۱ گزینه ۴

نکته: مجموع زوایای داخلی هر مثلث، برابر ۱۸۰° است.

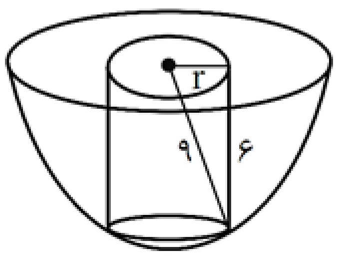
زاویه‌های داخلی را x و $۲x$ و $۵x$ در نظر می‌گیریم. حال داریم:

$$x + ۲x + ۵x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۸x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۲۲/۵^\circ$$

پس زاویه‌های داخلی مثلث $۲۲/۵^\circ$، ۴۵° و $۱۱۲/۵^\circ$ هستند؛ بنابراین بزرگ‌ترین زاویهٔ خارجی آن برابر $۱۸۰^\circ - ۲۲/۵^\circ = ۱۵۷/۵^\circ$ است پس:

$$\frac{۱۵۷/۵^\circ}{۱۱۲/۵^\circ} = \frac{۷\times۲۲/۵^\circ}{۵\times۲۲/۵^\circ} = \frac{۷}{۵}$$

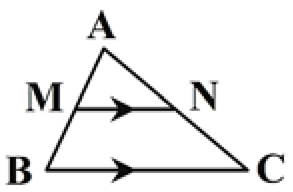
۲ گزینه ۴



$$r^۲ + ۶^۲ = ۹^۲ \Rightarrow r^۲ = ۸۱ - ۳۶ = ۴۵$$
$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ h = \pi(۴۵)(۶) = ۲۷۰\pi$$

۳ گزینه ۳

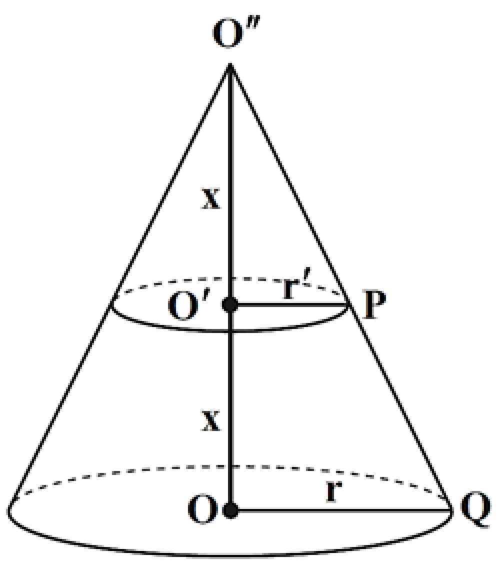
نکته (قضیهٔ تالس): در مثلث ABC، اگر MN موازی BC باشد، آنگاه:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

نکته: حجم مخروطی با شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$

طبق فرض، صفحه ارتفاع مخروط را نصف می‌کند، پس:



$$OO' = O'O'' = x$$

$$\overset{\Delta}{OO''Q}:\ O'P \parallel OQ \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{O'P}{OQ} = \frac{O'O''}{OO''} \Rightarrow \frac{r'}{r} = \frac{x}{۲x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow r = ۲r'$$

بنابراین نسبت حجم مخروط کوچک به مخروط بزرگ، برابر است با:

$$\frac{V_۱}{V_۲} = \frac{\frac{۱}{۳}\pi(r')^۲(x)}{\frac{۱}{۳}\pi(۲r')^۲(۲x)} = \frac{۱}{۸}$$

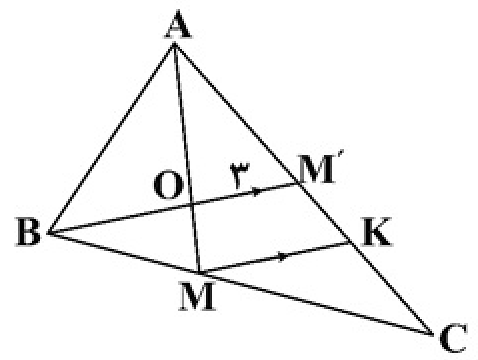
۴ گزینه ۱

$$۷x^۲ - ۴xy + ۴y^۲ = ۱۰ \Rightarrow \tan ۲\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-۴}{۷-۴} = -\frac{۴}{۳} < ۰$$
$$۱ + \tan^۲ ۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲ ۲\theta} = ۱ + \frac{۱۶}{۹} = \frac{۲۵}{۹} \Rightarrow \cos ۲\theta = \pm\frac{۳}{۵}$$

چون $\tan ۲\theta < ۰$، پس ۲θ در ربع دوم است و لذا $\cos ۲\theta < ۰$؛ بنابراین $\cos ۲\theta = -\frac{۳}{۵}$.

