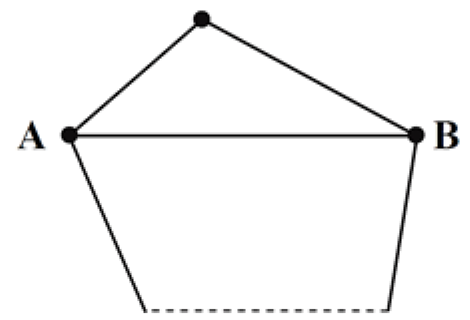
۱

گزینه ۲

نکته: از هر رأس یک nضلعی محدب، $n-۳$ قطر می‌گذرد؛ بنابراین تعداد کل قطرهای یک nضلعی محدب برابر با $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.

طبق فرض داریم:

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = ۴n \Rightarrow n(n-۳) = ۸n \xrightarrow{\div n} n-۳ = ۸ \Rightarrow n = ۱۱$$



از هریک از این سه رأس متوالی، $n-۳ = ۸$ قطر می‌گذرد؛ ولی باتوجه‌به اینکه قطر AB مشترک است، یک‌بار با رأس A و یک‌بار با رأس B محاسبه می‌شود؛ بنابراین باید ۱ واحد از مجموع قطرها کم کنیم.

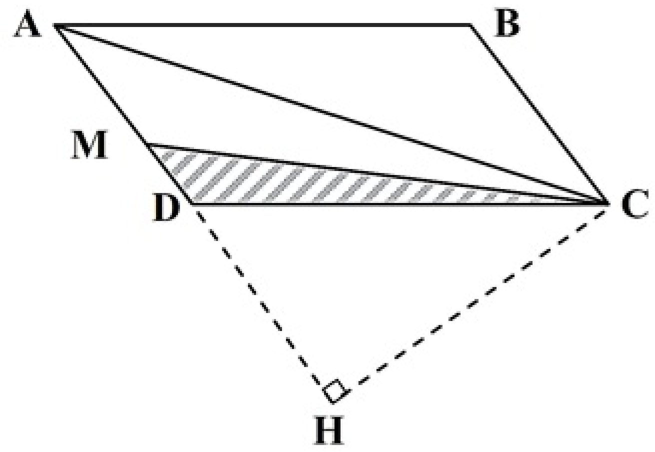
$$۳ \times ۸ - ۱ = ۲۴ - ۱ = ۲۳$$

۲

گزینه ۲

نکته: اگر دو مثلث دارای ارتفاع یکسان باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاعشان است.

در شکل زیر، مساحت مثلث ADC، نصف مساحت متوازی‌الاضلاع است (زیرا قطر متوازی‌الاضلاع، آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌کند).



ازطرفی از تساوی $\frac{AM}{MD} = \frac{۵}{۲}$، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{MD}{AM} = \frac{۲}{۵} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{MD}{AM+MD} = \frac{۲}{۵+۲} \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{۲}{۷}$$

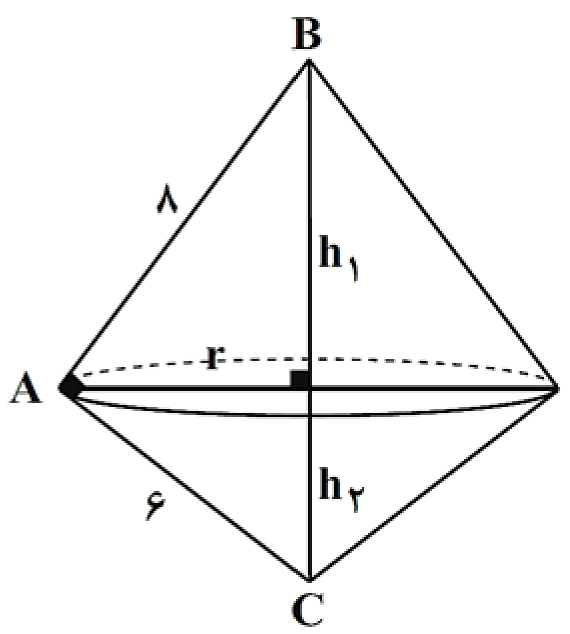
حال باتوجه‌به اینکه CH ارتفاع مشترک $\overset{\Delta}{CDM}$ و $\overset{\Delta}{ACD}$ است، از نکتهٔ بالا نتیجه می‌گیریم:

$$S_{\overset{\Delta}{CMD}} = \frac{۲}{۷} S_{\overset{\Delta}{ACD}} = \frac{۲}{۷}(\frac{۱}{۲}S_{ABCD}) = \frac{۱}{۷}S_{ABCD}$$

