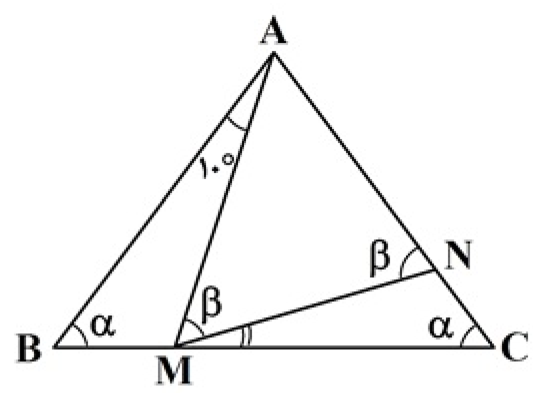
۱

گزینه ۴

با فرض $\hat{B}=\hat{C}=\alpha$ و $A\hat{M}N=A\hat{N}M=\beta$، خواهیم داشت:



$$\overset{\Delta}{ABC}:\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۱۸۰^\circ-۲\alpha \Rightarrow M\hat{A}N=۱۷۰^\circ-۲\alpha$$

$$\overset{\Delta}{MNC}:\xrightarrow{\hat{N}\text{ خارجی}}\beta=\alpha+N\hat{M}C \Rightarrow N\hat{M}C=\beta-\alpha \qquad (*)$$

ازطرفی در مثلث AMN می‌توان نوشت:

$$M\hat{A}N+A\hat{M}N+A\hat{N}M=۱۷۰^\circ-۲\alpha+۲\beta=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲(\beta-\alpha)=۱۰^\circ \Rightarrow \beta-\alpha=۵^\circ$$

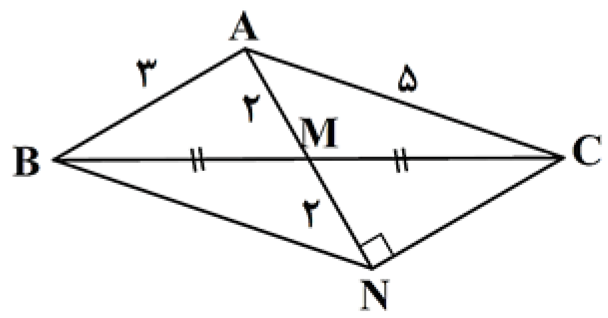
با جایگذاری در (*) داریم:

$$N\hat{M}C=۵^\circ$$

۲

گزینه ۲

میانهٔ AM را به‌اندازهٔ خودش از طرف M امتداد می‌دهیم. در شکل حاصل که یک متوازی‌الاضلاع است، اضلاع روبه‌رو دوبه‌دو برابرند. مطابق شکل مثلث ANC با اضلاع ۳، ۴ و ۵ قائم‌الزاویه است.



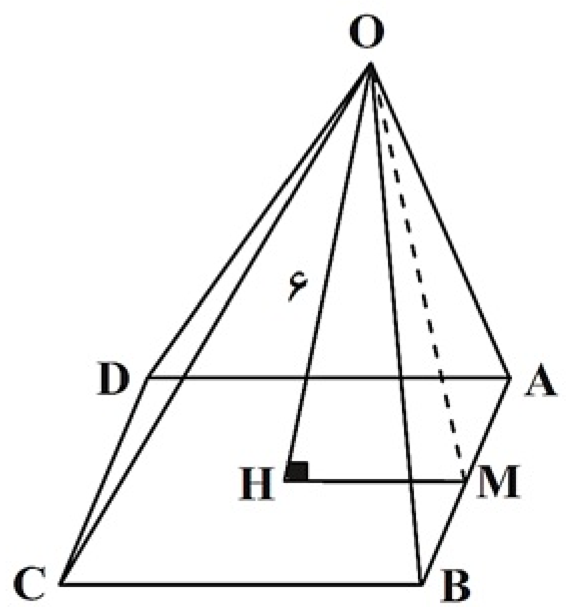
حال داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{ANC}}=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۴=۶ \Rightarrow S_{ABNC}=۲\times ۶=۱۲$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}S_{ABNC}=۶$$

