



۸۱. گزینه ۱ در نامعادله $-1 \leq 3x - 2 < 1$ ، محدوده x را بدست می آوریم (x را تنها می کنیم)

$$\begin{aligned} -1 \leq 3x - 2 < 1 &\xrightarrow{+2} 1 \leq 3x < 3 \\ \div 3 &\rightarrow \frac{1}{3} \leq x < 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right) \end{aligned}$$

دقت: در نامعادلاتی به فرم بالا (که در آن x فقط در وسط حضور دارد و در طرفین x وجود ندارد) می توانیم از روش فوق استفاده کنیم. در غیر اینصورت باید دو نامعادله را حل کنیم و از جواب ها اشتراک بگیریم.

* دقت کنید با توجه به گزینه ها تنها محدوده ای که شامل $\frac{1}{3} \leq x < \frac{3}{4}$ می شود، گزینه ۱ است.

۸۲. گزینه ۱

$$\begin{aligned} (A - B)' \cap (A \cup B) \cap A' &= (A \cap B')' \cap (A \cup B) \cap A' \\ &= (A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A' = \underbrace{(B \cup \emptyset)}_B \cap A' = B \cap A' = B - A \end{aligned}$$

۸۳. گزینه ۱

$$\begin{aligned} (A \cup (A \cap B))' \cap ((B \cap A) \cup (B - A)) &= (A' \cap (A \cap B)') \cap (B \cap \underbrace{(A \cup A')}_M) \\ &= (A' \cap (A' \cup B')) \cap (B \cap \underbrace{A'}_B) = A' \cap (A' \cup B') \cap B \\ &= A' \cap ((A' \cup B') \cap B) = A' \cap ((A' \cap B) \cup \underbrace{(B' \cap B)}_\emptyset) \\ &= A' \cap (A' \cap B) = \underbrace{(A' \cap A')}_A \cap B = A' \cap B = A' - B' \end{aligned}$$

۸۴. گزینه ۲ با استفاده از تغییر متغیر $x^2 + 4x + 5 = t$ داریم:

$$x^2 + 4x + 5 - 2 = \sqrt{x^2 + 4x + 5} \Rightarrow t - 2 = \sqrt{t} \quad (I)$$

چون عبارت سمت راست همواره مثبت است باید عبارت سمت چپ هم همواره مثبت باشد.

$$t - 2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2$$

حال طرفین عبارت I را به توان ۲ می رسانیم.

$$\begin{aligned} (t - 2)^2 &= (\sqrt{t})^2 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow \text{با توجه به اینکه } t \geq 2 \text{ است پس غیر قابل قبول است} \\ t = \frac{c}{a} = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 5 = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 > 0 \end{cases} \\ &\text{حاصلضرب ریشه ها: } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1 \end{aligned}$$

۸۵. گزینه ۴

پس اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله ی فوق باشند آنگاه $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$ سه جمله ی متوالی یک دنباله ی عددی هستند. لذا:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

باید $\Delta > 0$ باشد (x_1, x_2 ریشه های حقیقی معادله اند).

$$m = 4 \Rightarrow 12x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 192 < 0 \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

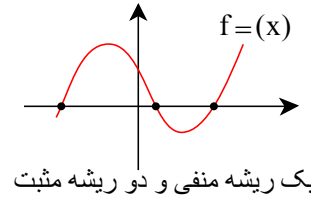
$$m = -4 \Rightarrow 12x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

۸۶. گزینه ۴ چون مجموع ضرایب معادله صفر است پس یکی از ریشه ها یک است. کافی است معادله را بر $x - 1$ تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x + 1 \mid x - 1 \\ \underline{x^3 + x - 1} \\ -x^3 + x^2 \\ \underline{x^2 - 2x + 1} \\ -x^2 + x \\ \underline{-x + 1} \\ x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 1 > 0 \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -1 < 0 \end{cases}$$



معادله‌ی درجه‌ی دوم دو ریشه‌ی مختلف علامت دارد. بنابراین معادله‌ی اصلی دو ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد.

۸۷. گزینه ۱

$$x^2 < |x - 2| \Rightarrow |x - 2| > x^2 \Rightarrow x - 2 < -x^2 \text{ یا } x - 2 > x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \text{ یا } x^2 - x + 2 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 2) < 0 \text{ یا } \underbrace{x^2 - x + 2}_{\Delta < 0} < 0 \Rightarrow \emptyset$$

$$\Rightarrow -2 < x < 1$$

۸۸. گزینه ۴

$$a + 3d, a + 5d, a + 11d \Rightarrow (a + 5d)^2 = (a + 3d)(a + 11d)$$

$$a^2 + 2 \cdot 5ad + 11ad = a^2 + 14ad + 33d^2 \Rightarrow -4ad = 11d^2$$

$$-4a = 11d \Rightarrow a = -\frac{11}{4}d \Rightarrow q = \frac{a + 5d}{a + 3d} \Rightarrow q = \frac{-\frac{11}{4}d + 5d}{-\frac{11}{4}d + 3d} = \frac{9}{5}$$

۸۹. گزینه ۴

می‌دانیم $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ بنابراین:

$$\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ) = \cos 50^\circ \times \frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos 50^\circ \cos 10^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 50^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ$$

۹۰. گزینه ۴

می‌دانیم $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ بنابراین:

$$\cos 50^\circ (\tan 70^\circ + \tan 10^\circ) = \cos 50^\circ \times \frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\cos 50^\circ \cos 10^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\cos 50^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ$$

۹۱. گزینه ۲

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right), \quad \tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

می‌دانیم

$$\begin{cases} \cos 10^\circ - \cos 70^\circ = -2 \sin 40^\circ \sin(-30^\circ) = \sin 40^\circ \\ \tan 70^\circ + \tan 10^\circ = \frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ \cos 70^\circ} = \frac{1}{\cos 70^\circ} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin 40^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2 \cos 20^\circ$$

توجه کنیم که $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$

۹۲. گزینه ۲

می دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^a = n \log_k^a$

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2 \log(1 + \sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + 5 + 2\sqrt{5})$$

$$= \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5}) = \log \underbrace{(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})}_{\text{مزدوج}} = \log(36 - 20) = \log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 =$$

۹۳. گزینه ۴

می دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$\left. \begin{aligned} 2^x \times 8^y = 4 &\Rightarrow 2^x \times 2^{3y} = 2^2 \Rightarrow 2^{x+3y} = 2^2 \Rightarrow x+3y = 2 \\ \log x = \log 2 + \log y &\Rightarrow \log x = \log 2y \Rightarrow x = 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{4}{5}, y = \frac{2}{5}$$

۹۴. گزینه ۳

می دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^a = n \log_k^a$, $\log_b^N = x \rightarrow N = b^x$

تعریف

$$\log_5(2x - 1) + \log_5(3x - 5) = 1 \rightarrow \log_5(2x - 1)(3x - 5) = 1 \rightarrow (2x - 1)(3x - 5) = 5$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 10x - 3x + 5 = 5 \Rightarrow 6x^2 - 13x = 0 \Rightarrow x(6x - 13) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{13}{6} & \text{ق ق} \end{cases} \quad (\text{جلوی لگاریتم را منفی می کند})$$

$$x = \frac{13}{6} \Rightarrow \log_6^{(6x+3)} = \log_6^{16} = \log_6^{2^4} = 4$$

۹۵. گزینه ۲

می دانیم: $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$, $\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}}$, $\log_k^a = \frac{n}{m} \log_k^a$

$$\log(2x - 1) + \log(x + 3) = \log 30 - \log 2 \rightarrow \log(2x - 1)(x + 3) = \log 15$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 15 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 13}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{ق ق} \\ x = -\frac{18}{4} & \text{غ ق ق} \end{cases} \quad (\text{جلوی لگاریتم را منفی می کند})$$

$$\log_8 x = \log_8^{2^3} = \frac{1}{3}$$

۹۶. گزینه ۳

می دانیم $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$$2 \cos^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} - x \right) = 1 + \cos \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2x \right)$$

$$2 \cos^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} - x \right) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x) = 1 + \cos \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2x \right) - \cos^2 x \times \frac{1}{\cos^2 x} = \cos \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2x \right) = -\sin 2x$$

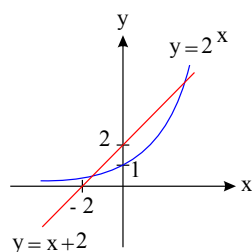
۹۷. گزینه ۳ می دانیم: $\log_k^a = n \log_k^a$, $\log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}$

$$2^{x-7} \times 4^{x+y} = 1 \rightarrow 2^{x-7} \times (2^2)^{x+y} = 1 \rightarrow 2^{x-7+2x+2y} = 1 \rightarrow 2^{3x+2y-7} = 1 \rightarrow 3x+2y-7 = 0$$

$$\log y = 2 \log 3 + \log x \rightarrow \log y = \log 9 + \log x \rightarrow \log y = \log 9x \rightarrow y = 9x$$

پس: $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ y = 9x \end{cases} \rightarrow 3x + 18x = 7 \rightarrow 21x = 7 \rightarrow x = \frac{1}{3}, y = 9\left(\frac{1}{3}\right) = 3$

۹۸. گزینه ۳ کافی است دو تابع $y_1 = x + 2$ و $y_2 = 2^x$ را رسم کنیم.