۳

گزینه ۱

از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وترش مطابق شکل، دو مخروط ایجاد می‌شود:



با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$BC = \sqrt{AB^۲ + AC^۲} = \sqrt{۶۴ + ۳۶} = ۱۰$$

حال مساحت مثلث ABC را به دو روش محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AB \times AC = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۶ = ۲۴ \\ S_{ABC} = \frac{۱}{۲}r \times BC = ۵r \end{cases} \Rightarrow ۵r = ۲۴ \Rightarrow r = \frac{۲۴}{۵}$$

بنابراین حجم شکل حاصل (متشکل از دو مخروط) برابر است با:

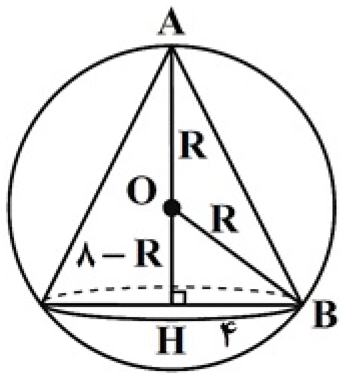
$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h_1+\frac{1}{3}\pi r^2h_2=\frac{1}{3}\pi r^2(h_1+h_2)=\frac{1}{3}\pi\times(\frac{24}{5})^2\times 10=\frac{384\pi}{5}$$

۴

گزینه ۱

نکته: مساحت کره‌ای به شعاع R برابر با $4\pi R^2$ است.

در اثر دوران مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع ۸، یک مخروط به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۸ به دست می‌آید. اگر شـعاع کرهٔ محیطی این مخروط را R بنامیم، مطابق شکل داریم:



$$OA=OB=R\Rightarrow OH=AH-OA=8-R$$

حال با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH داریم:

$$OB^2=OH^2+HB^2\Rightarrow R^2=(8-R)^2+4^2$$
$$\Rightarrow R^2=64+R^2-16R+16$$
$$\Rightarrow 16R=80\Rightarrow R=5$$

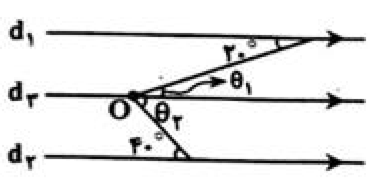
بنابراین مساحت این کره برابر است با:

$$S=4\pi(5)^2=100\pi$$

۵

گزینه ۳

در شکل زیر از نقطهٔ O، خط d_3 را به‌موازات d_1 و d_2 رسم کرده‌ایم. اکنون طبق ویژگی خطوط موازی و مورب داریم:



$$\hat{\theta}_1=20^\circ\quad,\quad\hat{\theta}_2=40^\circ$$

پس خواهیم داشت:

$$\hat{\theta}=\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2=20^\circ+40^\circ=60^\circ$$

۶ گزینه ۳

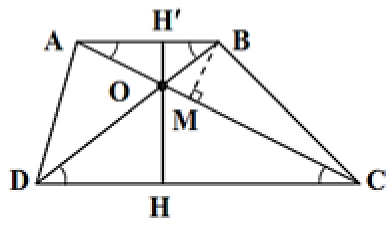
راه‌حل اول:

نکته: مساحت ذوزنقه، برابر با نصف حاصل‌ضرب مجموع دو قاعده در ارتفاع است:

$$AB \| CD \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{قضیهٔ خطوط}} \begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \\ \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ز})} \overset{\triangle}{AOB} \sim \overset{\triangle}{COD}$$

نسبت تشابه این دو مثلث برابر $\frac{OC}{OA}$ است.