۳

گزینه ۲



در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$OM=\sqrt{OH^۲+MH^۲}=\sqrt{۶^۲+(\frac{BC}{۲})^۲}=\sqrt{۶^۲+(۴\sqrt{۲})^۲}=\sqrt{۳۶+۳۲}=\sqrt{۶۸}=۲\sqrt{۱۷}$$

مثلث OAB در رأس O متساوی‌الساقین است. باتوجه‌به اینکه OM میانه است، پس ارتفاع هم است؛ بنابراین مساحت $\overset{\Delta}{OAB}$ برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{۱}{۲}\times OM\times AB=\frac{۱}{۲}\times ۲\sqrt{۱۷}\times ۸\sqrt{۲}=۸\sqrt{۳۴}$$

بنابراین مساحت جانبی هرم برابر است با:

$$S=۴S_{\overset{\Delta}{OAB}}=۴\times ۸\sqrt{۳۴}=۳۲\sqrt{۳۴}$$

۴ گزینه ۳

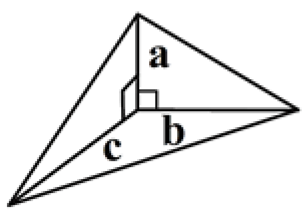
نکته: حجم مکعبی به طول یال a برابر است با:

$$V = a^3$$

نکته: حجم هرمی با مساحت قاعدهٔ S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} S \times h$$

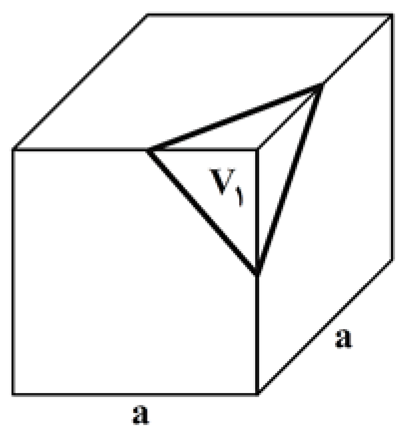
نکته: حجم هرمی که بر روی سه پاره‌خط دوبه‌دو عمود بر هم با اندازه‌های a، b و c بنا می‌شود، برابر است با:



$$V = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} bc \times a = \frac{1}{6} abc$$

فرض کنیم طول یال مکعب برابر با a باشد، در این صورت باتوجه‌به نکتهٔ بالا، حجم هریک از هرم‌ها برابر است با:

$$V_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{48} a^3$$



چون مکعب ۸ رأس دارد، پس کل حجمی که از مکعب کسر می‌شود، برابر است با:

$$8V_1 = \frac{1}{6} a^3$$

بنابراین حجم باقی‌مانده برابر است با:

$$V' = a^3 - \frac{1}{6} a^3 = \frac{5}{6} a^3$$

بنابراین نسبت حجم باقی‌مانده به حجم مکعب اولیه برابر است با:

$$\frac{\frac{5}{6} a^3}{a^3} = \frac{5}{6}$$

۵ گزینه ۳

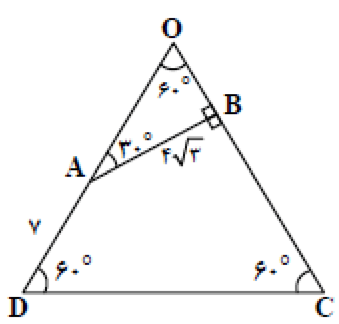
ویژگی‌های متمایز لوزی نسبت به متوازی‌الاضلاع آن است که اضلاع مجاورش برابرند و قطرهایش عمود بر هم و نیمساز زاویه‌ها هستند. بنابراین گزاره‌های ۱، ۲ و ۴ تعریف لوزی هستند، اما گزارهٔ ۳ همان تعریف متوازی‌الاضلاع است.