واضح است خط و منحنی همدیگر را در دو نقطه قطع می کنند. $\rightarrow$

۹۹. گزینه ۲

$$4(2)^x > 8^x \rightarrow 2^2 \times 2^x > 2^{3x} \rightarrow 2^{x+2} > 2^{3x} \rightarrow x+2 > 3x \rightarrow 2 < 2x \rightarrow x < 1$$

۱۰۰. گزینه ۲

$$\log 5 = 1 - \log 2, \log_k^a + \log_k^b = \log_k^{ab}, \log_k^{a^n} = n \log_k^a, \log_k^{\frac{a}{b}} = \log_k^a - \log_k^b$$

می دانیم:

$$\log 20 = \log(2 \times 10) = 1,301 \rightarrow \log 2 + \log 10 = 1,301 \rightarrow \log 2 = 1,301 - 1 \rightarrow \log 2 = 0,301$$

$$\log \frac{5\sqrt{5}}{8} = \log 5\sqrt{5} - \log 8 = \log 5^{\frac{3}{2}} - \log 2^3 = \frac{3}{2}(1 - \log 2) - 3 \log 2$$

$$= \frac{3}{2}(1 - 0,301) - 3(0,301) = 0,1455$$

۱۰۱. گزینه ۳

$$(18.5, 21.5) \Rightarrow \text{مرکز دسته} = \frac{18.5 + 21.5}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

طرح سوال درصد فراوانی نسبی دسته‌ای که مرکز دسته‌ی آن ۲۰ می‌باشد را خواسته است.

$$100 \times \frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} = \text{درصد فراوانی نسبی} \Rightarrow 100 \times \text{فراوانی نسبی} = \text{درصد فراوانی نسبی}$$

$$\Rightarrow \text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{25 - 13}{40} \times 100 = \frac{12}{40} \times 100 = 30$$

دقت کنید فراوانی تجمعی آخرین طبقه در جدول برابر تعداد کل داده‌ها است. و اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته‌ی i ام و $(i+1)$ ام فراوانی مطلق دسته‌ی $(i+1)$ ام را می‌دهد.

۱۰۲. گزینه ۱ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$9, 11, 11, 12, 14, 14, 15, 15, 16, 17, 18 \rightarrow \underbrace{9, 11, 11, 12, 14, 14}_{\text{میانه}}, \underbrace{15, 15, 16, 17, 18}_{16 = \text{چارک سوم و } 11 = \text{چارک اول}}$$

داده‌های داخل جعبه عبارتند از: ۱۵، ۱۴، ۱۴، ۱۲، ۱۲، می‌توانیم برای راحتی کار از همه داده‌ها ۱۱ واحد کم کنیم (انحراف معیار تغییر نمی‌کند) و داده‌های جدید عبارتند از: ۴، ۳، ۳، ۱.

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 3 + 4 + 4}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} ((1-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (4-3)^2)$$

$$= \frac{6}{5} = 1.2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1.2} \approx 1.1$$

۱۰۳. گزینه ۴ ابتدا جدول داده‌شده را با فراوانی مطلق می‌نویسیم:

مرکز دسته	۳۳	۳۷	۴۱	۴۵	۴۹
فراوانی مطلق	۷	۱۰	۱۵	۱۲	$a - 44$

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۴۰ واحد کم می‌کنیم بنابراین از میانگین هم ۴۰ واحد کم می‌شود.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow 1 = \frac{1}{a} ((7 \times (-7)) + (10 \times (-3)) + (15 \times 1) + (12 \times 5) + ((a - 44) \times 9))$$

$$\rightarrow a = -49 - 30 + 15 + 60 + 9a - 396 \rightarrow 8a = 400 \rightarrow a = 50$$

دسته‌ی $[39, 43)$ دسته‌ای است که مرکزش ۴۱ است.

$$d_i = \frac{360}{N} \times F_i = \frac{360}{50} \times 15 = 108^\circ$$

۱۰۴. گزینه ۲

در ابتدا جمع ارتفاع میله‌ها و یا به عبارت دیگر، تعداد کل داده‌ها (N) را بدست می‌آوریم.

$$N = 1 + 2.5 + 3 + 4 + 4.5 + 5 = 20 \rightarrow d_i = \frac{360}{N} \times F_i = \frac{360}{20} \times 4 = 72^\circ$$

۱۰۵. گزینه ۱ مراکز دسته‌ها به ترتیب ۱۱، ۱۵، ۱۹، ۲۳، ۲۷ می‌باشد.

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۹ واحد کم می‌کنیم.

$$\bar{x} - 19 = \frac{1}{15+x} ((3 \times (-8)) + (4 \times (-4)) + (7 \times 0) + (x \times 4) + (1 \times 8))$$

$$\rightarrow -0,6 = \frac{1}{15+x} (-24 - 16 + 4x + 8) \rightarrow -0,6 = \frac{4x - 32}{x + 15}$$

$$\rightarrow -0,6x - 9 = 4x - 32 \rightarrow 4,6x = 23 \rightarrow x = 5$$

$$d_i = \frac{360}{N} \times F_i = \frac{360}{15+5} \times 5 = 90^\circ$$

۱۰۶. گزینه ۲

داده‌ها با یک رقم اعشار نشان داده شده‌اند یعنی $\boxed{9,4}$ عدد $9,4$ است. برای راحتی در محاسبات به این صورت عمل می‌کنیم:
در سطر اول ۸ داده داریم که قسمت صحیح آن‌ها ۸ است پس مجموعشان ۶۴ می‌شود و مجموع قسمت‌های اعشاری در سطر اول برابر $2,3$ می‌باشد.

در سطر دوم ۸ داده داریم که قسمت صحیح آن‌ها ۹ است پس مجموعشان ۷۲ می‌شود و مجموع قسمت‌های اعشاری در سطر دوم برابر $2,3$ می‌باشد.

در سطر سوم ۴ داده داریم که قسمت صحیح آن‌ها ۱۰ است پس مجموعشان ۴۰ می‌شود و مجموع قسمت‌های اعشاری در سطر سوم برابر $0,6$ می‌باشد.

$$\bar{x} = \frac{(8 \times 8) + 2,3 + (8 \times 9) + 2,3 + (4 \times 10) + 0,6}{20} = \frac{181,2}{20} = 9,06$$

۱۰۷. گزینه ۴

$$\bar{x} = 15 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8}{8} = 15 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 120$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{8} ((x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2) = 4$$

$$\Rightarrow (x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2 = 32$$

چون میانگین دو عدد ۱۲ و ۱۸ برابر ۱۵ است پس در ده داده‌ی حاصل میانگین تغییر نمی‌کند.