ازطرفی داریم:



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{BOC}}}{S_{\overset{\triangle}{AOB}}} = \frac{\frac{۱}{۲}\times BM \times OC}{\frac{۱}{۲}\times BM \times OA} = \frac{OC}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

بنابراین $\overset{\triangle}{AOB}$ و $\overset{\triangle}{COD}$ با نسبت تشابه ۲، متشابه‌اند پس داریم:

$$\begin{cases} CD = ۲AB \\ OH = ۲OH' \end{cases} \xrightarrow[OH'=h]{AB=a} \begin{cases} CD = ۲a \\ OH = ۲h \end{cases} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(AB + CD) \times HH'$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۳a \times ۳h = \frac{۹ah}{۲} \quad (*)$$

طبق فرض $S_{\overset{\triangle}{AOB}} = ۲$، بنابراین:

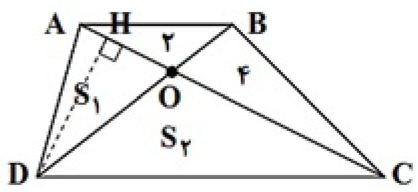
$$\frac{۱}{۲}AB \times OH' = ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times a \times h = ۲ \Rightarrow ah = ۴$$

با جایگذاری این مقدار در (*) داریم:

$$S_{ABCD} = ۱۸$$

راه‌حل دوم:

فاصلهٔ A از DC با فاصلهٔ B از DC برابر است (زیرا $AB \| CD$)، پس مساحت دو مثلث ADC و BDC هم برابر است (زیرا قاعدهٔ مشترک و ارتفاع برابر دارند).



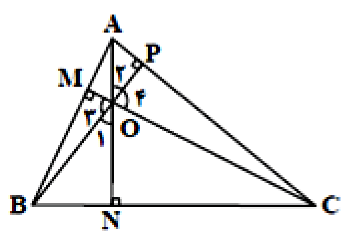
$$S_{\overset{\triangle}{ADC}} = S_{\overset{\triangle}{BDC}} \Rightarrow S_۱ + S_۲ = ۴ + S_۲ \Rightarrow S_۱ = ۴$$

$$\begin{cases} \dfrac{S_۱}{S_۲} = \dfrac{\frac{۱}{۲}DH.OA}{\frac{۱}{۲}DH.OC} = \dfrac{OA}{OC} \Rightarrow \dfrac{۴}{S_۲} = \dfrac{OA}{OC} \\ \dfrac{S_{\overset{\triangle}{AOB}}}{S_{\overset{\triangle}{BOC}}} = \dfrac{OA}{OC} \Rightarrow \dfrac{۲}{۴} = \dfrac{OA}{OC} \end{cases} \Rightarrow \frac{۴}{S_۲} = \frac{۲}{۴} \Rightarrow S_۲ = ۸$$

بنابراین مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$S_{ABCD} = ۲ + ۴ + ۴ + ۸ = ۱۸$$

۷ گزینه ۴



مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{OBN}$ و $\overset{\triangle}{OAP}$ متشابه هستند؛ زیرا:

$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \ , \ \hat{N} = \hat{P} = ۹۰^\circ$$

به همین ترتیب مثلث‌های $\overset{\triangle}{AMC}$ و $\overset{\triangle}{ABP}$ متشابه هستند؛ زیرا:

$$\hat{A} = \hat{A} \ , \ \hat{M} = \hat{P} = ۹۰^\circ$$

مثلث‌های $\overset{\triangle}{OPC}$ و $\overset{\triangle}{OMB}$ نیز به همین حالت متشابه هستند؛ زیرا:

$$\hat{O}_۳ = \hat{O}_۴ \ , \ \hat{M} = \hat{P} = ۹۰^\circ$$

ولی مثلث‌های $\overset{\triangle}{OAP}$ و $\overset{\triangle}{OAM}$ لزوماً متشابه نیستند.

۸

گزینه ۲

طول ضلع قاعده را با a و ارتفاع را با h نمایش می‌دهیم. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \text{مساحت کل}: \overbrace{2a^2}^{\text{دو قاعده}} + \overbrace{4ah}^{\text{چهار وجه جانبی}} = 90 \Rightarrow a^2 + 2ah = 45 \quad (1) \\ \text{مجموع ارتفاع و قاعده}: a + h = 7 \quad (2) \end{cases}$$

با جایگذاری $a = 7 - h$ در (۱) داریم:

$$(7-h)^2 + 2h(7-h) = 45 \Rightarrow 49 - \cancel{14h} + h^2 + \cancel{14h} - 2h^2 = 45 \Rightarrow h^2 = 49 - 45 = 4 \xrightarrow{h>0} h = 2$$