۶ گزینه ۲

مطابق شکل، اضلاع AD و BC را امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کنند.

$$\overset{\triangle}{OCD}: \hat{O} + \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow[D=60^\circ]{C=60^\circ} \hat{O} = 60^\circ \Rightarrow \text{متساوی‌الاضلاع است } \overset{\triangle}{OCD}$$

حال در مثلث OAB داریم:



$$\begin{cases} \tan 30^\circ = \dfrac{OB}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{OB}{4\sqrt{3}} \Rightarrow OB = 4 \\ OA^2 = OB^2 + AB^2 = 16 + 48 = 64 \Rightarrow OA = 8 \end{cases}$$

پس طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ODC برابر است با $7 + 8 = 15$ و داریم:

$$S_{ABCD} = S_{\overset{\triangle}{OCD}} - S_{\overset{\triangle}{OAB}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (15)^2 - \frac{4 \times 4\sqrt{3}}{2} = \frac{193\sqrt{3}}{4}$$

۷

گزینه ۲

نکته (قضیهٔ تالس): اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد، برابر است با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند.

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABF}\ : DE \parallel BF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DF} \\ \overset{\Delta}{ABC}\ : EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DF} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AF+FC} = \frac{۳}{۳+۴} \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{۳}{۷}$$

۸

گزینه ۳

نکته: طول قطر مکعب‌مستطیلی به ابعاد a، b و c برابر است با:

$$d = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$$

اگر یال‌های مکعب‌مستطیل را a، b و c در نظر بگیریم، داریم:

$$a^۲ + b^۲ = \sqrt{۶}^۲ \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۶ \quad (۱)$$

$$b^۲ + c^۲ = \sqrt{۷}^۲ \Rightarrow b^۲ + c^۲ = ۷ \quad (۲)$$

$$a^۲ + c^۲ = \sqrt{۸}^۲ \Rightarrow a^۲ + c^۲ = ۸ \quad (۳)$$

با جمع کردن طرفین (۱)، (۲) و (۳) باهم داریم:

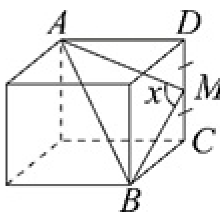
$$۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲c^۲ = ۲۱ \Rightarrow a^۲ + b^۲ + c^۲ = \frac{۲۱}{۲} \Rightarrow d^۲ = \frac{۲۱}{۲} \xrightarrow{d>0} d = \sqrt{\frac{۲۱}{۲}}$$

۹

گزینه ۳

نکته: طول قطر مکعبی به ضلع a برابر $a\sqrt{۳}$ است.

نکته (قضیهٔ کسینوس‌ها): در مثلث دلخواه ABC داریم



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos \hat{A}$$

بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود، برای سادگی، اندازهٔ هر یال مکعب را برابر ۲ فرض می‌کنیم. مطابق نکته قطر مکعب برابر است با:

$$AB = a\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

طول اضلاع MB و MA را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} MB = \sqrt{MC^۲ + BC^۲} = \sqrt{۱ + ۲^۲} = \sqrt{۵} \\ MA = \sqrt{MD^۲ + AD^۲} = \sqrt{۱ + ۲^۲} = \sqrt{۵} \end{cases}$$

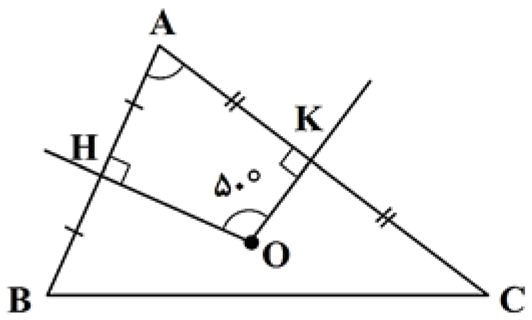
در مثلث AMB قضیهٔ کسینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$AB^۲ = MA^۲ + MB^۲ - ۲MA \times MB\cos x \Rightarrow (۲\sqrt{۳})^۲ = ۵ + ۵ - ۲ \times ۵\cos x \Rightarrow ۱۰\cos x = -۲ \Rightarrow \cos x$$
$$= -\frac{۱}{۵} \Rightarrow x = \cos^{-۱}(-\frac{۱}{۵})$$

دقت کنید که می‌توانستیم ضلع مکعب را a در نظر گرفته و پارامتری نیز جواب را به دست آوریم.

