



دبیرستان علامه حلی تهران

۲۱. گزینه ۳ نکته: طول قطر مکعب مستطیلی به ابعاد a ، b و c برابر است با:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

بیشترین فاصله‌ی دو راس در واقع طول قطر مکعب مستطیل است:

$$d = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

۲۲. گزینه ۴

بنابر فرض تست داریم:

$$SA = \sqrt{17}, SM = 4$$

$$AM^2 = SA^2 - SM^2 = 17 - 16 = 1 \Rightarrow AM = 1$$

$$SH^2 = SM^2 - HM^2 = 16 - 1 = 15 \Rightarrow SH = \sqrt{15}$$

۲۳. گزینه ۲

$$\text{حجم استوانه} - \text{حجم مکعب مستطیل} = \text{حجم فضای بین مکعب مستطیل و استوانه}$$

$$6 \times 6 \times 10 - \pi(3)^2 \times 10 = 90(4 - \pi)$$

۲۴. گزینه ۳ نکته: در مکعب مستطیلی با یال‌های a ، b و c ، اندازه‌ی قطر برابر $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ و اندازه‌ی قطر وجه‌ها برابر $\sqrt{a^2 + b^2}$ ، $\sqrt{a^2 + c^2}$ و $\sqrt{b^2 + c^2}$ است.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \xrightarrow{a=2, b=3, d=6} 6 = \sqrt{2^2 + 3^2 + c^2} = \sqrt{13 + c^2} = c^2 = 23$$

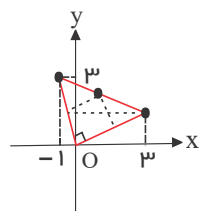
بنابراین اندازه‌ی بزرگترین قطر وجه برابر است با:

$$\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{9 + 23} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

۲۵. گزینه ۳ راه کلی به‌دست آوردن شعاع دایره‌ی محیطی آن است که مرکز دایره‌ی محیطی (محل تلاقی عمود منصف‌ها) را به‌دست آورده

فاصله‌ی آن را از رئوس مثلث به‌دست آوریم

اما معمولاً در تست‌ها، مثلث در یکی از حالات قائم‌الزاویه یا متساوی‌الاضلاع مورد پرسش قرار می‌گیرد. در این‌جا چون



$$OA \cdot OB = 3(-1) + 1(3) = 0$$

$$OA = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ و } OB = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix} \text{ است، پس:}$$

لذا مثلث OAB قائم‌الزاویه است.

در مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر مرکز دایره محیطی و نصف وتر شعاع دایره محیطی است:

$$|AB| = \sqrt{(3+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۲۶. گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} A(1, -1, 2) \xrightarrow[\text{به } yoz]{\text{قرینه نسبت}} A'(-1, -1, 2) \\ B(0, 2, 1) \xrightarrow[\text{به } xoy]{\text{قرینه نسبت}} B'(0, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (1, 3, -3) = \overrightarrow{ud} \xrightarrow{B' \in d} d: \frac{x-0}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-3}$$

نکات:

(۱) معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $A = (x_0, y_0, z_0)$ و موازی بردار $u = (a, b, c)$ عبارت است از:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

(۲) برای به دست آوردن معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی A و B ، پیکان $\overrightarrow{AB}$ را به عنوان بردار هادی خط در نظر می‌گیریم.

(۳) نمایش معادله‌ی خط منحصربه‌فرد نیست. اگر معادله‌ی خط را با نقطه‌ی دیگری بنویسیم، یا بردار هادی خط را در عددی ضرب کنیم، نمایش جدیدی از معادله‌ی خط به وجود می‌آید.

۲۷. **گزینه ۲** راه حل اول: برای به دست آوردن نزدیک‌ترین و دورترین نقاط یک دایره از نقطه‌ی داده شده، ابتدا قطر (یا امتداد قطری) که از نقطه‌ی داده شده می‌گذرد را رسم می‌کنیم. یکی از نقاط تقاطع این قطر (یا امتداد قطر) با دایره، نزدیک‌ترین نقطه و نقطه‌ی تقاطع دیگر دورترین نقطه است.

A : خارج دایره است

A : داخل دایره است

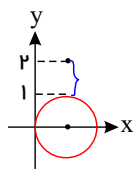
$$\begin{cases} L_{max} = \text{فاصله بیشترین} = AN = OA + R \\ L_{min} = \text{فاصله کمترین} = AM = OA - R \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_{max} = \text{فاصله بیشترین} = AN = OA + R \\ L_{min} = \text{فاصله کمترین} = AM = R - OA \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} O = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ R = 1 \end{cases}$$

$$c(1, 12) = 1^2 + 12^2 - 2(1) > 0 \Rightarrow A \text{ خارج دایره است}$$

$$\Rightarrow d = OA = \sqrt{0 + 4} = 2 \Rightarrow |AM| = |d - R| = |2 - 1| = 1$$



راه حل دوم: ابتدا شکل را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل واضح است که کمترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از دایره برابر ۱ است.