۹

گزینه ۳

نکته: حجم مخروطی با شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

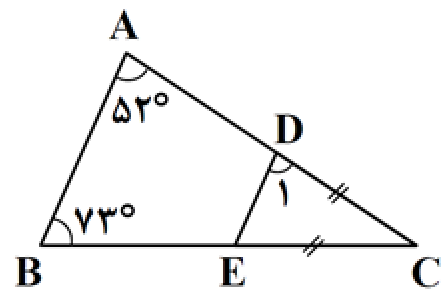
$$\begin{cases} \text{استوانه}: V = \pi r^2 h \\ \text{مخروط}: V = \frac{1}{3}\pi (2r)^2 h' \end{cases} \Rightarrow \pi r^2 h = \frac{4\pi r^2}{3} h' \Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{4}{3}$$

۱۰

گزینه ۱

طبق شکل زیر خواهیم داشت:

$$\hat{C} = 180^\circ - (52^\circ + 73^\circ) = 55^\circ$$



اکنون باتوجه‌به اینکه مثلث DCE متساوی‌الساقین است، نتیجه می‌شود:

$$\hat{D}_1 = C\hat{D}E = \frac{180^\circ - 55^\circ}{2} = \frac{125^\circ}{2} = 62/5^\circ$$

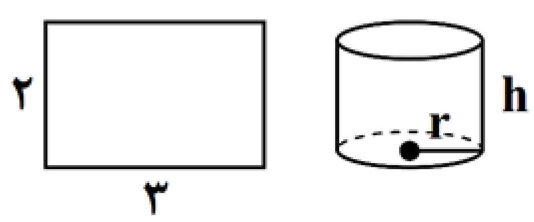
بنابراین:

$$A\hat{D}E = 180^\circ - 62/5^\circ = 117/5^\circ$$

۱۱

گزینه ۴

نکته: حجم استوانه‌ای با شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h برابر است با: $\pi r^2 h$

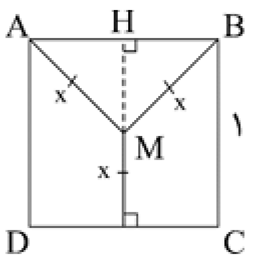


$$\begin{cases} \text{حالت(۱)}: \text{محیط دایرهٔ قاعده}: 2\pi r = 3 \ , \ h = 2 \Rightarrow r = \frac{3}{2\pi} \\ \text{حالت(۲)}: \text{محیط دایرهٔ قاعده}: 2\pi r' = 2 \ , \ h' = 3 \Rightarrow r' = \frac{2}{2\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r'^2 h'} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \left(\frac{h}{h'}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

۱۲ گزینه ۳

نکته: نقطهٔ M از نقاط A و B به یک فاصله است، اگر و تنها اگر روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد.



$$MH = ۱ - x \,,\ \ HB = \frac{AB}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $\overset{\Delta}{MHB}$، داریم:

$$MB^۲ = MH^۲ + HB^۲ \Rightarrow x^۲ = (۱ - x)^۲ + \frac{۱}{۴} = ۱ + x^۲ - ۲x + \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲x = \frac{۵}{۴} \Rightarrow x = \frac{۵}{۸}$$

۱۳ گزینه ۲

نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است.

نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت نیمسازها، میانه‌ها و ارتفاع‌های نظیر برابر نسبت تشابه است.

اگر نسبت تشابه را k در نظر بگیریم، طبق نکات فوق داریم:

$$k^۲ = \frac{S}{S'} = \frac{۱۶}{۸۱} \Rightarrow k = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \text{نسبت نیمسازهای نظیر} = \frac{۴}{۹}$$

۱۴ گزینه ۳

اگر طول ضلع شش ضلعی منتظم را با x نشان دهیم، آنگاه طول ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر با $\frac{x}{۲}$ است و باتوجه‌به رابطهٔ $h_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$، داریم:

$$\frac{x}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \Rightarrow a = \frac{x}{\sqrt{۳}} = \frac{x\sqrt{۳}}{۳}$$

