دبیرستان علامه حلی تهران

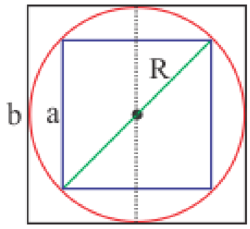
۲۱. گزینه ۳ نکته: طول قطر مکعب مستطیلی به ابعاد a، b و c برابر است با:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

بیشترین فاصله‌ی دو راس در واقع طول قطر مکعب مستطیل است:

$$d=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\sqrt{49}=7$$

۲۲. گزینه ۴ اگر مکعب درون کره باشد آنگاه قطر کره با قطر مکعب برابر است یعنی $2R=a\sqrt{3}$ و اگر کره درون مکعب باشد آنگاه قطر کره با ضلع مکعب برابر است یعنی $2R=b$ داریم.



$$\begin{cases} 2R=a\sqrt{3} \Rightarrow a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}R \\ 2R=b \Rightarrow b=2R \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{a^3}{b^3}=\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

۲۳. گزینه ۴

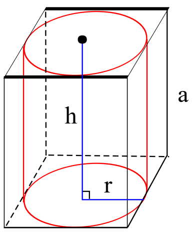
فرض کنید c, b, a طول و عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل باشد.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=6 \\ ab=2\ ,\ bc=6\ ,\ ca=3 \\ d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \text{طول قطر} \end{array}\right\} \Rightarrow (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

$$\Rightarrow 36=d^2+2(2+6+3) \Rightarrow 36=d^2+22 \Rightarrow d=\sqrt{14}$$

۲۴. گزینه ۲ نکته: حجم استوانه‌ای با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $V=\pi r^2 h$

باتوجه به شکل داریم:
$$\begin{cases} \text{ارتفاع}: h=a=1 \\ \text{شعاع}: r=\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$



بنابراین حجم این استوانه برابر است با: $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1=\frac{\pi}{4}$

۲۵. گزینه ۳ این دو خط متنافر نیستند، پس منظور پرسش طول عمود مشترک نیست.

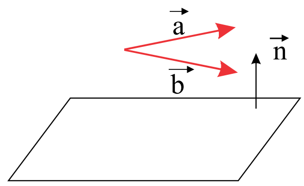
این خطوط موازی‌اند و فاصله‌ی دو خط موازی عبارت است از فاصله‌ی یک نقطه از یکی تا دیگری.

$$d:\begin{cases} x=\dfrac{z-1}{-2} \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow u_d=(1,0,-2)\ ,\ A(0,2,1)$$

$$d:\begin{cases} x=\dfrac{z-2}{-2} \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow u_{d'}=(1,0,-2)\ ,\ B(0,3,2)$$

$$L=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times u\right|}{|u|}=\frac{|(۰\,,\,۱\,,\,۱)\times(۱\,,\,۰\,,\,-۲)|}{\sqrt{۵}}=\frac{|(-۲\,,\,۱\,,\,-۱)|}{\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۵}}$$

۲۶. گزینه ۱ چون صفحه با دو بردار a و b موازی است، پس نرمال صفحه بر هر دو بردار عمود است و لذا بردار نرمال می‌تواند ضرب خارجی دو بردار a و b باشد:



$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۱ \end{vmatrix}=(۱\,,\,-۴\,,\,-۷)$$

با داشتن نرمال صفحه و نقطه‌ی $M(۱\,,\,-۱\,,\,۲)$ معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم:

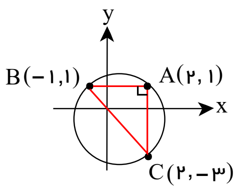
$M\in P\Rightarrow P:x-۴y-۷z=-۹$ یا $P:-x+۴y+۷z=۹$

۲۷. گزینه ۳

راه‌حل اول: $AB=(۰\,,\,-۴)\quad AC=(-۳\,,\,۰)\Rightarrow AB\cdot AC=۰\Rightarrow AB\perp AC$

بنابراین زاویه‌ی A در مثلث ABC قائمه است. در نتیجه BC قطر دایره‌ی گذرا از این سه نقطه است.

