } O(1\,,\,3)$$

$$\xrightarrow[\text{از نقاط شعاع است}]{\text{فاصله مرکز از هر یک}} R=OA=OB=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$



البته روش کلی یافتن عمود منصف یک پاره‌خط آن است که نقطه‌ی میانی A و B را به‌دست آوریم $(M=\dfrac{A+B}{2})$ سپس شیب AB را محاسبه و قرینه و معکوس کنیم تا شیب خط عمود به‌دست آید.

$$\left.\begin{aligned} mAB&=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-2}{3-(-1)}=0\Rightarrow m'=\infty \\ M&=\frac{A+B}{2}=\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{عمود منصف}: x=1$$

راه ۲) $O\big|_{\beta}^{\alpha}$ مرکز دایره است.

$$O\big|_{\beta}^{\alpha}\in y=3x \Rightarrow \beta=3\alpha \Rightarrow O\big|_{3\alpha}^{\alpha}$$

$$|OA|=|OB|\Rightarrow \sqrt{(\alpha+1)^2+(3\alpha-2)^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+(3\alpha-2)^2}\xrightarrow{\text{توان } 2}\alpha=1\Rightarrow \beta=3\alpha=3\rightarrow O\big|_{3}^{1}$$

$$R=|OA|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

۳۱. گزینه ۱ ابتدا $x=5$ را در معادله‌ی خط صدق می‌دهیم تا مختصات نقطه‌ی تلاقی به‌دست آید:

$$x+1=2y=z+2\xrightarrow{x=5}6=2y=z+2\Rightarrow\begin{cases} y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

حال نقطه‌ی تلاقی باید در معادله‌ی صفحه صدق کند:

$$M(5\,,\,3\,,4)\xrightarrow{\text{در صفحه}}5k+3(k-1)+4=9\Rightarrow 8k-3+4=9\Rightarrow 8k=8\Rightarrow k=1$$

۳۲. گزینه ۳ راه‌حل اول:

معادله دایره گذرا از این سه نقطه را به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} A: \text{روی دایره} & 16+4a+c=0 & (1) \\ B: \text{روی دایره} & 4-2a+c=0 & (2) \\ C: \text{روی دایره} & 16-4b+c=0 & (3) \end{cases}$$

از (۱) و (۲) داریم: $c=-8$ و $a=-2$ با جایگذاری در (۳) داریم: $b=2$

بنابراین معادله این دایره به صورت زیر است:

$x^۲+y^۲-۲x+۲y-۸=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲-۱+(y+۱)^۲-۱-۸=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۱۰ \Rightarrow$
شعاع : $r=\sqrt{۱۰}$

راه‌حل دوم:

نکته: مرکز دایره محیطی مثلث ABC، محل تقاطع عمود منصف‌های اضلاع مثلث است.

باتوجه به نکته بالا، ابتدا معادله عمود منصف‌های اضلاع AC و BC را می‌نویسیم:

$AC : C$ و A وسط: $\frac{A+C}{۲}=(۲,-۲)$ ، شیب AC: $m=\frac{۰-(-۴)}{۴-۰}=۱ \Rightarrow$ شیب عمود منصف AC : $m'=-۱$

معادله‌ی عمود منصف AC : $y-(-۲)=-۱(x-۲)\Rightarrow y=-x$

$BC : C$ و B وسط : $\frac{B+C}{۲}=(-۱,-۲)$ ، شیب BC

$: m=\frac{-۴-۰}{۰-(-۲)}=-۲ \Rightarrow$ شیب عمود منصف BC: $m'=\frac{۱}{۲}$

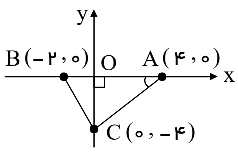
معادله عمود منصف BC : $y-(-۲)=\frac{۱}{۲}(x-(-۱))\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$

حال محل تقاطع این دو خط را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}\\ y=-x\end{cases} \Rightarrow -x=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲} \Rightarrow -\frac{۳}{۲}x=\frac{-۳}{۲}\Rightarrow x=۱\Rightarrow y=-۱$$
مرکز دایره: $O(۱,-۱)$

بنابراین شعاع دایره برابر است با: $|OA|=\sqrt{(۱-۴)^۲+(-۱-۰)^۲}=\sqrt{۱۰}$

راه‌حل سوم:



نکته (قضیه سینوس‌ها): در مثلث دلخواه ABC داریم: $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲r$ که در آن r شعاع دایره محیطی مثلث ABC، یعنی دایره گذرا از نقاط A و B و C است.