از طرفی قطر کوچک شش ضلعی منتظمی به طول ضلع x برابر با $x\sqrt{۳}$ است. درنتیجه نسبت موردنظر برابر است با:

$$\frac{\frac{x\sqrt{۳}}{۳}}{x\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۳}$$

۱۵ گزینه ۱

مطابق شکل دو مثلث ARS و BRS، دارای ارتفاع مشترک ST هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع مشترک است، یعنی:

$$\frac{S(\overset{\Delta}{ARS})}{S(\overset{\Delta}{BRS})} = \frac{AR}{BR} \qquad (*)$$

ازطرفی طبق تعمیم قضیهٔ تالس، داریم:

$$\frac{AR}{AB} = \frac{RS}{BC} \Rightarrow \frac{AR}{AB - AR} = \frac{RS}{BC - RS} \Rightarrow \frac{AR}{BR} = \frac{RS}{BC - RS}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{S(\overset{\Delta}{ARS})}{S(\overset{\Delta}{BRS})} = \frac{RS}{BC - RS}$$

۱۶ گزینه ۴

اگر اندازهٔ یال مکعب a باشد، آنگاه خواهیم داشت:

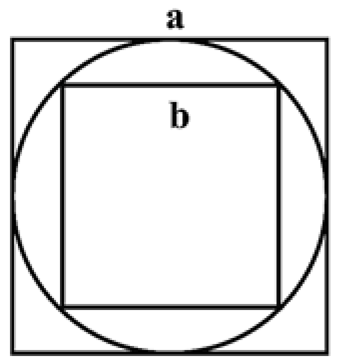
$$\overset{\Delta}{AMC}\ : AM=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\overset{\Delta}{AMB}\ : BM=\sqrt{BA^2+MA^2}=\sqrt{a^2+\frac{5a^2}{4}}=\frac{3}{2}a$$

$$\overset{\Delta}{AMB}\ : sin(A\hat{M}B)=\frac{a}{\frac{3}{2}a}=\frac{2}{3}$$

۱۷ گزینه ۳

هرگاه مکعبی در کره‌ای محاط باشد، قطر مکعب برابر با قطر کره و هرگاه مکعبی بر کره‌ای محیط شود، ضلع مکعب برابر با قطر کره است.



اگر S_1 مساحت مکعب بزرگ‌تر، S_2 مساحت کره و S_3 مساحت مکعب کوچک‌تر باشد، خواهیم داشت:

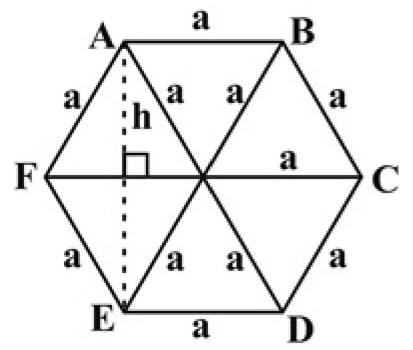
$$S_2=4\pi R^2$$
$$S_1=6a^2=6(2R)^2=24R^2$$

$$\left.\begin{array}{l} S_3=6b^2 \\ \sqrt{3}b=2R\Rightarrow b=\frac{2R}{\sqrt{3}} \end{array}\right\}\Rightarrow S_3=8R^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_1+S_3}{2S_2}=\frac{32R^2}{8\pi R^2}=\frac{4}{\pi}$$

۱۸ گزینه ۴

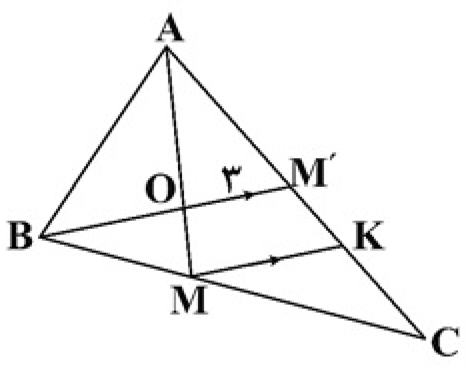
باتوجه‌به شـکل رسم‌شده، بزرگ‌ترین قطر در یک شش ضلعی منتظم برابر با $2a$ است و کوچک‌ترین قطر AE است که طول آن دو برابر ارتفاع یکی از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع است؛ بنابراین:



$$\frac{AE}{2}=h=\frac{\sqrt{3}}{2}a\Rightarrow AE=\sqrt{3}a$$

$$\Rightarrow \frac{\text{بزرگ‌ترین قطر}}{\text{کوچک‌ترین قطر}}=\frac{2a}{\sqrt{3}a}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۱۹ گزینه ۳