$$\sin^۲\theta = \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲} = \frac{۱+\frac{۳}{۵}}{۲} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

۵ گزینه ۳



مثلث‌های $\overset{\Delta}{AMK}$ و $\overset{\Delta}{AOM'}$ متشابه هستند، پس داریم:

$$\frac{AO}{AM} = \frac{OM'}{MK} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{۳}{MK} \Rightarrow MK = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

نکته: محل تلاقی میانه‌ها، $\frac{۲}{۳}$ طول میانه، از رأس مربوط به همان میانه و $\frac{۱}{۳}$ میانه از وسط ضلعی که میانه به آن وارد شده است فاصله دارد.

۶ گزینه ۱

طبق عکس قضیهٔ تالس داریم:

$PN \parallel BC \; , \; PM \parallel AC$

یعنی چهارضلعی $CMPN$ متوازی‌الاضلاع است. ازطرفی می‌دانیم که با رسم قطرهای یک متوازی‌الاضلاع، چهار مثلث هم‌مساحت ایجاد می‌شود که $\overset{\Delta}{OMC}$ یکی از این مثلث‌ها و $\overset{\Delta}{MNP}$ متشکل از دو تا از این چهار مثلث است، پس:

$$\frac{S(\overset{\Delta}{OMC})}{S(\overset{\Delta}{MNP})} = \frac{۱}{۲}$$

۷ گزینه ۲

نکته: اگر مقطع مخروطی $ax^۲ + bxy + cy^۲ + dx + ey + f = ۰$ را به‌اندازهٔ θ حول مبدأ مختصات دوران دهیم، آنگاه به حالت استاندارد درمی‌آید که در آن θ از رابطهٔ $\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c}$ به دست می‌آید.

نکته: $\frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱ + \tan^۲ x \quad , \quad \cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$۲x^۲ + ۲\sqrt{۲}xy + ۳y^۲ = ۵ \; : \; \tan ۲\theta = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲-۳} = -۲\sqrt{۲}$$
$$\frac{۱}{\cos^۲ ۲\theta} = ۱ + \tan^۲ ۲\theta = ۱ + ۸ = ۹ \Rightarrow \cos^۲ ۲\theta = \frac{۱}{۹} (*)$$

چون $\tan ۲\theta < ۰$ و $۰ \leq ۲\theta \leq \pi$ است، پس ۲θ در ربع دوم است؛ بنابراین $\cos ۲\theta < ۰$، پس از $(*)$ داریم: $\cos ۲\theta = -\frac{۱}{۳}$

$$\sin^۲\theta = \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲} = \frac{۱+\frac{۱}{۳}}{۲} = \frac{۲}{۳}$$
$$\xrightarrow{\sin\theta > ۰} \sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \theta = \sin^{-۱}\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

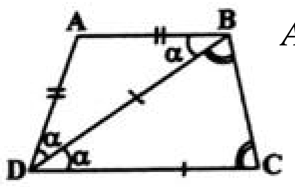
۸

گزینه ۲

ابتدا توجه کنید که مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ متساوی‌الساقین است، پس:

$$A\hat{D}B = A\hat{B}D = \alpha \qquad (۱)$$

اکنون دقت کنید که $AB \parallel DC$ و خط BD مورب است، پس نتیجه می‌شود:



$$A\hat{B}D = B\hat{D}C = \alpha \qquad (۲)$$

اکنون باتوجه‌به رابطه‌های (۱) و (۲) و اینکه ذوزنقه متساوی‌الساقین است، نتیجه می‌شود $\hat{C} = \hat{D} = ۲\alpha$، حال از شرط $BD = DC$ داریم $D\hat{B}C = \hat{C} = ۲\alpha$ پس $\hat{B} = \alpha + ۲\alpha = ۳\alpha$؛ بنابراین:

$$\frac{\hat{C}}{\hat{B}} = \frac{۲\alpha}{۳\alpha} = \frac{۲}{۳}$$

۹

گزینه ۴

زاویهٔ مناسب برای دوران (زاویهٔ θ) از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{۳}{۱-۱} = \text{تعریف‌نشده} \Rightarrow ۲\theta = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

با نوشتن رابطهٔ بین مختصات قبل و بعد از دوران داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \\ y = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \end{cases}$$