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{1}{10} ((x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2 + (12 - 15)^2 + (18 - 15)^2)$$

$$= \frac{1}{10} (32 + 9 + 9) = \frac{50}{10} = 5$$

۱۰۸. گزینه ۲

نمره‌ی کل آزمون عمومی این داوطلب همان میانگین نمرات دروس عمومی ولی با حساب کردن ضریب هر درس است.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i x_i \rightarrow 58 = \frac{1}{11} ((4 \times 65) + (2 \times 52) + (3 \times 70) + 2x)$$

$$\rightarrow 58 = \frac{260 + 104 + 210 + 2x}{11} \rightarrow 638 = 574 + 2x \rightarrow x = 32$$

۱۰۹. گزینه ۲ ابتدا میانگین داده‌های داده شده در نمودار ساقه و برگ را بدست می‌آوریم.

$$\bar{x} = \frac{(3 \times 80) + (4 \times 90) + (5 \times 100) + (1 + 5 + 2 + 4 + 6 + 7 + 3 + 4 + 8)}{12}$$

$$= \frac{1100 + 40}{12} = \frac{1140}{12} = 95$$

چون داده‌ها سه برابر شده‌اند پس میانگین نیز سه برابر می‌شود و چون از داده‌ها ۴۰ واحد کم شده‌است، از میانگین نیز ۴۰ واحد کم می‌شود.

$$\text{میانگین داده‌های جدید} = (3 \times 95) - 40 = 285 - 40 = 245$$

۱۱۰. گزینه ۴

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{21} + 10 + 15 + 45 + 50}{25} = 30$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{21} + 120 = 750 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{21} = 630$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{21}}{21} = \frac{630}{21} = 30$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow 64 = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 1600$$

اما مجموع مربعات انحراف از میانگین ۴ داده‌ی ناجور برابر است با:

$$(10 - 30)^2 + (15 - 30)^2 + (45 - 30)^2 + (50 - 30)^2 = 1250$$

$$1250 + \sum_{i=1}^{21} (x_i - \bar{x})^2 = 1600 \Rightarrow \sum_{i=1}^{21} (x_i - \bar{x})^2 = 350$$

حال به راحتی می‌توانیم واریانس ۲۱ داده‌ی باقی‌مانده را حساب کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{21} (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{350}{21} = 16,66$$

۱۱۱. گزینه ۳ ابتدا با توجه به نمودار مستطیلی، جدول فراوانی را می‌نویسیم.

حدود دسته‌ها	۱۲-۱۵	۱۵-۱۸	۱۸-۲۱	۲۱-۲۴
فراوانی مطلق	۱۳	۲۱	۱۷	۹

اگر داده‌های ۱۴ و ۱۶ و ۱۶ را حذف کنیم یک داده از دسته‌ی اول و دو داده از دسته‌ی دوم کم می‌شوند پس جدول فراوانی جدید به این صورت است:

حدود دسته‌ها	۱۲-۱۵	۱۵-۱۸	۱۸-۲۱	۲۱-۲۴
فراوانی مطلق	۱۲	۱۹	۱۷	۹

و می‌دانیم بزرگترین زاویه‌ی مرکزی در نمودار دایره‌ای مربوط به دسته‌ای است که فراوانی مطلق آن بیشتر است. (دسته‌ی دوم)

$$di = \frac{360}{N} \times F_i = \frac{360}{57} \times 19 = 120^\circ$$

۱۱۲. گزینه ۴

$$\text{میانگین این داده‌ها برابر } \bar{x} = \frac{100}{50} = 2 \text{ است.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 \rightarrow \sigma^2 = \frac{272}{50} - (2)^2 = \frac{136}{25} - 4 = \frac{36}{25} \rightarrow \sigma = \frac{6}{5}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{6}{5}}{2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

۱۱۳. گزینه ۱ ۱۸ داده داریم که میانه‌ی نیمه‌ی اول داده‌ها یعنی داده‌ی پنجم (۳۸) چارک اول است و میانه‌ی نیمه‌ی دوم داده‌ها یعنی داده‌ی چهاردهم (۵۲) چارک سوم است پس طبق صورت مسئله باید ۴ داده‌ی اول و ۴ داده‌ی آخر را حذف کرده و میانگین را حساب کنیم.

$$\bar{x} = \frac{۳۸+۳۸+۳۹+۴۰+۴۰+۴۴+۴۵+۴۵+۴۶+۵۲}{۱۰} = \frac{۴۲۷}{۱۰} = ۴۲,۷$$

۱۱۴. گزینه ۲ جمع زوایا در نمودار دایره‌ای برابر ۳۶۰° است.

$$۷۰ + ۷۵ + ۱۰۰ + ۳۵ + x = ۳۶۰^\circ \rightarrow x = ۸۰^\circ$$

$$d_i = \frac{۳۶۰}{N} F_i \rightarrow ۸۰ = \frac{۳۶۰}{N} \times ۳۲ \rightarrow N = \frac{۳۶۰ \times ۳۲}{۸۰} = ۱۴۴$$

تعداد کل افراد: ۱۴۴

$$d_i = \frac{۳۶۰}{N} F_i \rightarrow ۷۵ = \frac{۳۶۰}{۱۴۴} F_i \rightarrow F_i = \frac{۷۵ \times ۱۴۴}{۳۶۰} = ۳۰$$

البته پس از پیدا کردن زاویه‌ی ۸۰° می‌توان، با یک تناسب مسئله را حل کرد.

زاویه تعداد

۸۰°

۳۲

۷۵°

$$x \rightarrow FB = \frac{۳۲ \times ۷۵}{۸۰} = ۳۰$$

۱۱۵. گزینه ۳

$$\bar{x} = \frac{۹+۲(۱۱)+۲(۱۲)+۱۳+۲(۱۴)}{۸} = \frac{۹+۲۲+۲۴+۱۳+۲۸}{۸} = \frac{۹۶}{۸} = ۱۲$$

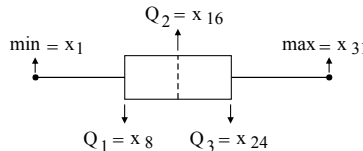
$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{۸} ((۹-۱۲)^2 + ۲(۱۱-۱۲)^2 + ۲(۱۲-۱۲)^2 + (۱۳-۱۲)^2$$

$$+ ۲(۱۴-۱۲)^2)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{۹+۲+۰+۱+۸}{۸} = \frac{۲۰}{۸} = \frac{۵}{۲} = ۲,۵ \rightarrow \sigma = \sqrt{۲,۵} \sim ۱,۶$$

$$CV = \frac{۱,۶}{۱۲} = \frac{۱۶}{۱۲۰} \sim ۰,۱۳$$

۱۱۶. گزینه ۳



اگر ۳۱ داده‌ی آماری مرتب شده را با $x_1, x_2, \dots, x_{31}$ نمایش دهیم، آن‌گاه میانه‌ی داده‌ها برابر با داده‌ی شانزدهم (x_{16}) و چارک اول برابر با میانه‌ی ۱۵ داده‌ی اول، یعنی x_8 و چارک سوم برابر با میانه‌ی ۱۵ داده‌ی آخر، یعنی x_{24} می‌باشد:

بنابراین با توجه به رابطه‌ی $\sum_{i=1}^N x_i = N\bar{x}$ در هر یک از سه گروه داده، داریم:

$$N_1 = ۷, \bar{x}_1 = ۱۲ \rightarrow x_1 + \dots + x_7 = ۷ \times ۱۲ = ۸۴$$

دنباله‌ی چپ: $x_1, \dots, x_7$

$$N_2 = ۱۷, \bar{x}_2 = ۱۵ \rightarrow x_8 + \dots + x_{24} = ۱۷ \times ۱۵ = ۲۵۵$$

داخل و روی جعبه: $x_8, \dots, x_{24}$

$$N_3 = ۷, \bar{x}_3 = ۲۱ \rightarrow x_{25} + \dots + x_{31} = ۷ \times ۲۱ = ۱۴۷$$

دنباله‌ی راست: $x_{25}, \dots, x_{31}$

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + \dots + x_7) + (x_8 + \dots + x_{24}) + (x_{25} + \dots + x_{31})}{۳۱} = \frac{۸۴ + ۲۵۵ + ۱۴۷}{۳۱} = \frac{۴۸۶}{۳۱} \simeq ۱۵,۶۷$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \text{فراوانی مطلق دسته ی وسط قبل از تغییر} \\ N &= ۸۰ = \text{تعداد کل داده های جامعه قبل از تغییر} \\ a &= \text{تعداد داده های افزایش یافته در دسته ی وسط} \\ N + ۲۰ &= ۱۰۰ = \text{تعداد کل داده های جامعه بعد از تغییر} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\text{فراوانی مطلق}}{\text{تعداد کل داده ها}} = \text{فراوانی نسبی} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{فراوانی نسبی دسته ی وسط قبل از تغییر} &= \frac{x}{۸۰} \\ \text{فراوانی نسبی دسته ی وسط بعد از تغییر} &= \frac{x+a}{۱۰۰} \end{aligned} \right.$$

در سوال گفته شده است که فراوانی نسبی دسته ی وسط تغییر نکرده است و باید $\frac{a}{x}$ را پیدا کنیم

$$\frac{x}{۸۰} = \frac{x+a}{۱۰۰} \rightarrow ۱۰۰x = ۸۰x + ۸۰a \rightarrow ۲۰x = ۸۰a \rightarrow \frac{a}{x} = \frac{۲۰}{۸۰} = \frac{۱}{۴}$$

۱۱۸. گزینه ۳ ابتدا جدول داده شده را براساس فراوانی مطلق می نویسیم (اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته ی i ام و $(i+1)$ ام، فراوانی مطلق دسته ی $(i+1)$ ام را می دهد).

مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
فراوانی	۷	۹	۱۷	۱۱	۶

برای راحتی در محاسبات از تمام داده ها ۱۰ واحد کم می کنیم و می دانیم اگر از تمام داده ها مقداری ثابت کم کنیم انحراف معیار تغییر نمی کند.

$$\bar{x} - ۱۰ = \frac{۱}{۵۰}((۷ \times (-۴)) + (۹ \times (-۲)) + (۱۷ \times ۰) + (۱۱ \times ۲) + (۶ \times ۴))$$

$$\rightarrow \bar{x} - ۱۰ = \frac{۱}{۵۰}(-۲۸ - ۱۸ + ۲۲ + ۲۲) \rightarrow \bar{x} - ۱۰ = ۰ \rightarrow \bar{x} = ۱۰$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{۵۰} (۷(۶-۱۰)^2 + ۹(۸-۱۰)^2 + ۱۷(۱۰-۱۰)^2 + ۱۱(۱۲-۱۰)^2 + ۶(۱۴-۱۰)^2) \\ &= \frac{1}{۵۰} (۱۱۲ + ۳۶ + ۰ + ۴۴ + ۹۶) = \frac{۲۸۸}{۵۰} = ۵,۷۶ \rightarrow \sigma = ۲,۴ \end{aligned}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲,۴}{۱۰} = ۰,۲۴$$

۱۱۹. گزینه ۳ در نمودار تجمعی، برای هر دسته نقطه ای رسم می شود که طول آن کران بالای آن دسته و عرض آن فراوانی تجمعی آن دسته است. فراوانی تجمعی آخرین طبقه در جدول همیشه برابر تعداد کل داده ها است. ($N = ۴۶$) و اختلاف فراوانی تجمعی دو دسته ی i ام و $(i+1)$ ام، فراوانی مطلق دسته ی $(i+1)$ ام را می دهد. اختلاف دو کران بالای متوالی، نشان دهنده ی طول دسته است پس طول دسته ها ۳ است.

دسته ها	۸-۱۱	۱۱-۱۴	۱۴-۱۷	۱۷-۲۰	۲۰-۲۳
فراوانی مطلق	۹	۱۵	۴	۱۰	۸

اگر ۴ داده ی ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۷ را اضافه کنیم به دسته ی ۱۴-۱۷ دو داده اضافه می شود.

$$\text{فراوانی مطلق دسته ی سوم} = \frac{۶}{۴۶+۴} = \frac{۶}{۵۰} = ۰,۱۲ = \text{فراوانی نسبی دسته ی سوم}$$

۱۲۰. گزینه ۱ ۲۹ داده ی آماری را به صورت ۱۲، ۱۳، ۲۱، ۲۲ و $x_1, x_2, \dots, x_{25}$ نشان می دهیم.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{۲۹} ((x_1 - ۱۷)^2 + (x_2 - ۱۷)^2 + \dots + (x_{25} - ۱۷)^2 + (۱۲ - ۱۷)^2 + (۱۳ - ۱۷)^2 + (۲۱ - ۱۷)^2 + (۲۲ - ۱۷)^2) \end{aligned}$$

$$\rightarrow 5 \times 29 = (x_1 - 17)^2 + (x_2 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 + 25 + 16 + 16 + 25$$

$$\rightarrow (x_1 - 17)^2 + (x_2 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 = 145 - 82$$

$$\rightarrow (x_1 - 17)^2 + (x_2 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 = 63$$

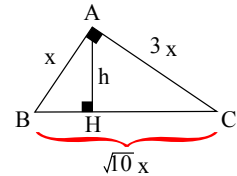
چون چهار داده‌ی حذف شده، میانگینشان ۱۷ است $\left(\frac{12+13+21+22}{4} = \frac{68}{4} = 17\right)$ بنابراین پس از حذفشان دوباره میانگین همان ۱۷ است. اکنون واریانس ۲۵ داده‌ی باقی‌مانده را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{1}{25} \left((x_1 - 17)^2 + (x_2 - 17)^2 + \dots + (x_{25} - 17)^2 \right) = \frac{1}{25} (63) = \frac{63}{25} = 2,52$$

۱۲۱. گزینه ۳

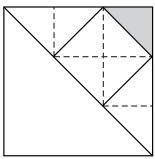
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = x^2 + 9x^2 = 10x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{10}x$$

$$S = 60 \Rightarrow \frac{x \times 3x}{2} = 60 \Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{h \times BC}{2} \rightarrow 60 = \frac{h \times \sqrt{10} (2\sqrt{10})}{2} \rightarrow 120 = 20h \rightarrow h = 6$$

۱۲۲. گزینه ۳ اگر شکل مسئله را به صورت مقابل تقسیم بندی کنیم کاملاً مشخص است که مساحت مربع بزرگ تر ۱۸ برابر مساحت کوچک ترین مثلث است.



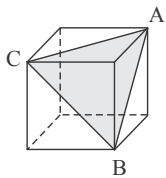
۱۲۳. گزینه ۲

اگر ضلع مکعب را a در نظر بگیریم آنگاه OA ارتفاع هرم برابر $\frac{a}{\sqrt{2}}$ خواهد بود. در ضمن مثلث ABC قاعده این هرم خواهد بود.

$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{2} \right) \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right) = \frac{a^3}{12\sqrt{2}}$$

۱۲۴. گزینه ۳

مثلث ABC مثلث متساوی الاضلاع است زیرا هر ضلع آن برابر قطر وجه مکعب یعنی $a\sqrt{2}$ است.



$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (a\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

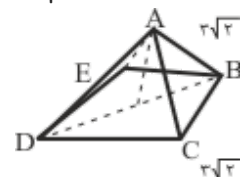
$$\frac{S_{ABC}}{\text{مساحت یک وجه}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a^2}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۲۵. گزینه ۲ چون وجه های جانبی مثلث متساوی الاضلاع هستند پس $AB = 3\sqrt{2}$ و $BH = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 3$ در مثلث قائم

الزاویه ABH داریم:

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH^2 = (3\sqrt{2})^2 - 3^2 = 9 \Rightarrow AH = 3 = h$$

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} (3\sqrt{2})^2 \times 3 = 18$$



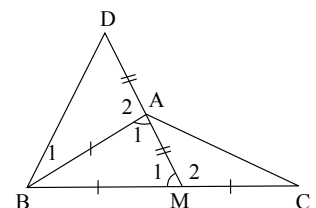
۱۲۶. گزینه ۳

با توجه به شکل داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = BM \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{M}_2 \\ AB = MC \\ AD = AM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle AMC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}$$

$$\hat{A}_2 = \hat{M}_2$$

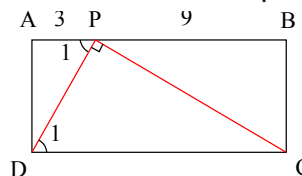
طبق فرض: $\hat{D} + \hat{C} = 61^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{D} = 61^\circ$



$$ABD \text{ مثلث } \hat{A}_1 \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 + \hat{D} = 61^\circ \Rightarrow \hat{M}_1 = 61^\circ \Rightarrow \hat{ABC} = 180 - 61 - 61 = 58$$

۱۲۷. گزینه ۴ دو زاویه ی $\hat{P}_1, \hat{D}_1$ بنابر قضیه ی خطوط موازی و مورب مساوی اند. پس دو مثلث قائم الزاویه PDC, ADP متشابه اند.

$$\Delta APD \sim \Delta DPC \Rightarrow \frac{DP}{DC} = \frac{AP}{DP} \Rightarrow DP^2 = AP \cdot DC = 12 \times 3 = 36 \Rightarrow PD = 6$$



روش دوم: بنابر استدلال روش قبل در مثلث قائم الزاویه DPC می توان گفت مربع یک ضلع برابر است با حاصل ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر.