۲۸. **گزینه ۳**

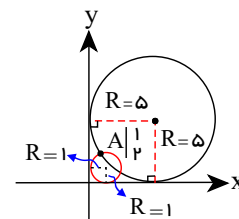
معادله‌ی دایره‌ای که در ناحیه‌ی اول بر محورهای مختصات مماس است، عبارت است از:

$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

نقطه‌ی $A(1, 2)$ باید در این دایره صدق کند:

$$(1 - R)^2 + (2 - R)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (R - 1)(R - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \Rightarrow S = \pi \\ R = 5 \Rightarrow S = 25\pi \end{cases}$$



۲۹. **گزینه ۳** ابتدا هادی دو خط را به دست می‌آوریم (برای این منظور ضرایب متغیرها را در صورت کسر یک می‌کنیم. سپس مخرج کسر را به عنوان هادی در نظر می‌گیریم).

$$D: x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z - 1}{-1} \Rightarrow u_D = (1, 2, -1)$$

در معادله D' برای بدست آوردن معادله متقارن مولفه y را در هر معادله تنها می‌کنیم:

$$D': \begin{cases} y = 1 - x \\ y = 2 + z \end{cases} \Rightarrow D': \frac{x - 1}{-1} = y = 2 + z \Rightarrow u_{D'} = (-1, 1, 1)$$

چون خط مطلوب بر هر دو خط عمود است، لذا هادی خط مطلوب بر هادی هر دو خط عمود است:

$$u_{D''} = u_D \times u_{D'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3i + 3k \quad \text{یا} \quad u_{D''} = (1, 0, 1)$$

دقت کنید که هر ضریبی از هادی خط را می‌توان به عنوان هادی خط در نظر گرفت.

$$A(1, 0, -2) \in D'' \Rightarrow D'': \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z+2}{1}$$

$$\Rightarrow D'': \begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{z+2}{1} & \text{برخورد با محور } (x) \\ y=0 \end{cases} \xrightarrow{y=z=0} \frac{x-1}{1} = 2 \Rightarrow x=3$$

نکته) اگر معادله پارامتری خط داده شود، همان ضرایب t در واقع مؤلفه‌های هادی خط است.

۳۰. گزینه ۴ راه ۱) چون مرکز دایره از نقاط A و B به یک فاصله است، پس باید مرکز روی عمود منصف AB باشد که مطابق شکل خط $x=1$ است، بنابراین برای یافتن مرکز باید خط $x=1$ را با خط $y=3x$ قطع دهیم:

$$\begin{cases} y=3x \\ x=1 \end{cases} \text{ مرکز } O(1, 3)$$

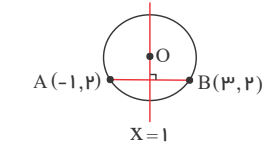
فاصله مرکز از هر یک

$$\rightarrow R = OA = OB = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

از نقاط شعاع است

البته روش کلی یافتن عمود منصف یک پاره‌خط آن است که نقطه‌ی میانی A و B را به دست آوریم ($M = \frac{A+B}{2}$) سپس شیب AB را محاسبه و قرینه و معکوس کنیم تا شیب خط عمود به دست آید.

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-2}{3-(-1)} = 0 \Rightarrow m' = \infty \\ M &= \frac{A+B}{2} = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{عمود منصف: } x=1$$



راه ۲) $O \mid \beta^\alpha$ مرکز دایره است.

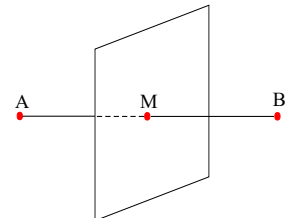
$$O \mid \beta^\alpha \in y=3x \Rightarrow \beta=3\alpha \Rightarrow O \mid \beta^\alpha$$

$$|OA| = |OB| \Rightarrow \sqrt{(\alpha+1)^2 + (3\alpha-2)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (3\alpha-2)^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha=1 \Rightarrow \beta=3\alpha=3 \rightarrow O \mid \beta^\alpha$$

$$R = |OA| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

۳۱. گزینه ۱ نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) از صفحه‌ی $ax+by+cz+d=0$ برابر است با:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB عبارتست از: $M = (3, 1, 2)$

$$\vec{n} = \overline{AB} = (2, -4, -4) \parallel (1, -2, -2) \text{ نرمال صفحه}$$

$$P \text{ معادله‌ی صفحه } x-2y-2z+3=0$$

طبق نکته‌ی بالا، فاصله‌ی مبدأ مختصات از صفحه‌ی P برابر است با:

$$\frac{|0-0-0+3|}{\sqrt{1+4+4}} = 1$$

۳۲. گزینه ۳ راه حل اول:

معادله دایره گذرا از این سه نقطه را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \text{روی دایره } A: & 16 + 4a + c = 0 & (1) \\ \text{روی دایره } B: & 4 - 2a + c = 0 & (2) \\ \text{روی دایره } C: & 16 - 4b + c = 0 & (3) \end{cases}$$

از (۱) و (۲) داریم: $c = -۸$ و $a = -۲$ با جایگذاری در (۳) داریم: $b = ۲$

بنابراین معادله این دایره به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 - 8 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 10 \Rightarrow r = \sqrt{10} \text{ شعاع}$$

راه حل دوم:

نکته: مرکز دایره محیطی مثلث ABC ، محل تقاطع عمود منصف‌های اضلاع مثلث است.