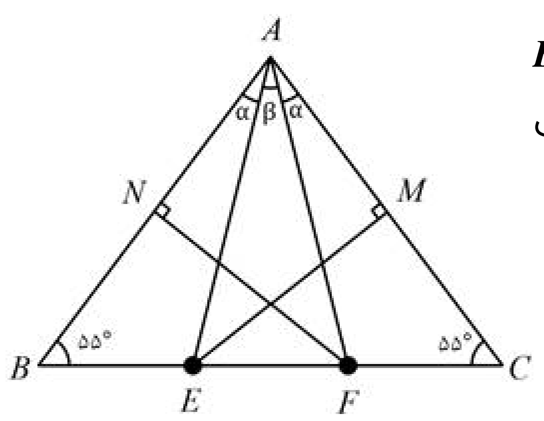
$$x^۲ + ۳xy + y^۲ = ۵$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y'\right)^۲ + ۳\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y'\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x' + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y'\right) + \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x' + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y'\right)^۲ = ۵$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}x'^۲ + \frac{۱}{۲}y'^۲ - x'y' + \frac{۳}{۲}x'^۲ - \frac{۳}{۲}y'^۲ + \frac{۱}{۲}x'^۲ + \frac{۱}{۲}y'^۲ + x'y' = ۵$$
$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}x'^۲ - \frac{۱}{۲}y'^۲ = ۵ \Rightarrow \frac{x'^۲}{۲} - \frac{y'^۲}{۱۰} = ۱$$
$$c^۲ = a^۲ + b^۲ = ۲ + ۱۰ = ۱۲ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow ۲c = ۴\sqrt{۳}$$

۱۰

گزینه ۱

نکته: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن به یک‌فاصله است.

با توجه به شکل زیر می توان نوشت:



$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ}{۲} = ۵۵^\circ$$

E روی عمود منصف است $\Rightarrow AE = CE \Rightarrow \alpha + \beta = \hat{C} = ۵۵^\circ (*)$

$$۲\alpha + \beta = ۷۰^\circ (**)$$

$$\xrightarrow{(*),(**)} \begin{cases} ۲\alpha + \beta = ۷۰^\circ \\ \alpha + \beta = ۵۵^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۱۵^\circ \\ \beta = ۴۰^\circ \end{cases}$$

دو مثلث ABE و ACF همنهشت اند، بنابراین $AE = AF$ و داریم:

$$\overset{\Delta}{AEF} \ : AE = AF \Rightarrow \hat{E} = \hat{F} = \frac{۱۸۰^\circ - \beta}{۲} = \frac{۱۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

بنابراین زوایای $\overset{\Delta}{AEF}$ عبارت است از: $۴۰^\circ, ۷۰^\circ, ۷۰^\circ$ و همچنین زوایای $\overset{\Delta}{ABC}$ عبارت است از: $۷۰^\circ, ۵۵^\circ, ۵۵^\circ$

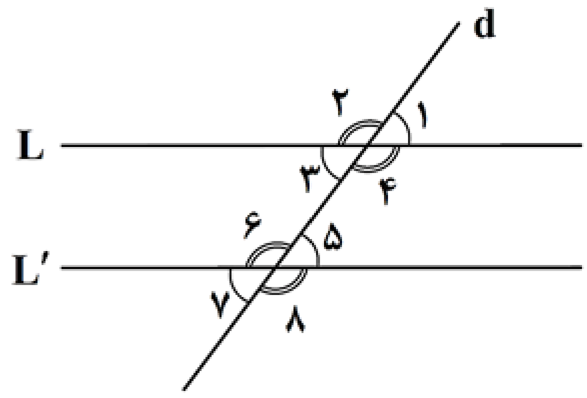
در نتیجه:

$$\frac{\overset{\Delta}{ABC} \text{ بزرگ ترین زاویهٔ}}{\overset{\Delta}{AEF} \text{ کوچک ترین زاویهٔ}} = \frac{۷۰}{۴۰} = \frac{۷}{۴}$$

۱۱

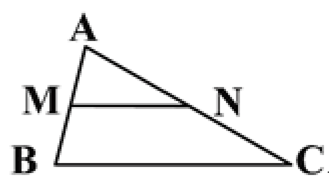
گزینه ۳

نکته (قضیهٔ خطوط موازی): اگر خط مورب d دو خط موازی L و L' را قطع کند، آنگاه هشت زاویه تشکیل می‌شود که چهاربه‌چهار باهم برابرند.



$$\hat{۱} = \hat{۳} = \hat{۵} = \hat{۷}$$
$$\hat{۲} = \hat{۴} = \hat{۶} = \hat{۸}$$

نکته (قضیهٔ تالس): اگر پاره‌خط MN موازی با ضلع BC از مثلث ABC، دو ضلع دیگر آن را قطع کند، آنگاه:

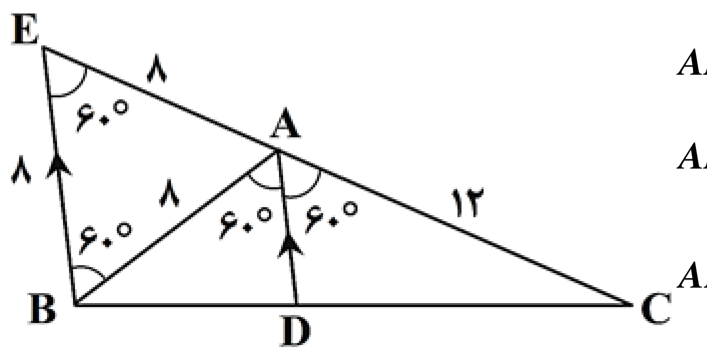


$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \ , \ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

طبق فرض AD نیمساز $\hat{A}$ است، پس:

$$D\hat{A}C = B\hat{A}D = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

حال با استفاده از قضیهٔ خطوط موازی داریم:



$$AD \| BE \xrightarrow{\text{مورب } AB} A\hat{B}E = B\hat{A}D = ۶۰^\circ$$
$$AD \| BE \xrightarrow{\text{مورب } EC} A\hat{E}B = D\hat{A}C = ۶۰^\circ$$

پس مثلث AEB متساوی‌الاضلاع است؛ بنابراین:

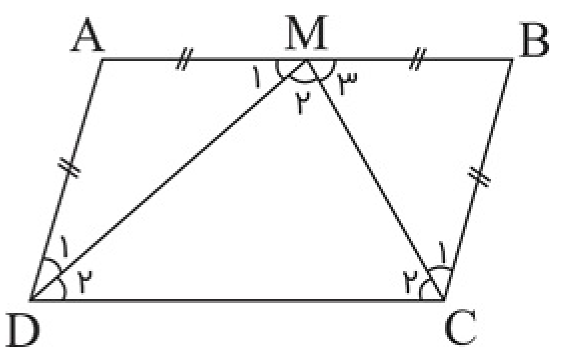
$$AE = BE = ۸$$

حال با استفاده از قضیهٔ تالس در $\overset{\Delta}{BCE}$ داریم:

$$AD \| BE \Rightarrow \frac{AD}{BE} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{۸} = \frac{۱۲}{۲۰}$$
$$\Rightarrow AD = \frac{۴۸}{۱۰} = ۴/۸$$

۱۲

گزینه ۴



$$\left.\begin{array}{l} AM = AD \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{D}_۱ \\ \text{قضیهٔ خطوط موازی و مورب} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{D}_۲ \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{D}_۲ \Rightarrow \text{.است } \hat{D} \text{ نیمساز } DM$$

به دلیل مشابه CM نیمساز $\hat{C}$ است.

$$\hat{D} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \frac{\hat{D}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۲ + \hat{C}_۲ = ۹۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow DMC \text{ قائمه است}$$

۱۳

گزینه ۴

نکته: معادلهٔ مقطع مخروطی $ax^۲ + bxy + cy^۲ + dx + ey + f = ۰$ با دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ θ، استاندارد می‌شود که θ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a - c}$$

$$۴x^۲ + ۳xy + y^۲ - ۵x + y - ۷ = ۰$$

با استفاده از نکتهٔ فوق، داریم:

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{۳}{۴-۱} = ۱ \Rightarrow ۲\hat{\theta} = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{\theta} = ۲۲/۵^\circ$$

۱۴ گزینه ۱

نکته: ماتریس دوران حول مبدأ مختصات با زاویهٔ θ عبارت است از:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

نکته: دوران یافتهٔ نقطهٔ $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ حول مبدأ مختصات به‌اندازهٔ θ عبارت است از: $R_\theta \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

با استفاده از نکات بالا داریم:

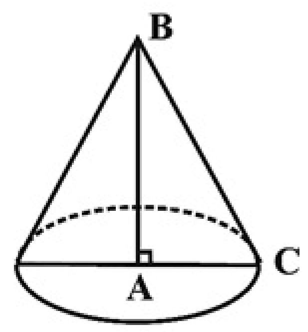
$$R_{۳۰^\circ} = \begin{bmatrix} \cos ۳۰^\circ & -\sin ۳۰^\circ \\ \sin ۳۰^\circ & \cos ۳۰^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{۳}-۱ \\ ۱+\sqrt{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{۳}-۱ \\ b = ۱+\sqrt{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b = \sqrt{۳}-۱+۱+\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

۱۵ گزینه ۳

شکل فضایی تولیدشده یک مخروط است که در آن ضلع $AB = ۸$ ارتفاع و ضلع $AC = R$ شعاع دایرهٔ قاعده است.