مثلث‌های $\overset{\Delta}{AMK}$ و $\overset{\Delta}{AOM'}$ متشابه هستند، پس داریم:

$$\frac{AO}{AM}=\frac{OM'}{MK}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{۳}{MK}\Rightarrow MK=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

نکته: محل تلاقی میانه‌ها، $\frac{۲}{۳}$ طول میانه، از رأس مربوط به همان میانه و $\frac{۱}{۳}$ میانه از وسط ضلعی که میانه به آن وارد شده است فاصله دارد.

۲۰ گزینه ۱

در مکعبی به طول یال a، حجم و قطر به ترتیب برابر با $a^۳$ و $a\sqrt{۳}$ است. داریم:

$$\frac{a^۳}{a\sqrt{۳}}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow a^۲=۹\Rightarrow a=۳$$

در مکعب مستطیل جدید، طول برابر با ۶ و عرض و ارتفاع هرکدام برابر با ۳ هستند، پس داریم:

$$\text{طول قطر مکعب مستطیل}=\sqrt{۶^۲+۳^۲+۳^۲}=\sqrt{۵۴}=۳\sqrt{۶}$$

۲۱ گزینه ۳

اندازهٔ دو زاویه را x و y در نظر می‌گیریم:

$$\frac{x}{۲}+\frac{y}{۲}=۷۰^\circ\Rightarrow x+y=۱۴۰^\circ\quad(۱)$$
$$\frac{x}{y}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}y\quad(۲)$$
$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{۳}{۴}y+y=۱۴۰^\circ\Rightarrow\frac{۷}{۴}y=۱۴۰^\circ\Rightarrow y=\frac{۱۴۰\times۴}{۷}=۸۰^\circ$$
$$x+y=۱۴۰^\circ\xrightarrow{y=۸۰^\circ}x=۶۰^\circ$$

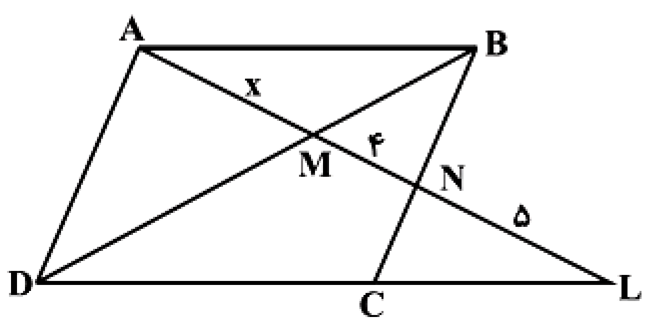
۲۲ گزینه ۴

مثلث‌های ABC، ABH و AHC همگی متشابه هستند و نسبت تشابه مثلث‌های AHC و AHB همان $\frac{۵}{۳}$ یا $\frac{۳}{۵}$ است؛ بنابراین نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر $\frac{S_{AHC}}{S_{AHB}}=\frac{۲۵}{۹}$ می‌باشد.

اگر $S_{AHB}=۹x$ و $S_{AHC}=۲۵x$، آنگاه $S_{ABC}=۳۴x$ خواهد بود.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AHC}}=\frac{۳۴x}{۲۵x}=\frac{۳۴}{۲۵}$$

۲۳ گزینه ۲



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{MAB}\sim\overset{\Delta}{MDL}\Rightarrow\frac{AM}{ML}=\frac{MB}{MD}\Rightarrow\frac{x}{۹}=\frac{MB}{MD}\\ \overset{\Delta}{MBN}\sim\overset{\Delta}{MAD}\Rightarrow\frac{AM}{MN}=\frac{MD}{MB}\Rightarrow\frac{x}{۴}=\frac{MD}{MB}\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow\frac{x}{۹}=\frac{۴}{x}\Rightarrow x^۲=۳۶\Rightarrow x=۶$$