اندازه ی AP با اندازه ی تصویر PD بر وتر برابر است، بنابراین:

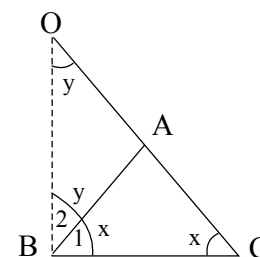
$$PD^2 = AP \times DC = 12 \times 3 = 36 \rightarrow PD = 6$$

۱۲۸. گزینه ۱

$$AB = AC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C} = x$$

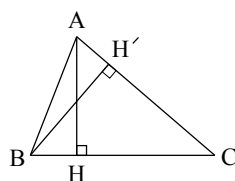
$$AO = AB \Rightarrow \hat{O} = \hat{B}_2 = y$$

$$\hat{O} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow y + x + y + x = 180^\circ \Rightarrow x + y = 90^\circ \Rightarrow \text{قائم الزاویه}$$



۱۲۹. گزینه ۳

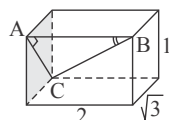
$$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{BH' \times AC}{2} \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{AC}{BC}$$



توجه: به طور کلی نسبت ۲ ارتفاع مثلث عکس نسبت اضلاع متناظر آنهاست.

۱۳۰. گزینه ۲ با توجه به شکل مقابل اگر BC قطر مکعب مستطیل باشد چون AB بر وجه مقابل عمود است پس

$$\angle BAC = 90^\circ \text{ که } AC = 2 \text{ و } AB = 2 \text{ پس } \tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{2} = 1 \text{ یعنی } \hat{B} = 45^\circ \text{ یعنی مثلث } CAB \text{ قائم الزاویه}$$



متساوی الساقین است.

۱۳۱. گزینه ۴

$$2^3(5^3 + 6^3 + \dots + 15^3) = 2^3(1^3 + 2^3 + \dots + 15^3 - 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3) \\ = 2^3 \times ((\frac{15 \times 16}{2})^2 - (\frac{5 \times 4}{2})^3) = 11440.$$

۱۳۲. گزینه ۳

در تقسیم یک عدد طبیعی بر ۱۲ باقی یکی از اعداد ۱ تا ۱۲ می تواند باشد پس تعداد لانه ها ۱۲ می باشد.

$$\left\lfloor \frac{50}{12} \right\rfloor + 1 = 5 \quad \text{بنا به اصل لانه کبوتری داریم:}$$

۱۳۳. گزینه ۳

کافیست اعداد اول در مجموعه ی $\{2, 3, 4, \dots, 30\}$ را انتخاب کرده و در بدترین حالت ۱ عدد اول انتخابی این ۱۰ عدد اول است که دو به دو نسبت به هم اول اند واضح است اسن عدد هرچه باشد نسبت به یکی از این ۱۰ عدد دارای مقسوم علیه مشترک غیر از ۱ می باشد که تعداد آن ها ۱۱ می شود.

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

۱۳۴. گزینه ۳

$$A - \{B\} = \{a, b, \{a\}\} \Rightarrow \text{تعداد زیر مجموعه های ناتهی سره} = 2^3 - 1 - 1 = 6$$

۱۳۵. گزینه ۳ چون سال ۱۲ ماه و هفته ۷ روز است پس $12 \times 7 = 84$ واحد مستقل از هم داریم برای اینکه حداقل دو نفر در یک ماه سال و یک هفته متولد شده باشد بنا به اصل لانه کبوتری باید $84 + 1 = 85$ نفر داشته باشیم.

۱۳۶. گزینه ۱

$$n = 5 \Rightarrow 5! > 2^6 \Rightarrow 120 > 64$$

بنابراین $m = 5$ عدد مناسب برای شروع استقراء می باشد.

$$\text{فرض: } k! > 2^{k+1}$$

$$\underbrace{(k+1)!}_A > \underbrace{2^{k+2}}_C$$

طرفین فرض را در $(k+1)$ فرض می کنیم تا مقدار A ایجاد شود.

$$k! > 2^{k+1} \xrightarrow{\times (k+1)} \underbrace{(k+1)!}_A > \underbrace{(k+1)2^{k+1}}_B$$

یعنی فقط کافی است ثابت شود $B > C$

$$\left. \begin{matrix} A > B \\ B > C \end{matrix} \right\} \Rightarrow A > C$$

$$(k+1) \times 2^{k+1} > 2^{k+2} \xrightarrow{\div 2^{k+1}} k+1 > 2$$

که رابطه ی اخیر بازای $k \geq 5$ همواره صحیح است.

۱۳۷. گزینه ۲ در تقسیم یک عدد طبیعی بر ۲۷، ۲۷ مقدار مختلف باقی مانده $(0, 1, 2, \dots, 26)$ وجود دارد.

$$a = 27q + r \quad 0 \leq r \leq 26$$

پس ۲۷ لانه داریم.

حال این ۱۱۵ عدد را بر ۲۷ تقسیم کرده و برحسب مقدار باقی مانده اشان در لانه مربوطه قرار می دهیم طبق اصل لانه کبوتر لانه ای

وجود دارد که در آن حداقل $\left\lfloor \frac{115}{27} \right\rfloor + 1 = 5$ عضو مجموعه ها در یک لانه قرار می گیرند یعنی حداقل ۵ عضو دارای باقی مانده ی

یکسان می باشند.

۱۳۸. گزینه ۴ نکته:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \\
1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 19^3 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 19^3) - (2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 18^3) \\
&= \left(\frac{19 \times 20}{2} \right)^2 - 2^3 (1^3 + 2^3 + \dots + 9^3) = (190)^2 - 8 \left(\frac{9 \times 10}{2} \right)^2 = 190^2 - 2(90)^2 \\
&= 36100 - 16200 = 19900
\end{aligned}$$

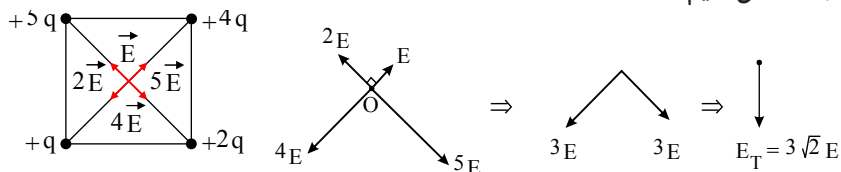
۱۳۹. گزینه ۲ اگر ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه و ۱ مهره‌ی سبز بیرون آورده باشیم، مهره‌ی بعدی از هر رنگی که باشد شرایط مسئله برآورده می‌شود پس حداقل $(3+2+1)+1=7$ مهره باید خارج شود.

۱۴۰. گزینه ۳

$$\left. \begin{aligned}
A_n &= \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -n, 2^m \leq 2n\}, \quad n \in \mathbb{N} \\
A_1 &= \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -1, 2^m \leq 2\} = \{0, 1\} \\
A_2 &= \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -2, 2^m \leq 4\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\
A_4 &= \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -4, 2^m \leq 16\} = \{-7, \dots, 4\}
\end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow (A_4 - A_2) \cup A_1 = \{-7, -6, -5, -4, 4, 0, 1\}$$

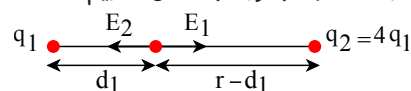
۱۴۱. گزینه ۴ مطابق شکل برآیند روبرو را ساده می کنیم:



$$E_T = \sqrt{(3E)^2 + (3E)^2} = 3\sqrt{2}E$$

۱۴۲. گزینه ۴ چون دو بار q_1 و q_2 هم علامت اند، نقطه ای که میدان الکتریکی ناشی از دو بار در آن صفر است، روی خط و اصل دو بار و بین دو بار قرار دارد:

در حالت اول، باتوجه به شکل، داریم:



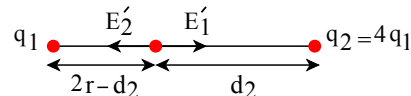
$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{kq_1}{d_1^2} = \frac{kq_2}{(r-d_1)^2}$$

$$\rightarrow \frac{kq_1}{d_1^2} = \frac{k(4q_1)}{(r-d_1)^2} \rightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{2}{r-d_1} \rightarrow 2d_1 = r-d_1$$

$$\rightarrow d_1 = \frac{r}{3}$$

در حالت دوم که فاصله ی بارها ۲ برابر می شود، می توان نوشت:

$$E'_1 = E'_2 \rightarrow \frac{kq_1}{(2r-d_2)^2} = \frac{kq_2}{d_2^2} \rightarrow \frac{kq_1}{(2r-d_2)^2} = \frac{k(4q_1)}{d_2^2}$$



$$\rightarrow d_2 = 4r - 2d_2 \rightarrow d_2 = \frac{4r}{3}$$

سؤال نسبت این دو مقدار را خواسته است، پس داریم:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\frac{4r}{3}}{\frac{r}{3}} \rightarrow \frac{d_2}{d_1} = 4$$

۱۴۳. گزینه ۲

روش اول:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \rightarrow 4 = \frac{(9 \times 10^9) \times |q_1| \times |q_2| \times 10^{-12}}{(0.3)^2} \rightarrow |q_1||q_2| = 40$$

که فقط در گزینه ی (۲) حاصل ضرب اندازه ی بارها برابر ۴۰ می باشد.