۱۰ گزینه ۴

در چهار ضلعی $AHOK$ مجموع زوایا برابر ۳۶۰° است:



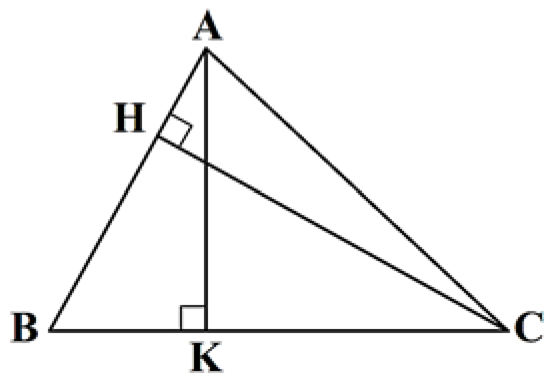
$$\hat{A}+\hat{H}+\hat{O}+\hat{K}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+۹۰^\circ+۵۰^\circ+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۱۳۰^\circ$$

بنابراین:

$$\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۳۰^\circ=۵۰^\circ$$

۱۱ گزینه ۴

طبق فرض داریم:



$$AB=۳\ ,\ BC=۶\ ,\ AC=۴$$

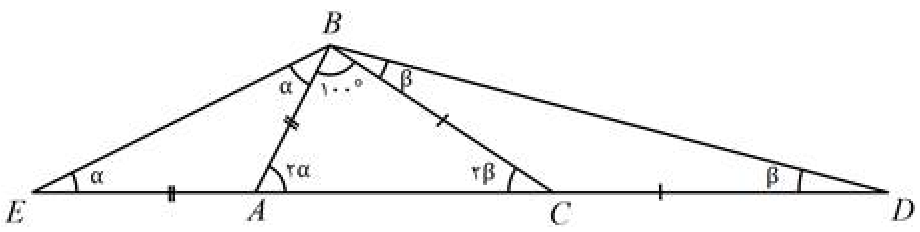
حال در مثلث ABC داریم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AK\times BC=\frac{۱}{۲}CH\times AB \Rightarrow AK\times ۶=CH\times ۳ \Rightarrow \frac{AK}{CH}=\frac{۱}{۲}$$

۱۲ گزینه ۱

نکته: کوچک ترین زاویهٔ خارجی یک مثلث، نظیر بزرگ ترین زاویهٔ داخلی آن است.

با توجه به شکل، مثلث های ABEو BCD متساوی الساقین هستند، پس می توان نوشت:



$$\begin{cases} ABE\text{زاویهٔ خارجی مثلث} : \hat{A}=\alpha+\alpha=۲\alpha \\ BCD\text{زاویهٔ خارجی مثلث} : \hat{C}=\beta+\beta=۲\beta \end{cases} \xrightarrow{\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ-۱۰۰^\circ} ۲\alpha+۲\beta=۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۴۰^\circ$$

بنابراین:

$$\overset{\Delta}{BED}\ :\ \hat{B}=۱۰۰^\circ+(\alpha+\beta)=۱۴۰^\circ$$

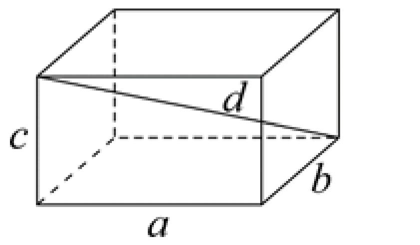
درنتیجه:

$$\overset{\Delta}{BED}\ \text{کوچک ترین زاویهٔ خارجی}=۱۸۰^\circ-۱۴۰^\circ=۴۰^\circ$$

۱۳

گزینه ۱

نکته: طول قطر و مساحت کل مکعب مستطیلی به ابعاد a، b و c برابر است با:



قطر : $d = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$

مساحت : $S = ۲(ab + ac + bc)$

طبق فرض داریم:

$$d = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲} = ۶ \quad (*)$$

$$a + b + c = ۸$$

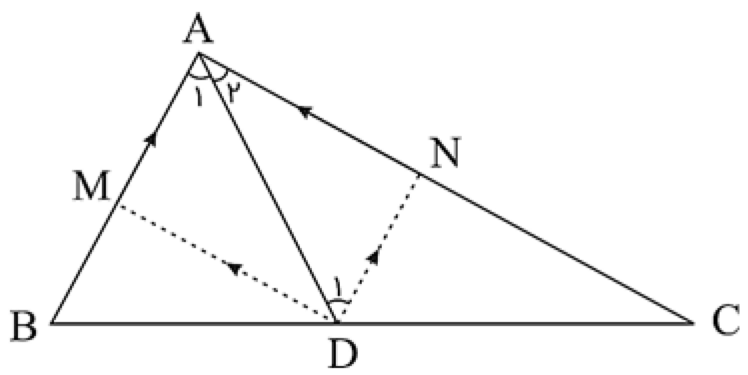
$$(a + b + c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲(ab + bc + ac) \xrightarrow{(*)} ۶۴ = ۳۶ + ۲(ab + bc + ac)$$

$$\Rightarrow S = ۲(ab + bc + ac) = ۲۸$$

۱۴

گزینه ۲

چهار ضلعی AMDN قطعاً متوازی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع مقابل آن موازی‌اند. حال داریم:



$$\left.\begin{matrix} AN \parallel DM \\ \text{خط مورب } AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱ \\ \left.\begin{matrix} \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{D}_۱ \xrightarrow{\overset{\triangle}{ADN}} AN = DN$$

باتوجه‌به اینکه دو ضلع مجاور این متوازی‌الاضلاع برابر یکدیگرند پس چهار ضلعی AMDN لوزی است.

۱۵

گزینه ۴

با فرض $EC = x$ داریم:

$$DE = ۲x$$

درنتیجه:

$$AB = DC = ۳x$$

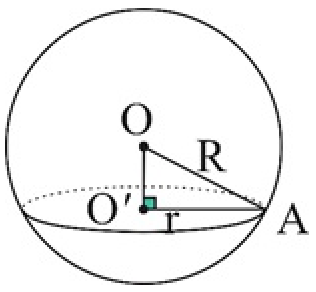
مثلث‌های EFC و AFB به حالت تساوی زاویه‌های متناظرشان باهم متشابه‌اند، پس:

$$\frac{EF}{FB} = \frac{EC}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{FB} = \frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{EF + FB}{FB} = \frac{۱ + ۳}{۳} \Rightarrow \frac{EB}{FB} = \frac{۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{EB = ۱۲} \frac{۱۲}{FB} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow FB = ۹\,cm$$

۱۶ گزینه ۲



$\text{حجم کره}: V = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} \Rightarrow ۲۸۸\pi = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$

$R^{۳} = ۲۱۶ \Rightarrow R = ۶$

$\overset{\Delta}{OO'A} : \hat{O'} = ۹۰^\circ ,\ OO' = ۳ ,\ R = ۶ ,\ O'A = r$

$r = \sqrt{R^{۲} - OO'^{۲}} = \sqrt{۳۶ - ۹} = \sqrt{۲۷} \Rightarrow r = ۳\sqrt{۳}$

$\text{مساحت کره}: S = ۴\pi R^{۲}$

$\text{مساحت دایرهٔ مقطع برش}: S' = \pi r^{۲}$

$\frac{S}{S'} = \frac{۴\pi R^{۲}}{\pi r^{۲}} = \frac{۴ \times ۶^{۲}}{(۳\sqrt{۳})^{۲}} = \frac{۱۶}{۳}$

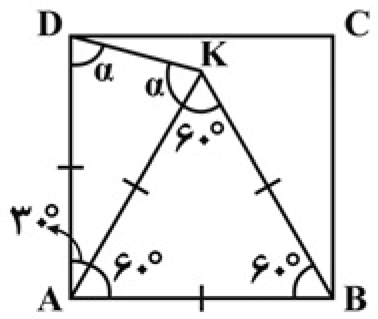
۱۷ گزینه ۲

مثلث KAB متساوی‌الاضلاع است، بنابراین:

$AK = KB = AB \quad (۱)$

ازطرفی می‌دانیم:

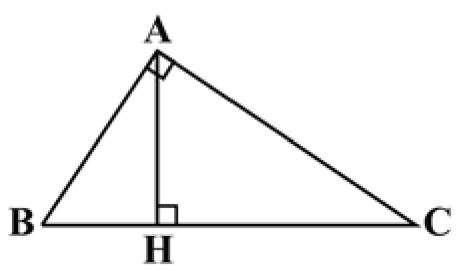
$AB = AD \quad (۲)$



$\xrightarrow{(۱) \text{ و } (۲)} AK = AD \Rightarrow$ مثلث ADK متساوی‌الساقین است

$\Rightarrow A\hat{D}K = A\hat{K}D = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ \Rightarrow \alpha = ۷۵^\circ$

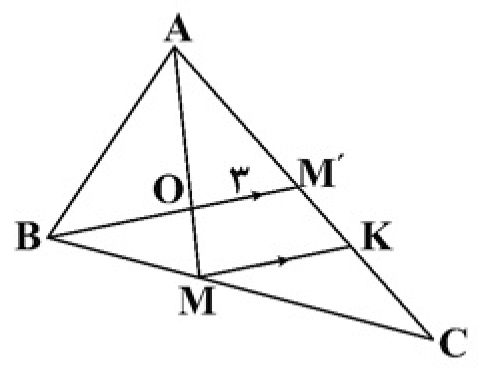
۱۸ گزینه ۳



$\begin{cases} BH = ۲ \\ HC = ۸ \end{cases} \Rightarrow AB^{۲} = BH \times BC$

$AB^{۲} = ۲ \times ۱۰ = ۲۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$

۱۹ گزینه ۳



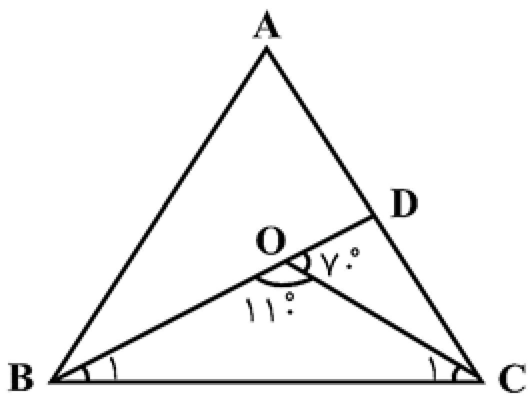
مثلث‌های $\overset{\Delta}{AMK}$ و $\overset{\Delta}{AOM'}$ متشابه هستند، پس داریم:

$$\frac{AO}{AM} = \frac{OM'}{MK} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = \frac{۳}{MK} \Rightarrow MK = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

نکته: محل تلاقی میانه‌ها، $\frac{۲}{۳}$ طول میانه، از رأس مربوط به همان میانه و $\frac{۱}{۳}$ میانه از وسط ضلعی که میانه به آن وارد شده است فاصله دارد.

۲۰ گزینه ۲

مطابق شکل $C\hat{O}D = ۷۰^\circ$ و درنتیجه $B\hat{O}C = ۱۱۰^\circ$ است؛ بنابراین داریم:



$$\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۷۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۷۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۴۰^\circ$$

تذکر: باتوجه‌به اینکه $\hat{B} + \hat{C} < ۱۸۰^\circ$، درنتیجه $\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ < ۹۰^\circ$ و بنابراین زاویهٔ BOC قطعاً منفرجه است.

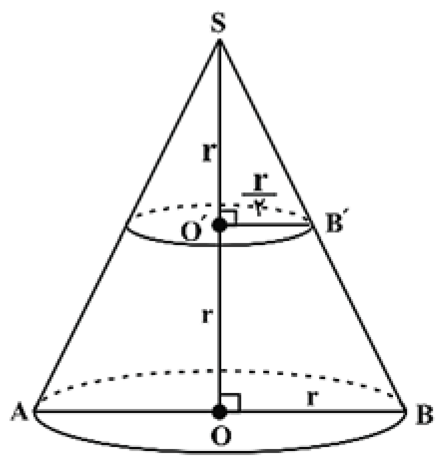
۲۱ گزینه ۲

اگر نقطه‌ای دارای فاصلهٔ یکسان از دو ضلع یک زوایه باشد، آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.
چون نقطهٔ M از دو ضلع AB و AC که دو ضلع متقاطع در رأس A هستند به یک فاصله است، پس لزوماً روی نیمساز رأس A قرار دارد.