۲۴ گزینه ۱

$$۷x^۲ - ۴xy + ۴y^۲ = ۱۰ \Rightarrow \tan ۲\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-۴}{۷-۴} = -\frac{۴}{۳} < ۰$$
$$۱ + \tan^۲ ۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲ ۲\theta} = ۱ + \frac{۱۶}{۹} = \frac{۲۵}{۹} \Rightarrow \cos ۲\theta = \pm\frac{۳}{۵}$$

چون $\tan ۲\theta < ۰$، پس ۲θ در ربع دوم است و لذا $\cos ۲\theta < ۰$؛ بنابراین $\cos ۲\theta = -\frac{۳}{۵}$.

$$\sin^۲\theta = \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲} = \frac{۱+\frac{۳}{۵}}{۲} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

۲۵ گزینه ۲

نکته: اگر مقطع مخروطی $ax^۲ + bxy + cy^۲ + dx + ey + f = ۰$ را به‌اندازهٔ θ حول مبدأ مختصات دوران دهیم، آنگاه به حالت استاندارد درمی‌آید که در آن θ از رابطهٔ $\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c}$ به دست می‌آید.

نکته: $\frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱ + \tan^۲ x \quad , \quad \cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$۲x^۲ + ۲\sqrt{۲}xy + ۳y^۲ = ۵ \; : \; \tan ۲\theta = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲-۳} = -۲\sqrt{۲}$$
$$\frac{۱}{\cos^۲ ۲\theta} = ۱ + \tan^۲ ۲\theta = ۱ + ۸ = ۹ \Rightarrow \cos^۲ ۲\theta = \frac{۱}{۹} (*)$$

چون $\tan ۲\theta < ۰$ و $۰ \le ۲\theta \le \pi$ است، پس ۲θ در ربع دوم است؛ بنابراین $\cos ۲\theta < ۰$، پس از $(*)$ داریم: $\cos ۲\theta = -\frac{۱}{۳}$

$$\sin^۲\theta = \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲} = \frac{۱+\frac{۱}{۳}}{۲} = \frac{۲}{۳}$$
$$\xrightarrow{\sin\theta > ۰} \sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \theta = \sin^{-۱}\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

۲۶ گزینه ۳

داریم:

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} \Rightarrow ۲\theta = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۶}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x = (\cos\theta)x' - (\sin\theta)y' \\ y = (\sin\theta)x' + (\cos\theta)y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x' - \frac{۱}{۲}y' \\ y = \frac{۱}{۲}x' + \frac{\sqrt{۳}}{۲}y' \end{cases}$$
$$x^۲ + \sqrt{۳}xy = \frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow (\frac{\sqrt{۳}}{۲}x' - \frac{۱}{۲}y')^۲ + \sqrt{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x' - \frac{۱}{۲}y')(\frac{۱}{۲}x' + \frac{\sqrt{۳}}{۲}y') = \frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}x'^۲ + \frac{۱}{۴}y'^۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}x'y' + \frac{۳}{۴}x'^۲ - \frac{۳}{۴}y'^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}x'y' = \frac{۳}{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}x'^۲ - \frac{۱}{۲}y'^۲ = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x'^۲ - \frac{y'^۲}{۳} = ۱$$
$$c^۲ = ۱ + ۳ = ۴ \Rightarrow c = ۲$$

بنابراین فاصلهٔ کانون تا مرکز در این هذلولی، برابر با $c = ۲$ است.

۲۷ گزینه ۳

نکته: ماتریس دوران به‌اندازهٔ θ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات عبارت است از:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
$$R_\theta = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -\sqrt{۳} & ۱ \\ -۱ & -\sqrt{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{نکته}} R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = -\frac{۱}{۲} \\ \cos\theta = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \theta$$
$$= -۱۵۰^\circ$$

۲۸ گزینه ۲

$$R_{(۴۵^\circ)} = \begin{bmatrix} \cos ۴۵^\circ & -\sin ۴۵^\circ \\ \sin ۴۵^\circ & \cos ۴۵^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲\sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-۱ \\ ۲+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

۲۹ گزینه ۱

نکته: ماتریس دوران حول مبدأ مختصات با زاویهٔ θ عبارت است از:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

نکته: دوران یافتهٔ نقطهٔ $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ حول مبدأ مختصات به‌اندازهٔ θ عبارت است از: $R_\theta \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$R_{۳۰^\circ} = \begin{bmatrix} \cos ۳۰^\circ & -\sin ۳۰^\circ \\ \sin ۳۰^\circ & \cos ۳۰^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{۳}-۱ \\ ۱+\sqrt{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{۳}-۱ \\ b = ۱+\sqrt{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b = \sqrt{۳}-۱+۱+\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

۳۰ گزینه ۱

نکته: منحنی $ax^۲+bxy+cy^۲+dx+ey+f=۰$ با دوران به‌اندازهٔ زاویهٔ θ به حالت استاندارد (افقی یا قائم) درمی‌آید که θ از رابطهٔ $\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c}$ محاسبه می‌گردد.