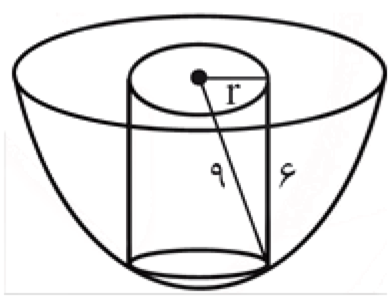


$$V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h \Rightarrow ۹۶\pi = \frac{۱}{۳}\pi . AC^۲ \times ۸ \Rightarrow AC^۲ = ۳۶$$

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰ \Rightarrow BC = ۱۰$$

وتر BC را که حول AB دوران می‌کند و مخروط را تولید می‌نماید، مولد مخروط می‌نامند.

۱۶ گزینه ۴



$$r^۲ + ۶^۲ = ۹^۲ \Rightarrow r^۲ = ۸۱ - ۳۶ = ۴۵$$

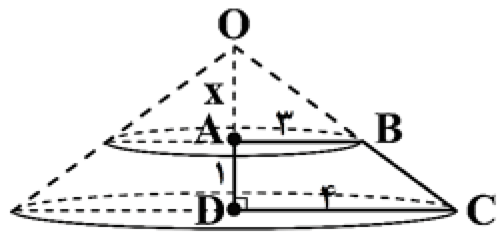
استوانه $V = \pi r^۲ h = \pi(۴۵)(۶) = ۲۷۰\pi$

۱۷

گزینه ۱

نکته: حجم مخروطی با شعاع r و ارتفاع h، برابر است با: $V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$

اگر ذوزنقهٔ $ABCD$ را حول AD دوران دهیم، شکل زیر ایجاد می‌شود. برای محاسبهٔ حجم این شکل ابتدا مقدار $OA=x$ را طبق قضیهٔ تالس محاسبه می‌کنیم:



$$AB\parallel DC\Rightarrow\frac{OA}{OD}=\frac{AB}{DC}\Rightarrow\frac{x}{x+۱}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۴x=۳x+۳\Rightarrow x=۳$$

حال حجم شکل حاصل را از طریق تفاضل حجم دو مخروط محاسبه می‌کنیم:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(DC)^{۲}(OD)-\frac{۱}{۳}\pi(AB)^{۲}(OA)=\frac{\pi}{۳}(۴^{۲}\times۴-۳^{۲}\times۳)=\frac{۳۷\pi}{۳}$$

۱۸

گزینه ۲

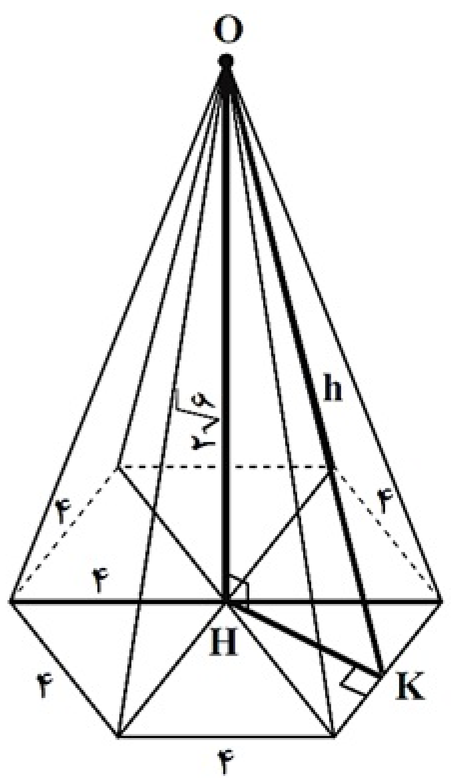
$$R_{(۴۵^\circ)}=\begin{bmatrix}\cos ۴۵^\circ & -\sin ۴۵^\circ\\ \sin ۴۵^\circ & \cos ۴۵^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\sqrt{۲}\\ \sqrt{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲-۱\\ ۲+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}$$

۱۹

گزینه ۲

نکته: ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.



HK ارتفاع یکی از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع (به ضلع ۴) داخل شش ضلعی منتظم قاعده است؛ بنابراین:

$$HK=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۴=۲\sqrt{۳}$$

حال با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHK داریم:

$$h=\sqrt{OH^{۲}+HK^{۲}}=\sqrt{۲۴+۱۲}=۶$$

مساحت هریک از وجوه جانبی این هرم برابر است با:

$$S'=\frac{۱}{۲}\times۶\times۴=۱۲$$

بنابراین مساحت جانبی (متشکل از ۶ وجه) این هرم برابر است با:

$$S=۶\times۱۲=۷۲$$

۲۰

گزینه ۲

نکته: برای استانداردسازی مقطع مخروطی $Ax^{۲}+Bxy+Cy^{۲}+Dx+Ey+F=۰$، باید محورهای مختصات را به‌اندازهٔ θ دوران دهیم که در آن $\tan ۲\theta=\frac{B}{A-C}$.