(زاویه‌ی محاطی رو به قطر ۹۰° است.)



$$۲r=|BC|=\sqrt{(-۱-۲)^۲+(۱+۳)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵\Rightarrow r=\frac{۵}{۲}$$

راه‌حل دوم: فرض می‌کنیم $O(\alpha\,,\,\beta)$ مرکز دایره‌ی موردنظر باشد. در این صورت چون A، B و C روی این دایره هستند، داریم:

$$\begin{cases}|OA|^۲=|OB|^۲\\|OA|^۲=|OC|^۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{(\alpha-۲)^۲}+\cancel{(\beta-۱)^۲}=\cancel{(\alpha-۲)^۲}+(\beta+۲)^۲\\(\alpha-۲)^۲+\cancel{(\beta-۱)^۲}=(\alpha+۱)^۲+\cancel{(\beta-۱)^۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\beta^۲-۲\beta+۱=\beta^۲+۶\beta+۹\\\alpha^۲-۴\alpha+۴=\alpha^۲+۲\alpha+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{۱}{۲}\\\beta=-۱\end{cases}$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$r=|OA|=\sqrt{\left(۲-\frac{۱}{۲}\right)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{\frac{۹}{۴}+۴}=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۵}{۲}$$

راه‌حل سوم: معادله‌ی گسترده‌ی یک دایره به‌صورت $X^۲+Y^۲+aX+bY+c=۰$ است. چون A، B و C روی این دایره هستند. مختصات آن‌ها در معادله‌ی دایره صدق می‌کند. بنابراین مختصات آن‌ها را در معادله‌ی فوق قرار می‌دهیم و ضرایب مجهول a، b و c را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}۵+۲a+b+c=۰ & (۱)\\۱۳+۲a-۳b+c=۰ & (۲)\\۲-a+b+c=۰ & (۳)\end{cases}$$

اگر معادله‌ی دوم را از معادله‌ی اول کم کنیم، داریم $۴b-۸=۰$، بنابراین $b=۲$

با قرار دادن $b=۲$ در معادله‌ی دوم و سوم و حل دستگاه دو معادله و دو مجهول حاصل a و c را به‌دست می‌آوریم:

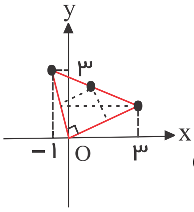
$$\begin{cases}۲a+c=-۷ & (۲)\\-a+c=-۴ & (۳)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\c=-۵\end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی دایره به‌صورت زیر است:

$$x^{۲}+y^{۲}-x+۲y-۵=۰\Rightarrow (x-\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴}+(y+۱)^{۲}-۱-۵=۰\Rightarrow (x-\frac{۱}{۲})^{۲}+(y+۱)^{۲}=\frac{۲۵}{۴}$$

شعاع دایره $r=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۵}{۲}$

۲۸. گزینه ۳ راه کلی به‌دست آوردن شعاع دایره‌ی محیطی آن است که مرکز دایره‌ی محیطی (محل تلاقی عمود منصف‌ها) را به‌دست آورده فاصله‌ی آن را از رئوس مثلث به‌دست آوریم



اما معمولاً در تست‌ها، مثلث در یکی از حالات قائم‌الزاویه یا متساوی‌الاضلاع مورد پرسش قرار می‌گیرد. در این‌جا چون $OA\begin{vmatrix}۳\\۱\end{vmatrix}$ و $OB\begin{vmatrix}-۱\\۳\end{vmatrix}$ است، پس:

$$OA\cdot OB=۳(-۱)+۱(۳)=۰$$

لذا مثلث OAB قائم‌الزاویه است.

در مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر مرکز دایره محیطی و نصف وتر شعاع دایره‌ی محیطی است:

$$|AB|=\sqrt{(۳+۱)^{۲}+(۳-۱)^{۲}}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

۲۹. گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l} A(۱\,,\,-۱\,,\,۲)\xrightarrow[\text{به } yoz]{\text{قرینه نسبت}}A'(-۱\,,\,-۱\,,\,۲)\\ B(۰\,۲\,,\,۱)\xrightarrow[\text{به } xoy]{\text{قرینه نسبت}}B'(۰\,,\,۲\,,\,-۱)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{A'B'}=(۱\,,\,۳\,,\,-۳)=\overrightarrow{ud}\xrightarrow{B'\in d}d:\frac{x-۰}{۱}=\frac{y-۲}{۳}=\frac{z+۱}{-۳}$$

نکات:

۱) معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $A=(x_{۰}\,,\,y_{۰}\,,\,z_{۰})$ و موازی بردار $u=(a\,,\,b\,,\,c)$ عبارت است از:

$$\frac{x-x_{۰}}{a}=\frac{y-y_{۰}}{b}=\frac{z-z_{۰}}{c}$$

۲) برای به دست آوردن معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی A و B، پیکان $\overrightarrow{AB}$ را به عنوان بردار هادی خط در نظر می‌گیریم.

۳) نمایش معادله‌ی خط منحصربه‌فرد نیست. اگر معادله‌ی خط را با نقطه‌ی دیگری بنویسیم، یا بردار هادی خط را در عددی ضرب کنیم، نمایش جدیدی از معادله‌ی خط به وجود می‌آید.

۳۰. گزینه ۲ راه حل اول: برای به‌دست آوردن نزدیک‌ترین و دورترین نقاط یک دایره از نقطه‌ی داده شده، ابتدا قطر (یا امتداد قطری) که از نقطه‌ی داده شده می‌گذرد را رسم می‌کنیم. یکی از نقاط تقاطع این قطر (یا امتداد قطر) با دایره، نزدیک‌ترین نقطه و نقطه‌ی تقاطع دیگر دورترین نقطه است.

A: خارج دایره است
$$\begin{cases}Lmax=\text{بیشترین فاصله}=AN=OA+R\\ Lmin=\text{کمترین فاصله}=AM=OA-R\end{cases}$$

A: داخل دایره است
$$\begin{cases}Lmax=\text{بیشترین فاصله}=AN=OA+R\\ Lmin=\text{کمترین فاصله}=AM=R-OA\end{cases}$$

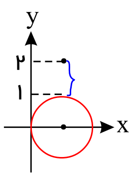
$$x^{۲}+y^{۲}-۲x=۰\Rightarrow (x-۱)^{۲}+y^{۲}=۱\Rightarrow\begin{cases}O=\begin{vmatrix}۱\\۰\end{vmatrix}\\ R=۱\end{cases}$$

$$c(۱,۱۲)=۱^{۲}+۱۲^{۲}-۲(۱)>۰\rightarrow \text{خارج دایره است } A$$

$$\Rightarrow d=OA=\sqrt{۰+۴}=۲\Rightarrow |AM|=|d-R|=|۲-۱|=۱$$

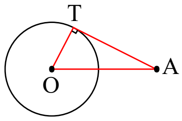
راه حل دوم: ابتدا شکل را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل واضح است که کمترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از دایره برابر ۱ است.



۳۱. گزینه ۴ راه حل اول: ابتدا معادله را استاندارد می‌کنیم:

$$(x+\frac{m}{4})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{m^2}{16}+\frac{3}{4}\Rightarrow O(\frac{-m}{4}\,,\,\frac{1}{2})\qquad r=\sqrt{\frac{m^2+12}{16}}$$



$$\begin{cases} OA=(1+\frac{m}{4}\,,\,-\frac{5}{2}) \\ OT=r=\sqrt{\frac{m^2+12}{16}} \\ AT=\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

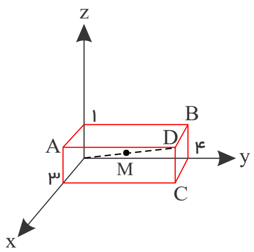
$$\Rightarrow AT^2=OA^2-OT^2\Rightarrow(\frac{3\sqrt{2}}{2})^2=(\frac{4+m}{4})^2+\frac{25}{4}-\frac{m^2+12}{16}\Rightarrow\frac{8m+104}{16}=\frac{9}{2}\Rightarrow m=-4$$