۲۲ گزینه ۳

باتوجه‌به شکل زیر و با به کار بردن قضیهٔ تالس در مثلث SOB، داریم $O'B' = \frac{r}{۲}$، پس مساحت دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $O'B'$ برابر است با $\pi(\frac{r}{۲})^۲$،
همچنین مساحت مثلث SAB برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}(۲r)(۲r) = ۲r^۲$$



بنابراین نسبت موردنظر برابر است با:

$$\frac{\pi(\frac{r}{۲})^۲}{۲r^۲} = \frac{\pi}{۸}$$

۲۳ گزینه ۳

$$\text{حجم مکعب‌مستطیل} = a\times ۲a\times ۲a = ۴a^۳$$

قطر کره همان قطر مکعب‌مستطیل است.

$$۲r = \sqrt{a^۲+۴a^۲+۴a^۲} = \sqrt{۹a^۲} = ۳a \Rightarrow r = \frac{۳}{۲}a$$

$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم مکعب‌مستطیل}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi(\frac{۳}{۲}a)^۳}{۴a^۳} = \frac{۹}{۸}\pi$$

۲۴ گزینه ۱

$$۷x^۲-۴xy+۴y^۲=۱۰ \Rightarrow \tan ۲\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-۴}{۷-۴} = -\frac{۴}{۳} < ۰$$
$$۱+\tan^۲ ۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲ ۲\theta} = ۱+\frac{۱۶}{۹} = \frac{۲۵}{۹} \Rightarrow \cos ۲\theta = \pm\frac{۳}{۵}$$

چون $\tan ۲\theta < ۰$، پس ۲θ در ربع دوم است و لذا $\cos ۲\theta < ۰$؛ بنابراین $\cos ۲\theta = -\frac{۳}{۵}$.

$$\sin^۲\theta = \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲} = \frac{۱+\frac{۳}{۵}}{۲} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

۲۵ گزینه ۳

نکته: برای استاندارد کردن مقطع مخروطی $Ax^۲+Bxy+Cy^۲+Dx+Ey+F=۰$ باید محورهای مختصات را به‌اندازهٔ θ دوران دهیم که در آن: $\tan ۲\theta = \frac{B}{A-C}$

$$۵x^۲+۲axy+۴y^۲-۶x+y=۲$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\tan ۲\theta = \frac{B}{A-C} \Rightarrow \tan ۱۲۰^\circ = \frac{۲a}{۵-۴} = ۲a \Rightarrow ۲a = -\sqrt{۳} \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۶ گزینه ۳

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{۳} = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۱-m} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۱-m}$$
$$\Rightarrow ۱-m=-۲ \Rightarrow m=۳ \Rightarrow x^۲-۲\sqrt{۳}xy+۳y^۲+x-y-۲=۰$$
$$x=۰ \Rightarrow ۳y^۲-y-۲=۰ \Rightarrow y_۱+y_۲ = -(\frac{-۱}{۳}) = \frac{۱}{۳}$$

۲۷ گزینه ۱

نکته: ماتریس دوران حول مبدأ مختصات با زاویهٔ θ عبارت است از:

$$R_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

نکته: دوران یافتهٔ نقطهٔ $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ حول مبدأ مختصات به‌اندازهٔ θ عبارت است از: $R_\theta \times \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$R_{۳۰^\circ} = \begin{bmatrix}\cos ۳۰^\circ & -\sin ۳۰^\circ\\ \sin ۳۰^\circ & \cos ۳۰^\circ\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{۳}-۱\\ ۱+\sqrt{۳}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a=\sqrt{۳}-۱\\ b=۱+\sqrt{۳}\end{cases}$$
$$\Rightarrow a+b = \sqrt{۳}-۱+۱+\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

۲۸ گزینه ۲

$$R_{(45^\circ)} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۲۹ گزینه ۳

نکته: ماتریس دوران به‌اندازهٔ θ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات عبارت است از:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_\theta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نکته}} R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = -\frac{1}{2} \\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta$$

$$= -150^\circ$$

۳۰ گزینه ۱

نکته: منحنی $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ با دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ θ به حالت استاندارد (افقی یا قائم) درمی‌آید که θ از رابطهٔ $\tan 2\theta = \frac{b}{a-c}$ محاسبه می‌گردد.