$$x^{۲}-۴\sqrt{۳}xy+y^{۲}-۲x+۴y-۷=۰$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

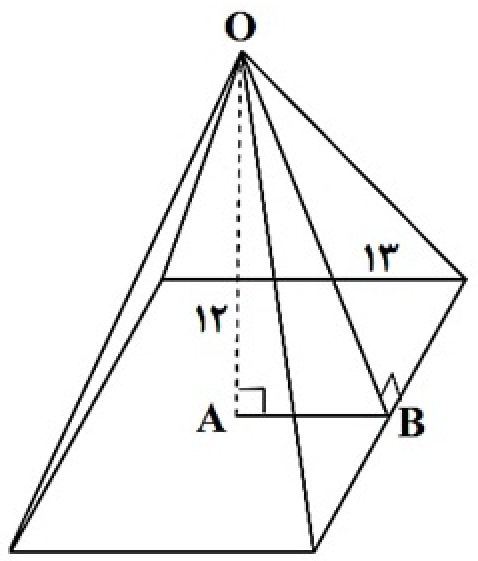
$$\tan ۲\theta=\frac{B}{A-C}=\frac{-۴\sqrt{۳}}{۱-۱}=\infty \Rightarrow ۲\theta=۹۰^{\circ} \Rightarrow \theta=۴۵^{\circ}$$

۲۱

گزینه ۱

نکته: حجم هرمی با مساحت قاعدهٔ S و ارتفاع h برابر است با: $V=\frac{۱}{۳}Sh$

باتوجه‌به شکل زیر داریم:



$$OB^{۲}=OA^{۲}+AB^{۲} \Rightarrow ۱۳^{۲}=۱۲^{۲}+AB^{۲} \Rightarrow AB=۵$$

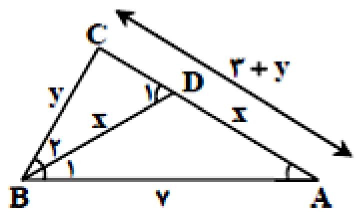
پس طول ضلع مربع قاعده برابر با ۱۰ است. باتوجه‌به نکتهٔ بالا حجم این هرم برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}(۱۰)^{۲}\times ۱۲=۴۰۰$$

۲۲

گزینه ۴

ابتدا نیمساز $\hat{B}$ را رسم می‌کنیم. طبق فرض $\hat{B}=۲\hat{A}$، پس $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲=\hat{A}$، بنابراین $\overset{\Delta}{ABD}$ متساوی‌الساقین است و $BD=AD=x$.



$\overset{\Delta}{ABD}$: زاویهٔ خارجی $\hat{D}_۱=\hat{A}+\hat{B}_۱=۲\hat{A} \Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{B}$

$$\begin{cases}\hat{D}_۱=\hat{B}\\ \hat{B}_۲=\hat{A}\end{cases} \xrightarrow{(ز\ ز)} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{BCD} \xrightarrow{\text{نسبت تشابه}} \frac{BD}{AB}=\frac{BC}{AC}=\frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۷}=\frac{y}{y+۳}=\frac{۳+y-x}{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{x}{۷}=\frac{y}{y+۳} \Rightarrow xy+۳x=۷y \quad (۱)\\ \frac{x}{۷}=\frac{۳+y-x}{y} \Rightarrow xy=۲۱+۷y-۷x \quad (۲)\end{cases} \xrightarrow{(۲)-(۱)} -۳x=۲۱-۷x \Rightarrow ۴x=۲۱ \Rightarrow x=\frac{۲۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در (۱)}} y=۹$$

۲۳ گزینه ۳

نکته: برای استاندارد کردن مقطع مخروطی $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ باید محورهای مختصات را به‌اندازهٔ θ دوران دهیم که در آن: $\tan 2\theta=\frac{B}{A-C}$

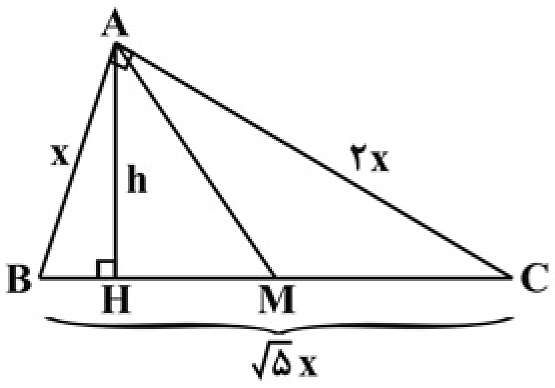
$$5x^2+2axy+4y^2-6x+y=2$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\tan 2\theta=\frac{B}{A-C}\Rightarrow \tan 120^\circ=\frac{2a}{5-4}=2a\Rightarrow 2a=-\sqrt{3}\Rightarrow a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۴ گزینه ۱