راه‌حل دوم: طول مماسی که از نقطه‌ی $A(x_0\,,\,y_0)$ بر دایره‌ی $f(x\,,\,y)=x^2+y^2+ax+by+c=0$ رسم می‌شود، برابر $f(x_0\,,\,y_0)=\sqrt{x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c}$ است. دقت کنید شرط استفاده از این رابطه آن است که ضرایب x^2 و y^2 برابر ۱ باشد، لذا ابتدا طرفین معادله دایره را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$x^2+y^2+\frac{m}{2}x-y-\frac{1}{2}=0$$

$$\text{طول مماس}=\sqrt{1+4+\frac{m}{2}+2-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sqrt{\frac{13}{2}+\frac{m}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{13}{2}+\frac{m}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow m=-4$$

۳۲. گزینه ۱



در این شکل $O\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.$, $D\left|\begin{matrix}3\\4\\1\end{matrix}\right.$ و M وسط OD مرکز مکعب مستطیل است.

بنابراین $M(\frac{3}{2}\,,\,2\,,\,\frac{1}{2})$ مرکز می‌باشد. از طرفی چون $A\left|\begin{matrix}3\\0\\1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}0\\4\\1\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}3\\4\\0\end{matrix}\right.$ می‌باشند، پس:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}-3\\4\\0\end{matrix}\right. \\ \overrightarrow{AC}\left|\begin{matrix}0\\4\\-1\end{matrix}\right. \end{cases}\Rightarrow n=AB\times AC\Rightarrow\begin{vmatrix}-3 & 4 & 0\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}=(-4,-3,-12)$$

$$A\in P\Rightarrow P:-4x-3y-12z=-12\xrightarrow{\times -1}P:4x+3y+12z=12$$

$$\text{فاصله‌ی } M \text{ از صفحه } P=\frac{|4(\frac{3}{2})+3(2)+12(\frac{1}{2})-12|}{\sqrt{16+9+144}}=\frac{6+6+6-12}{13}=\frac{6}{13}$$

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\\z_0\end{matrix}\right.$ از صفحه‌ی $ax+by+cz+d=0$ برابر است با: $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

۳۳. گزینه ۳ راه‌حل اول:

معادله دایره گذرا از این سه نقطه را به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \text{روی دایره } A: & ۱۶+۴a+c=۰ & (۱) \\ \text{روی دایره } B: & ۴-۲a+c=۰ & (۲) \\ \text{روی دایره } C: & ۱۶-۴b+c=۰ & (۳) \end{cases}$$

از (۱) و (۲) داریم: $c=-۸$ و $a=-۲$ با جایگذاری در (۳) داریم: $b=۲$

بنابراین معادله این دایره به صورت زیر است:

$$x^{۲}+y^{۲}-۲x+۲y-۸=۰ \Rightarrow (x-۱)^{۲}-۱+(y+۱)^{۲}-۱-۸=۰ \Rightarrow (x-۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۱۰ \Rightarrow$$

$\text{شعاع}: r=\sqrt{۱۰}$

راه‌حل دوم:

نکته: مرکز دایره محیطی مثلث ABC، محل تقاطع عمود منصف‌های اضلاع مثلث است.

باتوجه به نکته بالا، ابتدا معادله عمود منصف‌های اضلاع AC و BC را می‌نویسیم:

$$AC: \text{وسط } A \text{ و } C: \frac{A+C}{۲}=(۲,-۲) \text{، شیب } AC: m=\frac{۰-(-۴)}{۴-۰}=۱ \Rightarrow \text{شیب عمود منصف } AC: m'=-۱$$

$$\text{معادله‌ی عمود منصف } AC: y-(-۲)=-۱(x-۲) \Rightarrow y=-x$$

$$BC: \text{وسط } B \text{ و } C: \frac{B+C}{۲}=(-۱,-۲) \text{، شیب } BC$$

$$: m=\frac{-۴-۰}{۰-(-۲)}=-۲ \Rightarrow \text{شیب عمود منصف } BC: m'=\frac{۱}{۲}$$