روش دوم:

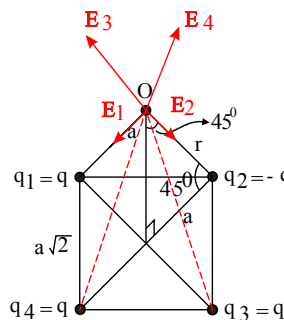
$$F = \frac{kq_1 q_2}{r^2} \Rightarrow 4 = \frac{9 \times 10^9 \times q_1 q_2 \times 10^{-12}}{9 \times 10^{-2}} \Rightarrow q_1 q_2 = 40 \quad (1)$$

$$\text{بعد از تماس: } q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} = 3 \Rightarrow q_1 + q_2 = 6 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \begin{cases} q_1 q_2 = 40 \\ q_1 + q_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow q_1 (q_1 - 6) = 40 \Rightarrow q_1^2 - 6q_1 - 40 = 0$$

ریشه یا جواب این معادله برابر $10 \mu C$ و $-4 \mu C$ است.

۱۴۴. گزینه ۱ با توجه به علامت بارها ابتدا میدان الکتریکی حاصل از هر یک بارها را در نقطه ی O مطابق شکل های زیر رسم کرده، دو به دو برانید می گیریم و در نهایت با توجه به هندسه موجود بزرگی میدان الکتریکی حاصل از چهار بار را در نقطه ی O حساب می کنیم.

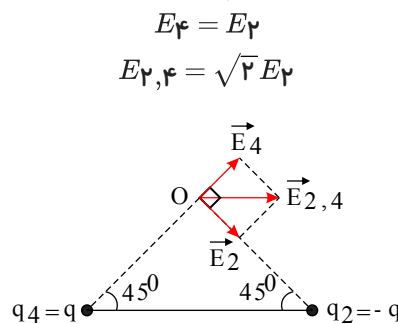
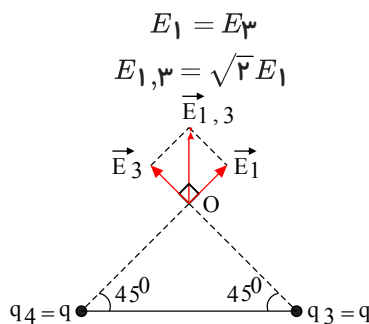


$$\text{طول قطر مربع} = a\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2a$$

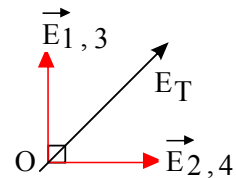
$$\text{نصف قطر مربع} = \frac{2a}{2} = a$$

$$\text{فاصله ی نقطه ی } O \text{ از چهار رأس مربع} \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

اکنون با رسم بردار میدان هریک از بارها در نقطه ی O داریم:



$$E_T = \sqrt{E_{1,3}^2 + E_{2,4}^2}$$

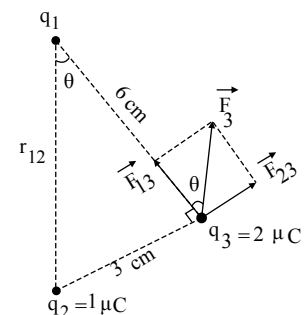


با توجه به این که $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \frac{kq}{r^2} = \frac{kq}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{kq}{2a^2}$ می باشد، داریم:

$$E_T = \sqrt{E_{1,3}^2 + E_{2,4}^2} = \sqrt{(\sqrt{2}E_1)^2 + (\sqrt{2}E_1)^2} = 2E_1 = \frac{kq}{a^2}$$

۱۴۵. گزینه ۴ اگر نیروی $\vec{F}_3$ (برایند نیروهای وارد بر بار q_3) را مطابق شکل تجزیه کنیم، می توان نتیجه گرفت که بارهای q_1 و q_2 ناهمنامند (چون هردو q_3 را دفع کرده اند) و از قاعده جمع برداری می توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} F_{23} &= F_3 \sin \theta \\ F_{23} &= \frac{kq_2 q_3}{r_{23}^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{kq_2 q_3}{r_{23}^2} = F_3 \sin \theta \quad (1)$$



با محاسبه ی $r_{12} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ داریم:

$$(1) \rightarrow \frac{9 \times 10^9 \times 1 \times 2 \times 10^{-12}}{(3 \times 10^{-2})^2} = F_3 \times \frac{3}{3\sqrt{5}} \Rightarrow 20 = F_3 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow F_3 = 20\sqrt{5} N$$

۱۴۶. گزینه ۲

نکته: طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی که در سال دهم خوانده ایم اگر اتلاف انرژی نباشد تغییرات انرژی مکانیکی مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی صفر است:

$$\Delta E = 0 \rightarrow \Delta k + \Delta u = 0 \rightarrow \Delta u = -\Delta k$$

خب حالا بنابر اصل پایستگی انرژی:

$$\Delta U + \Delta k = 0 \Rightarrow \Delta U = -\Delta k$$

$$\Delta U = -\lambda m J \Rightarrow \Delta U = q \Delta V$$

از طرفی هم طبق رابطه $\Delta V = \frac{\Delta u}{q}$ داریم $\Delta u = q \Delta v$ بنابراین:

$$\Delta u = q \Delta V \Rightarrow -\lambda \times 10^{-3} = -4 \times 10^{-6} (V_B - V_A) \Rightarrow V_B - V_A = 2500 V = 2 kV$$

۱۴۷. گزینه ۲ ابتدا طبق رابطه‌ی چگالی و مقایسه‌ی آن نسبت اولیه بار کرده‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma A}{\sigma B} = \frac{qA}{qB} \times \frac{AB}{AA} = \frac{qA}{qB} \times \left(\frac{rB}{rA}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{qA}{qB} \times \left(\frac{2}{1}\right)^2 \Rightarrow qB = 8qA$$

حال باید محاسبه کنیم با انتقال چند درصد از بار کره‌ی B به کره‌ی A، نسبت بارها با نسبت شعاع‌ها برابر شود. فرض کنیم مقدار x بار از qB کم شده و به qA اضافه شد در اینصورت بارها برابر $qB - n$ و $qA + x$ می‌شود حالا کافیت x را حساب کنیم.

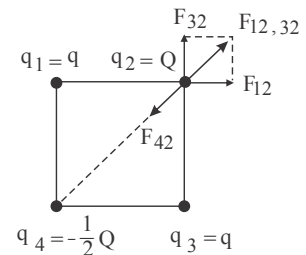
$$\frac{qB - xqB}{qA + xqB} = \frac{rB}{rA} \xrightarrow{\frac{rB}{rA}=2} \frac{8qA(1-x)}{qA(1+8x)} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4} qB = 25\%$$

یعنی باید $\frac{1}{4}$ (معادل ۲۵٪) بار از qB برداشته و به qA اضافه می‌کنیم.