ضلع‌های مثلث را x و $2x$ و $\sqrt{5}x$ در نظر می‌گیریم. ازآنجاکه $(\sqrt{5}x)^2=(2x)^2+x^2$، مثلث قائم‌الزاویه است. مطابق شکل داریم:



$$AM=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

$$AH\times BC=AB\times AC$$

$$\Rightarrow h\times\sqrt{5}x=x\times 2x\Rightarrow h=\frac{2}{\sqrt{5}}x$$

$$\Rightarrow\frac{AM}{AH}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}x}{\frac{2}{\sqrt{5}}x}=\frac{5}{4}=1/25$$

۲۵ گزینه ۱

$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ABC}:EF\parallel AB\xrightarrow{\text{تالس}}\dfrac{CF}{BC}=\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{EF}{3}\quad(1)\\ \overset{\Delta}{BDC}:EF\parallel CD\xrightarrow{\text{تالس}}\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{EF}{CD}=\dfrac{EF}{5}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\dfrac{BC-BF}{BC}=\dfrac{5-EF}{5}\Rightarrow\dfrac{CF}{BC}=\dfrac{5-EF}{5}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(2)\end{cases}$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{5-EF}{5}=\frac{EF}{3}\Rightarrow 15-3EF=5EF\Rightarrow 8EF=15\Rightarrow EF=\frac{15}{8}$$

۲۶ گزینه ۳

$$\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}\Rightarrow\tan\frac{\pi}{3}=\frac{-2\sqrt{3}}{1-m}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{-2\sqrt{3}}{1-m}$$

$$\Rightarrow 1-m=-2\Rightarrow m=3\Rightarrow x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2+x-y-2=0$$

$$x=0\Rightarrow 3y^2-y-2=0\Rightarrow y_1+y_2=-(\frac{-1}{3})=\frac{1}{3}$$

۲۷ گزینه ۲

نکته: اگر محورهای مختصات را به‌اندازهٔ θ دوران دهیم، آنگاه رابطهٔ بین مختصات قدیم (x, y) و مختصات جدید (X, Y) به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

ابتدا زاویهٔ مناسب دوران را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 5$$

$$tan\, 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-2\sqrt{3}}{1-3} = \sqrt{3} \Rightarrow 2\theta = 60^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

حالا با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\begin{cases} x = Xcos\theta - Y sin\theta \\ y = X sin\theta + Y cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y \\ y = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۲۸ گزینه ۲

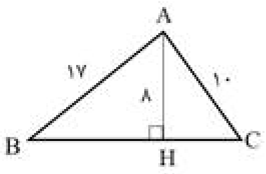
دو مثلث با اطلاعات داده‌شده قابل رسم است. یک مثلث حاده‌الزاویه (شکل ۱) که در آن داریم:

$$BH = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$$

$$CH = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$$

در این‌صورت $BC = 21$ و $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times 8 \times 21 = 84$ است.

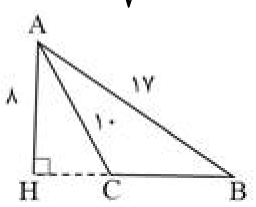
مثلث دیگر منفرجه‌الزاویه است (شکل ۲) که در آن داریم:



شکل (۱)

$$BH = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$$

$$CH = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$$



شکل (۲)

در این‌صورت $BC = 9$ و $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 = 36$ است.

۲۹ گزینه ۲

نکته: اگر دو مثلث با نسبت k متشابه باشند، آنگاه نسبت محیط‌های آن‌ها برابر k و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر k^2 است.

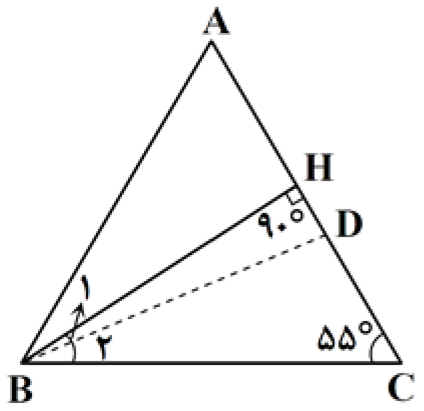
$$\text{محیط } \overset{\Delta}{A'B'C'} = 3 + 7 + 8 = 18$$

$$\Rightarrow \text{نسبت تشابه} : k = \frac{36}{18} = 2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = k^2 = 2^2 = 4$$