باتوجه به نکته بالا، ابتدا معادله عمود منصف‌های اضلاع AC و BC را می‌نویسیم:

$$AC : C \text{ و } A \text{ وسط} : \frac{A+C}{2} = (2, -2), AC \text{ شیب } m = \frac{0 - (-4)}{4 - 0} = 1 \Rightarrow AC \text{ شیب عمود منصف } m' = -1$$

$$AC \text{ معادله‌ی عمود منصف} : y - (-2) = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x$$

$$BC : C \text{ و } B \text{ وسط} : \frac{B+C}{2} = (-1, -2), BC \text{ شیب}$$

$$m = \frac{-4 - 0}{0 - (-2)} = -2 \Rightarrow BC \text{ شیب عمود منصف } m' = \frac{1}{2}$$

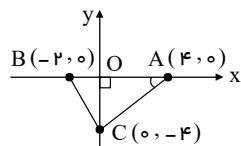
$$BC \text{ معادله عمود منصف} : y - (-2) = \frac{1}{2}(x - (-1)) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

حال محل تقاطع این دو خط را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow -x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}x = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow O(1, -1) \text{ مرکز دایره}$$

$$|OA| = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10} \text{ بنابراین شعاع دایره برابر است با: } \sqrt{10}$$

راه حل سوم:



نکته (قضیه سینوس‌ها): در مثلث دلخواه ABC داریم: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2r$ که در آن r شعاع دایره محیطی مثلث ABC ، یعنی دایره گذرا از نقاط A و B و C است.

$$\Delta OAC : \tan \hat{A} = \frac{OC}{OA} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ$$

طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin \hat{A}} &= \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2r \xrightarrow[\hat{A}=45^\circ]{a=BC} \frac{BC}{\sin 45^\circ} = 2r \Rightarrow 2r = \frac{\sqrt{4+16}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{20}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \Rightarrow r = \sqrt{10} \end{aligned}$$

۳۳. گزینه ۳

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}, z=1 : \vec{u_1} = (2, 3, 0) \\ \frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2} : \vec{u_2} = (2, 5, 2) \end{cases}$$

چون بردارهای هادی دو خط موازی نیستند، پس دو خط نمی‌توانند موازی یا منطبق باشند، چون در یکی از خط‌ها $z=1$ است. پس اگر دو خط متقاطع باشند، ارتفاع نقطه‌ی تقاطع برابر ۱ است. بنابراین $z=1$ را در خط دوم قرار داده و نقطه‌ی حاصل را در خط اول امتحان می‌کنیم. اگر صدق کرد، متقاطع هستند و در غیراین صورت متناظرند:

$$z=1 \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{1+1}{2} = 1 \Rightarrow (5, 5, 1)$$

نقطه‌ی $(5, 5, 1)$ در خط اول صدق نمی‌کند. پس این دو خط متناظرند.

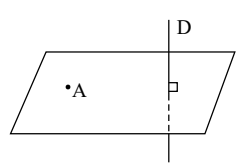
۳۴. گزینه ۲ خط D را پارامتری کرده و نقطه‌ی A را به صورت شاور برحسب t روی آن انتخاب می‌کنیم.

$$D: \frac{x-1}{3} = y = \frac{z+2}{2} = t \rightarrow D: \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = t \\ z = 2t-2 \end{cases} \Rightarrow A = (3t+1, t, 2t-2)$$

طبق فرض مجموع طول، عرض و ارتفاع نقطه‌ی A برابر D است. بنابراین:

$$3t+1+t+2t-2=5 \Rightarrow 6t-1=5 \Rightarrow t=1 \Rightarrow A(4, 1, 0) \Rightarrow |OA| = \sqrt{16+1+0} = \sqrt{17}$$

۳۵. گزینه ۱ چون صفحه بر خط D عمود است، پس بردار هادی خط D بردار نرمال صفحه است.



$$D: \begin{cases} x = t \\ y = 1-2t \\ z = 3+4t \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (1, -2, 4)$$

با بردار نرمال $\vec{n} = (1, -2, 4)$ و نقطه‌ی $A(2, 0, -1)$ معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم:

$$x - 2y + 4z = -2$$

برای به دست آوردن محل تقاطع صفحه با محور y ها در معادله‌ی آن $x = z = 0$ را قرار می‌دهیم: $0 - 2y + 0 = -2 \Rightarrow y = 1$