باتوجه‌به نکتهٔ بالا داریم:

$$\tan ۲\theta = \frac{-\sqrt{۳}}{۴-۳} = -\sqrt{۳} \Rightarrow ۲\theta = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳}$$

۳۱ گزینه ۳

نکته: برای استاندارد کردن مقطع مخروطی $Ax^۲+Bxy+Cy^۲+Dx+Ey+F=۰$، باید محورهای مختصات را به‌اندازهٔ θ دوران دهیم که در آن: $\tan ۲\theta = \frac{B}{A-C}$

$$۵x^۲+۲axy+۴y^۲-۶x+y=۲$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\tan ۲\theta = \frac{B}{A-C} \Rightarrow \tan ۱۲۰^\circ = \frac{۲a}{۵-۴} = ۲a \Rightarrow ۲a = -\sqrt{۳} \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۲ گزینه ۲

نکته: اگر محورهای مختصات را به‌اندازهٔ θ دوران دهیم، آنگاه رابطهٔ بین مختصات قدیم (x,y) و مختصات جدید (X,Y) به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

ابتدا زاویهٔ مناسب دوران را به دست می‌آوریم:

$$x^۲ - ۲\sqrt{۳}xy + ۳y^۲ = ۵$$

$$\tan ۲\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۱-۳} = \sqrt{۳} \Rightarrow ۲\theta = ۶۰^\circ \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

حالا با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}X - \frac{۱}{۲}Y \\ y = \frac{۱}{۲}X + \frac{\sqrt{۳}}{۲}Y \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۳۳ گزینه ۲

نکته: برای استانداردسازی مقطع مخروطی $Ax^۲ + Bxy + Cy^۲ + Dx + Ey + F = ۰$، باید محورهای مختصات را به‌اندازهٔ θ دوران دهیم که در آن $\tan ۲\theta = \frac{B}{A-C}$.

$$x^۲ - ۴\sqrt{۳}xy + y^۲ - ۲x + ۴y - ۷ = ۰$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\tan ۲\theta = \frac{B}{A-C} = \frac{-۴\sqrt{۳}}{۱-۱} = \infty \Rightarrow ۲\theta = ۹۰^\circ \Rightarrow \theta = ۴۵^\circ$$

۳۴ گزینه ۳

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{۳} = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۱-m} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۱-m}$$

$$\Rightarrow ۱-m = -۲ \Rightarrow m = ۳ \Rightarrow x^۲ - ۲\sqrt{۳}xy + ۳y^۲ + x - y - ۲ = ۰$$

$$x = ۰ \Rightarrow ۳y^۲ - y - ۲ = ۰ \Rightarrow y_۱ + y_۲ = -(\frac{-۱}{۳}) = \frac{۱}{۳}$$

۳۵ گزینه ۱

ابتدا زاویهٔ مناسب برای دوران را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{\sqrt{۳}}{-۱} = -\sqrt{۳} \Rightarrow ۲\theta = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱}{۲}x' - \frac{\sqrt{۳}}{۲}y' \\ y = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x' + \frac{۱}{۲}y' \end{cases} \quad , \quad \sqrt{۳}xy + y^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳}(\frac{۱}{۲}x' - \frac{\sqrt{۳}}{۲}y')(\frac{\sqrt{۳}}{۲}x' + \frac{۱}{۲}y') + (\frac{\sqrt{۳}}{۲}x' + \frac{۱}{۲}y')^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}x'^۲ - \frac{۱}{۲}y'^۲ = ۱ \Rightarrow ۳x'^۲ - y'^۲ = ۲ \xrightarrow[y' \to y]{x' \to x} ۳x^۲ - y^۲ = ۲$$