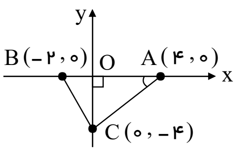
$$\text{معادله عمود منصف } BC: y-(-۲)=\frac{۱}{۲}(x-(-۱)) \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}$$

حال محل تقاطع این دو خط را می‌یابیم:

$$\begin{cases} y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲} \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow -x=\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲} \Rightarrow -\frac{۳}{۲}x=\frac{-۳}{۲} \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=-۱ \quad \text{مرکز دایره}: O(۱,-۱)$$

بنابراین شعاع دایره برابر است با: $|OA|=\sqrt{(۱-۴)^{۲}+(-۱-۰)^{۲}}=\sqrt{۱۰}$

راه‌حل سوم:



نکته (قضیه سینوس‌ها): در مثلث دلخواه ABC داریم: $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲r$ که در آن r شعاع دایره محیطی مثلث ABC، یعنی دایره گذرا از نقاط A و B و C است.

$$\overset{\Delta}{OAC}: \tan\hat{A}=\frac{OC}{OA}=\frac{۴}{۴}=۱ \Rightarrow \hat{A}=۴۵^{\circ}$$

طبق قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲r \xrightarrow[\hat{A}=۴۵^{\circ}]{a=BC} \frac{BC}{\sin ۴۵^{\circ}}=۲r \Rightarrow ۲r=\frac{\sqrt{۴+۱۶}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲۰}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰} \Rightarrow r=\sqrt{۱۰}$$

۳۴. گزینه ۱ نکته: دسته‌ی صفحات شامل فصل مشترک دو صفحه‌ی $P_۱: a_۱x+b_۱y+c_۱z-d_۱=۰$ و $P_۲: a_۲x+b_۲y+c_۲z-d_۲=۰$ عبارت است از:

$$(a_۱x+b_۱y+c_۱z-d_۱)+\lambda(a_۲x+b_۲y+c_۲z-d_۲)=۰$$

برای به دست آوردن مقدار λ باید نقطه‌ای از صفحه‌ی مورد نظر را در معادله‌ی فوق جایگذاری کنیم.

طبق نکته‌ی فوق داریم:

$$(۲y-x+z-۴)+\lambda(y+۲z)=۰ \xrightarrow{A(۲,۱,-۲)} ۲-۲-۲-۴+\lambda-۴\lambda=۰ \Rightarrow \lambda=-۲$$

بنابراین معادله‌ی صفحه‌ی مورد نظر عبارتست از:

$$(۲y-x+z-۴)-۲y-۴z=۰ \Rightarrow x+۳z=-۴$$

بردار نرمال این صفحه $\overrightarrow{n}=(۱,۰,۳)$ است، چون $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{j}=۰$ است، این صفحه موازی محور yهاست.

۳۵. گزینه ۳

$$\begin{cases} \dfrac{x-۱}{۲}=\dfrac{y+۲}{۳},\ z=۱ & :\overrightarrow{u_۱}=(۲,۳,۰) \\ \dfrac{x-۳}{۲}=\dfrac{y}{۵}=\dfrac{z+۱}{۲} & :\overrightarrow{u_۲}=(۲,۵,۲) \end{cases}$$

چون بردارهای هادی دو خط موازی نیستند، پس دو خط نمی‌توانند موازی یا منطبق باشند.، چون در یکی از خط‌ها $z=۱$ است. پس اگر دو خط متقاطع باشند، ارتفاع نقطه‌ی تقاطع برابر ۱ است. بنابراین $z=۱$ را در خط دوم قرار داده و نقطه‌ی حاصل را در خط اول امتحان می‌کنیم. اگر صدق کرد، متقاطع هستند و در غیراین‌صورت متنافرند:

$$z=۱ \Rightarrow \frac{x-۳}{۲}=\frac{y}{۵}=\frac{۱+۱}{۲}=۱ \Rightarrow (۵,۵,۱)$$

نقطه‌ی $(۵,۵,۱)$ در خط اول صدق نمی‌کند. پس این دو خط متنافرند.