۳۰ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل زیر، در مثلث BHC داریم:

$$H\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ - ۵۵^\circ = ۳۵^\circ$$



ازطرفی باتوجه‌به اینکه BD نیمساز زاویهٔ B است، داریم:

$$D\hat{B}C = \frac{۵۵^\circ}{۲} = ۲۷/۵^\circ$$

پس نتیجه می‌شود زاویهٔ بین ارتفاع BH و نیمساز BD برابر است با:

$$H\hat{B}D = ۳۵^\circ - ۲۷/۵^\circ = ۷/۵^\circ$$

۳۱ گزینه ۳

نکته: ماتریس دوران به‌اندازهٔ θ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات عبارت است از:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_\theta = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -\sqrt{۳} & ۱ \\ -۱ & -\sqrt{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نکته}} R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = -\frac{۱}{۲} \\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \theta$$
$$= -۱۵۰^\circ$$

۳۲ گزینه ۱

نکته: منحنی $ax^۲ + bxy + cy^۲ + dx + ey + f = ۰$ با دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ θ به حالت استاندارد (افقی یا قائم) درمی‌آید که θ از رابطهٔ $\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c}$ محاسبه می‌گردد.

باتوجه‌به نکتهٔ بالا داریم:

$$\tan ۲\theta = \frac{-\sqrt{۳}}{۴-۳} = -\sqrt{۳} \Rightarrow ۲\theta = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳}$$

۳۳ گزینه ۲

نکته: در یک شش ضلعی منتظم به ضلع a داریم:

$$\text{قطر کوچک} = \sqrt{۳}a \ , \ \text{قطر بزرگ} = ۲a \ , \ \text{مساحت} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

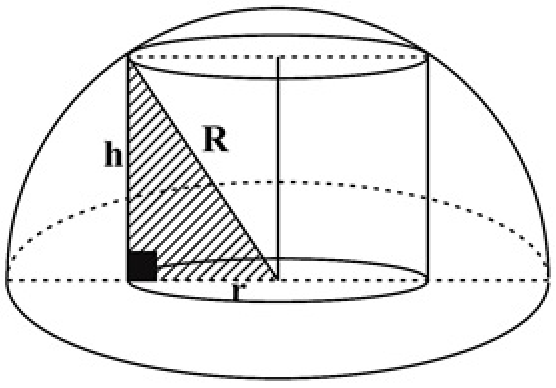
باتوجه‌به نکتهٔ بالا داریم:

$$\frac{\text{مساحت شش ضلعی جدید}}{\text{مساحت شش ضلعی اولیه}} = \frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(۲a)^۲}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}(a)^۲} = ۴$$

۳۴

گزینه ۳

استوانهٔ قائم به ارتفاع ۲ و شعاع قاعدهٔ $۴\sqrt{۲}$ مفروض است. چون در صورت سؤال کوچک‌ترین نیمکرهٔ ممکن خواسته شده، پس استوانه به شکل زیر در نیمکره قرار می‌گیرد:



با فرض $h = ۲$ و $r = ۴\sqrt{۲}$، خواهیم داشت:

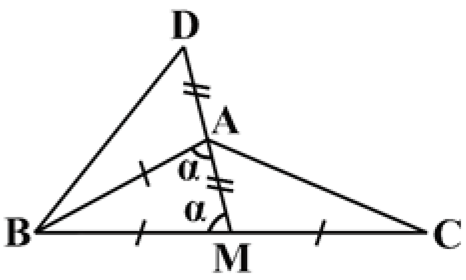
$$R^۲ = r^۲ + h^۲ = (۴\sqrt{۲})^۲ + ۲^۲ = ۳۲ + ۴ \Rightarrow R^۲ = ۳۶ \Rightarrow R = ۶$$

$$\text{حجم بین نیمکره و استوانه} = \frac{۲}{۳}\pi R^۳ - \pi r^۲ h = \frac{۲}{۳}\pi \times ۶^۳ - \pi(۴\sqrt{۲})^۲ \times ۲ = ۱۴۴\pi - ۶۴\pi = ۸۰\pi$$

۳۵

گزینه ۴

ابتدا شکلی از مسئله ترسیم می‌کنیم:



ازآنجاکه $BC = ۲AB$، داریم:

$$AB = BM = CM$$

پس مثلث ABM متساوی‌الساقین است (گزینهٔ "۱").

همچنین $A\hat{M}C = B\hat{A}D = ۱۸۰^\circ - \alpha$ (گزینهٔ "۳") و درنتیجه دو مثلث BAD و CMA باهم برابرند، پس $AC = BD$ (گزینهٔ "۲")؛ اما دلیلی برای درست بودن گزینهٔ "۴" وجود ندارد.