$\overset{\Delta}{OAC} : \tan\hat{A}=\frac{OC}{OA}=\frac{۴}{۴}=۱\Rightarrow \hat{A}=۴۵^\circ$

طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲r \xrightarrow[\hat{A}=۴۵^\circ]{a=BC} \frac{BC}{\sin ۴۵^\circ}=۲r\Rightarrow ۲r=\frac{\sqrt{۴+۱۶}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲۰}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}\Rightarrow r=\sqrt{۱۰}$$

۳۳. گزینه ۴ صفحه Q با خط D موازی است. پس نرمال این صفحه بر هادی خط D عمود است. هم‌چنین چون صفحه Q بر صفحه P عمود است. نرمال این صفحه نیز بر نرمال صفحه P عمود است. لذا نرمال صفحه Q باید ضرب خارجی هادی خط D و نرمال صفحه P باشد.

دقت داریم که خط D بر صفحه P عمود نیست؛ زیرا ضرب خارجی بردار نرمال صفحه P در بردار هادی خط D صفر نیست. بنابراین:

$$\vec{N}=\vec{n}_۱\times\vec{u}_۱=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۳ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۱ & ۱\end{vmatrix}=(-۲,-۱,۵)$$

حال چون صفحه Q از نقطه $M(۳,۱,۲)$ می‌گذرد، پس معادله آن عبارتست از: $-۲x-y+۵z=۳$

باتوجه به معادله صفحه، تنها گزینه ۴ در آن صدق می‌کند.

۳۴. گزینه ۳

$$\begin{cases} \dfrac{x-۱}{۲}=\dfrac{y+۲}{۳},\ z=۱ & :\overrightarrow{u_۱}=(۲,۳,۰) \\ \dfrac{x-۳}{۲}=\dfrac{y}{۵}=\dfrac{z+۱}{۲} & :\overrightarrow{u_۲}=(۲,۵,۲) \end{cases}$$

چون بردارهای هادی دو خط موازی نیستند، پس دو خط نمی‌توانند موازی یا منطبق باشند، چون در یکی از خط‌ها $z=۱$ است. پس اگر دو خط متقاطع باشند، ارتفاع نقطه‌ی تقاطع برابر ۱ است. بنابراین $z=۱$ را در خط دوم قرار داده و نقطه‌ی حاصل را در خط اول امتحان می‌کنیم. اگر صدق کرد، متقاطع هستند و در غیراین‌صورت متنافرند:

$$z=۱ \Rightarrow \frac{x-۳}{۲}=\frac{y}{۵}=\frac{۱+۱}{۲}=۱ \Rightarrow (۵,۵,۱)$$

نقطه‌ی $(۵,۵,۱)$ در خط اول صدق نمی‌کند. پس این دو خط متنافرند.

۳۵. گزینه ۳

$$\begin{matrix} u_۱=(۲,۳,۴) \\ u_۲=(۳,۱,۲) \end{matrix} \Rightarrow u_۱ \not\parallel u_۲ \Rightarrow$$ خطوط $L_۱$ و $L_۲$ موازی یا منطبق نیستند

حال برای بررسی متقاطع یا متنافر بودن این دو خط، معادله پارامتری $L_۱$ را در $L_۲$ قرار می‌دهیم:

$$L_۱:\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۲}{۳}=\frac{z}{۴}=t$$

$$\Rightarrow L_۱:\begin{cases} x=۲t+۱ \\ y=۳t+۲ \\ z=۴t \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در } L_۲} L_۲: \quad \frac{۲t+۱+۲}{۳}=۳t+۲-۱=\frac{۴t+۲}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۲t+۳}{۲}=۳t+۱ \Rightarrow ۷t=۰ \Rightarrow t=۰ \\ ۳t+۱=۲t+۱ \rightarrow t=۰ \end{cases}$$

چون از هر دو مرحله جواب یکسان بدست آمد پس دو خط متقاطع‌اند.