باتوجه‌به نکتهٔ بالا داریم:

$$\tan 2\theta = \frac{-\sqrt{3}}{4-3} = -\sqrt{3} \Rightarrow 2\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

۳۱ گزینه ۲

نکته: اگر محورهای مختصات را به‌اندازهٔ θ دوران دهیم، آنگاه رابطهٔ بین مختصات قدیم (x, y) و مختصات جدید (X, Y) به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

ابتدا زاویهٔ مناسب دوران را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 5$$

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-2\sqrt{3}}{1-3} = \sqrt{3} \Rightarrow 2\theta = 60^\circ \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

حالا با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y \\ y = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۳۲ گزینه ۲

نکته: برای استانداردسازی مقطع مخروطی $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، باید محورهای مختصات را به‌اندازهٔ θ دوران دهیم که در آن $\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}$.

$$x^2 - 4\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-4\sqrt{3}}{1-1} = \infty \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

۳۳ گزینه ۲

نکته: اگر مقطع مخروطی $ax^۲ + bxy + cy^۲ + dx + ey + f = ۰$ را به‌اندازهٔ θ حول مبدأ مختصات دوران دهیم، آنگاه به حالت استاندارد درمی‌آید که در آن θ از رابطهٔ $\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c}$ به دست می‌آید.

نکته: $\frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱ + \tan^۲ x \quad , \quad \cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$۲x^۲ + ۲\sqrt{۲}xy + ۳y^۲ = ۵ \ : \ \tan ۲\theta = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲-۳} = -۲\sqrt{۲}$$

$$\frac{۱}{\cos^۲ ۲\theta} = ۱ + \tan^۲ ۲\theta = ۱ + ۸ = ۹ \Rightarrow \cos^۲ ۲\theta = \frac{۱}{۹} (*)$$

چون $\tan ۲\theta < ۰$ و $۰ \le ۲\theta \le \pi$ است، پس ۲θ در ربع دوم است؛ بنابراین $\cos ۲\theta < ۰$، پس از $(*)$ داریم: $\cos ۲\theta = -\frac{۱}{۳}$

$$\sin^۲ \theta = \frac{۱ - \cos ۲\theta}{۲} = \frac{۱ + \frac{۱}{۳}}{۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$\xrightarrow{\sin \theta > ۰} \sin \theta = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \theta = \sin^{-۱} \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

۳۴ گزینه ۲

اگر زاویهٔ دوران را برابر θ فرض کنیم، داریم:

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{۲۴}{۵ - (-۲)} = \frac{۲۴}{۷} \Rightarrow \frac{۲\tan \theta}{۱ - \tan^۲ \theta} = \frac{۲۴}{۷}$$

$$\Rightarrow ۱۴ \tan \theta = ۲۴ - ۲۴ \tan^۲ \theta \xrightarrow{\div ۲} ۱۲ \tan^۲ \theta + ۷ \tan \theta - ۱۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{-۷ \pm ۲۵}{۲۴} \Rightarrow \begin{cases} \tan \theta = \frac{۳}{۴} \\ \tan \theta = -\frac{۴}{۳} \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۳۵ گزینه ۴

ارتباط دستگاه جدید برحسب دستگاه قدیم به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y) \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(y-x) \end{cases}$$

$$\frac{y'^۲}{۲} - \frac{x'^۲}{۱۰} = ۱ \Rightarrow ۵y'^۲ - x'^۲ = ۱۰ \Rightarrow ۵ \times \frac{۱}{۲}(y-x)^۲ - \frac{۱}{۲}(x+y)^۲ = ۱۰$$

$$\Rightarrow ۵(x^۲ + y^۲ - ۲xy) - (x^۲ + y^۲ + ۲xy) = ۲۰ \Rightarrow ۴x^۲ - ۱۲xy + ۴y^۲ = ۲۰ \Rightarrow x^۲ - ۳xy + y^۲ = ۵$$