۱۴۸. گزینه ۲

برآیند نیروهای وارد بر بار $q_2 = Q$ باید صفر باشد. بار q_4 الزاماً بار q_2 را جذب می‌کند بنابراین باید بارهای q_1 و q_3 آن را دفع کنند. بنابراین q, Q هم نام خواهند بود. از طرفی مطابق شکل نیروی F_{42} باید برآیند نیروی F_{12} و F_{32} رو خنثی کند، پس باید مساوی و خلاف جهت اون باشد.

$$\begin{cases} F_{12} = F_{32} = k \frac{qQ}{a^2} \\ F_{12,32} = \sqrt{2} - F_{12} = \sqrt{2} \quad F_{32} = \sqrt{2} \frac{kqQ}{a^2} \end{cases}$$



$$F_{42} = F_{12,32} \Rightarrow k \frac{\frac{1}{2} Q Q}{(a\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \frac{kqQ}{a^2} \Rightarrow \frac{Q}{q} = 4\sqrt{2}$$

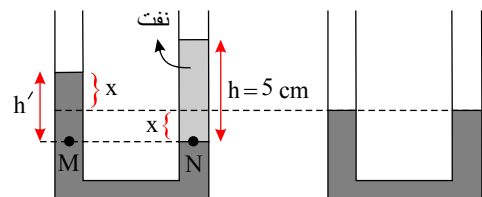
۱۴۹. گزینه ۲

$$PM = PN \Rightarrow P_o + \rho gh = P_o + \rho' gh'$$

$$\Rightarrow \rho h = \rho' h' \Rightarrow 5 \times 0.8 = 1 \times h' = h' = 4 \text{ cm}$$

با فرض آنکه سطح مقطع لوله در طرفین یکسان باشد:

$$h' = 2x \Rightarrow x = \frac{h'}{2} = 2 \text{ cm}$$

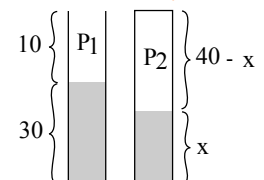


۱۵۰. گزینه ۳

$$P_1 = P_o, \quad P_2 = (P_o - x), \quad V_1 = A \times 10, \quad V_2 = A \times (40 - x)$$

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow 75 \times 10 = (75 - x)(40 - x)$$

$$\Rightarrow 750 = 3000 + x^2 - 115x \Rightarrow x = 25 \text{ cm}$$



۱۵۱. گزینه ۴

(جرم آب یخ بسته (m')) آب صفر درجه $\xleftarrow{Q_1}$ یخ صفر درجه $\xrightarrow{Q_2}$ -20°

مقدار گرمایی که یخ $-20^\circ C$ می‌گیرد. برابر است با مقدار گرمایی که آب صفر درجه سانتی گراد می‌دهد.

$$Q_1 = Q_2$$

$$m'Lf = mc\Delta\theta \Rightarrow 200 \times 3,36 \times 10^5 = m \times 2100 \times 20 \Rightarrow m = 1600g$$

گزینه ۳. ۱۵۲

$$\frac{1}{2}MV^2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{2}M(4)^2 = 4 \Rightarrow M = \frac{1}{2}Kg$$

$$\frac{1}{2}MV'^2 = 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}V'^2 = 5 \Rightarrow V'^2 = 20 \Rightarrow V' = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}m/s$$

گزینه ۲. ۱۵۳

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow W = Pt$$

$$Q = mc(\theta_2 - \theta_1) \Rightarrow Pt = mc(\theta_2 - \theta_1)$$

$$P \times 7 \times 60 = 2 \times 4200(30 - 0) \Rightarrow P \times 420 = 2 \times 4200(30) \Rightarrow P = 600W$$

گزینه ۲. ۱۵۴

$$V = at + V_0 \Rightarrow 20 = a \times 10 + 0 \Rightarrow a = 2m/s^2$$

$$F = ma = 900 \times 2 = 1800N$$

$$\bar{P} = F \times \bar{V} \Rightarrow \bar{P} = 1800 \left(\frac{0 + 20}{2} \right) = 18000W = 18KW$$

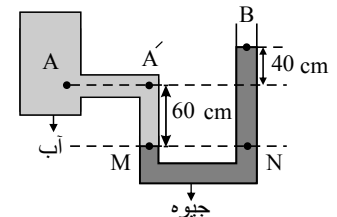
گزینه ۳. ۱۵۵

$$PM = PN \Rightarrow P_{A'} + \rho_{\text{آب}} g \cdot (h_{A'M}) = P_0 + \rho_{\text{جیوه}} g \cdot (h_{BN})$$

$$\xrightarrow{PA'=PA} PA + (1000 \times 10 \times \frac{6}{10}) = P_0 + (13600 \times 10 \times 1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{6000Pa} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{136000Pa}$

$$\Rightarrow PA - P_0 = 136000 - 6000 = 130000Pa = 130kPa$$



گزینه ۲. ۱۵۶

$$V_1 = V_2 = V_3 = V \quad \text{در هر لحظه}$$

$$K_1 + K_2 = 22,5 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 V^2 + \frac{1}{2}m_2 V^2 = 22,5$$

$$\Rightarrow \frac{V^2}{2}(m_1 + m_2) = 22,5 \Rightarrow \frac{V^2}{2}(2 + 3) = 22,5 \Rightarrow V = 3 \frac{m}{s}$$

با انتخاب مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی برای m_3 ، موقعی که m_3 به اندازه‌ی $90cm$ پایین آمده و برای m_1, m_2 همان سطح افقی نشان داده شده، داریم:

$$m_3 gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)V^2 \Rightarrow m_3 \times 10 \times \frac{9}{10} = \frac{1}{2}(2 + 3 + m_3)(3^2) \Rightarrow m_3 = 5kg$$

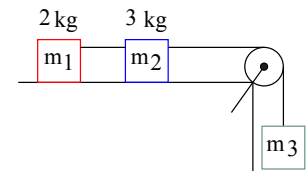
گزینه ۳. ۱۵۷ ابتدا حجم کره‌ی توپر به شعاع $5cm$ را به دست می‌آوریم:

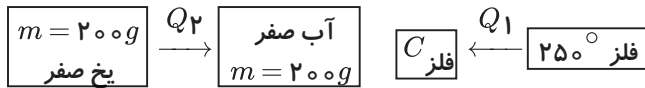
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V = \frac{4}{3} \times \pi \times (5)^3 = \frac{500}{3}\pi cm^3$$

حال با استفاده از رابطه‌ی چگالی می‌توانیم جرم کره را به دست می‌آوریم:

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow 6 \left(\frac{g}{cm^3} \right) = \frac{m}{\frac{500}{3}\pi (cm^3)} \rightarrow m = 1000\pi(g) = \pi(kg) \rightarrow m = 3,14kg$$

گزینه ۲. ۱۵۸ باید جرمی از فلز را به دست آوریم که فقط تمام یخ را ذوب کند و به آب صفر درجه برساند نه بیشتر! یعنی نباید دمای مجموعه را تغییر دهد چرا؟ چون عبارت حداقل بکار رفته است. دمای تعادل مجموعه صفر درجه است. بنابراین داریم:





$$\sum Q = 0 \rightarrow Q_1 + Q_2 = 0$$

$$m_{\text{فلز}} C \Delta \theta + m_{\text{یخ}} L_f = 0$$

$$m \times 400 \times (0 - 250) + 200 \times 336000 = 0 \Rightarrow m_{\text{فلز}} = 672 \text{ gr}$$

۱۵۹. گزینه ۴ افت پتانسیل حالت اول را حساب می کنیم. در حالت متوالی $R_1 = (6 + 6)\Omega = 12\Omega$ می شود. پس:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r} = \frac{12}{12 + 3} A = \frac{12}{15} A = \frac{4}{5} A$$

$$\Rightarrow \text{افت پتانسیل مولد} = I_1 r = \frac{4}{5} \times 3 = \frac{12}{5} V$$

در حالت دوم، R_2 برابر با 3Ω خواهد شد و افت پتانسیل مولد در این حالت به صورت زیر حساب می شود.

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r} = \frac{12}{3 + 3} A = 2 A$$

$$\text{افت پتانسیل مولد} = I_2 r = (3 \times 2) = 6 V$$

$$\frac{6}{\frac{12}{5}} = \frac{6 \times 5}{12} = \frac{5}{2}$$

نسبت این دو، برابر خواهد شد با:

۱۶۰. گزینه ۴ با توجه به این که کره ها مشابه اند، پس از تماس، بار به نسبت مساوی بین آن ها توزیع می شود. بار هر کره را پس از تماس با یکدیگر به دست می آوریم:

$$q'_1 = q'_2 = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{10^{-4} + (-10^{-5})}{2} = 4.5 \times 10^{-5} C$$

اکنون با استفاده از رابطه ی قانون کولن می توان نوشت:

$$F = k \frac{q'_1 q'_2}{r^2} \Rightarrow 2.025 = 9 \times 10^9 \times \frac{4.5 \times 10^{-5} \times 4.5 \times 10^{-5}}{r^2} \Rightarrow r = 3 m$$

۱۶۱. گزینه ۲

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow 0.3 = \frac{|W|}{Q_H} \Rightarrow |W| = 0.3 Q_H$$

طبق رابطه ی بازده داریم:

اگر قانون اول ترمودینامیک را در چرخه ی ماشین گرمایی (۱) بنویسیم، داریم:

$$|Q_{L1}| = Q_H - |W_1| = Q_H - 0.3 Q_H \Rightarrow |Q_{L1}| = 0.7 Q_H$$

برای ماشین گرمایی (۲)، $|Q_{H2}| = |Q_{L1}|$ است، بنابراین داریم:

$$\eta_2 = \frac{|W_2|}{Q_{H2}} = \frac{|W_2|}{|Q_{L1}|} \Rightarrow 0.4 = \frac{|W_2|}{0.7 Q_H} \Rightarrow |W_2| = 0.28 Q_H \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{|W_1|}{|W_2|} = \frac{0.3 Q_H}{0.28 Q_H} = \frac{30}{28} \Rightarrow \frac{|W_1|}{|W_2|} = \frac{15}{14}$$

۱۶۲. گزینه ۴

$$\text{چگالی مس: } \rho' = \frac{m}{V} \xrightarrow{V=A \cdot L} \rho' = \frac{m}{A \cdot L} \Rightarrow A = \frac{m}{\rho' \cdot L} (I)$$

$$\text{مقاومت سیم: } R = \rho \frac{L}{A} \xrightarrow{(I)} R = \rho \frac{L}{\frac{m}{\rho' \cdot L}} \Rightarrow R = \rho \rho' \frac{L^2}{m}$$

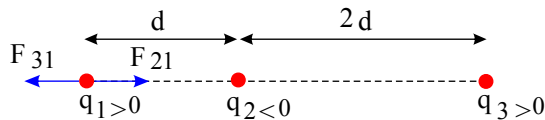
$$\Rightarrow 0.8 = 0.8 \times 10^{-8} \times 8 \times 10^3 \times \frac{L^2}{2} \Rightarrow L^2 = 2500 \Rightarrow L = 50 m$$

۱۶۳. گزینه ۲

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2} LI_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 10^{-3} \times (0.2)^2 = 10^{-3} J$$

$$\varepsilon L = -L \frac{dI}{dt} = -50 \times 10^{-3} \times 0.2 \times 100 \times \cos 100t$$

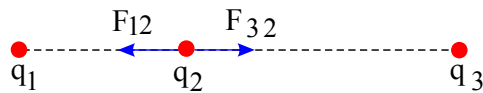
$$\Rightarrow \varepsilon_{\max} = 50 \times 0.2 \times 100 \times 10^{-3} = 1 V$$

۱۶۴. گزینه ۴ اندازه برآیند نیروهای وارد بر q_1 برابر است با:

$$F_{21} = \frac{kq_1 q_2}{d^2} = \frac{kq_1 q_1}{d^2}$$

$$F_{31} = \frac{kq_1 q_3}{(3d)^2} = \frac{kq_1 q_3}{9d^2} \Rightarrow \Sigma F_1$$

$$= \frac{kq_1}{d^2} (q_1 - \frac{q_3}{9})$$

برآیند نیروهای وارد بر q_2 برابر است با:

$$F_{12} = \frac{kq_1 q_2}{d^2} = \frac{kq_1 q_1}{d^2}$$

$$F_{32} = \frac{kq_1 q_3}{(2d)^2} = \frac{kq_1 q_3}{4d^2} \Rightarrow \Sigma F_2$$

$$= \frac{kq_1}{d^2} (\frac{q_3}{4} - q_1)$$

اندازه این نیروهای برآیند با یکدیگر برابر است، بنابراین داریم:

$$|\Sigma F_2| = |\Sigma F_1| \Rightarrow \frac{kq_1}{d^2} (q_1 - \frac{q_3}{9}) = \frac{kq_1}{d^2} (\frac{q_3}{4} - q_1)$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{q_3}{9} = \frac{q_3}{4} - q_1 \Rightarrow 2q_1 = \frac{q_3}{4} - \frac{q_3}{9} \Rightarrow 2q_1 = \frac{13q_3}{36} \Rightarrow \frac{q_3}{q_1} = \frac{72}{13}$$

۱۶۵. گزینه ۲ برای حل، ابتدا با کمک معادله‌ی حالت گاز کامل، تعداد مول گاز کامل را محاسبه می‌کنیم:

$$PV = nRT \Rightarrow 10^5 \times 1 \times 10^{-6} = n \times 8 \times (273 + 27) \Rightarrow n = \frac{0.1}{24000} = \frac{1}{240000} \text{ mol}$$

در ادامه با توجه به مفهوم عدد آووگادرو، با یک تناسب ساده داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^{23} \times \text{تعداد مولکول} = \text{عدد آووگادرو} = 6 \Rightarrow \text{مول} \\ \frac{1}{240000} \text{ مول} \Rightarrow N = ? \end{array} \right. \Rightarrow N = \frac{1}{240000} \times 6 \times 10^{23} = \frac{1}{4} \times 10^{20} = 2.5 \times 10^{19}$$

نگاه دیگر:

$$\text{تعداد مولکول ها} = \frac{\text{تعداد مول}}{\text{عدد آووگادرو}} \Rightarrow n = \frac{N}{N_A} \Rightarrow N = nN_A = \frac{1}{240000} \times 6 \times 10^{23} = 2.5 \times 10^{19}$$

۱۶۶. گزینه ۲ با افزایش مقاومت متغیر R_1 مقاومت معادل مدار افزایش می‌یابد و جریان عبوری از مدار کاهش می‌یابد. با توجه بهرابطه‌ی $V = \varepsilon - Ir$ اندازه‌ی V افزایش و با توجه به رابطه‌ی $V_2 = IR_2$ اندازه‌ی V_2 کاهش می‌یابد. در نتیجه با توجه به $V = V_1 + V_2$ اندازه‌ی V_1 افزایش می‌یابد. به دلیل افزایش V ، باید اندازه‌ی افزایش V_1 از اندازه‌ی کاهش V_2 بیشتر باشدیعنی $|\Delta V_1| > |\Delta V_2|$

۱۶۷. گزینه ۳ انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سیم‌لوله برابر است با:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \xrightarrow{I = \frac{V}{R}} U = \frac{1}{2} L \left(\frac{V}{R} \right)^2 \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{L_1}{L_2} \times \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 \times \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2$$

$$\frac{3}{2} = \frac{L_1}{L_2} \times \left(\frac{V_1}{2V_1} \right)^2 \times \left(\frac{R_2}{8R_2} \right)^2 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{L_1}{L_2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{L_1}{L_2} \times \frac{1}{256} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = 384$$

۱۶۸. گزینه ۴ مطابق شکل و با توجه به ناهم نام بودن بارهای q و Q ، شرط این که بارهای q و Q در حال تعادل باشند را به دست می آوریم. برای تعادل بار q داریم:

$$F_{31} = k \frac{q^2}{2a^2}$$

$$F_{21} = F_{41} = k \frac{|q||Q|}{a^2} \Rightarrow F' = F_{21} \sqrt{2} = k \frac{|q||Q|}{a^2} \sqrt{2}$$

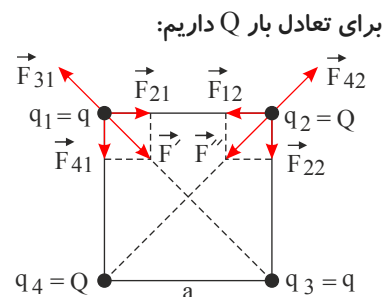
$$F_{31} = F' \Rightarrow k \frac{q^2}{2a^2} = k \frac{|q||Q|}{a^2} \sqrt{2} \Rightarrow \left| \frac{Q}{q} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_{42} = k \frac{Q^2}{2a^2}$$

$$F_{12} = F_{32} = k \frac{|q||Q|}{a^2}$$

$$F'' = F' = k \frac{|q||Q|}{a^2} \sqrt{2}$$

$$F_{42} = F'' \Rightarrow k \frac{Q^2}{2a^2} = k \frac{|q||Q|}{a^2} \sqrt{2} \Rightarrow \left| \frac{Q}{q} \right| = 2\sqrt{2}$$

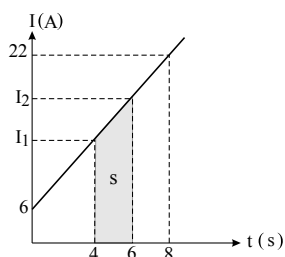


بنابراین امکان ندارد این مجموعه در حال تعادل باشد.

۱۶۹. گزینه ۲

در دو ثانیه‌ی سوم یعنی ۴ ثانیه تا ۶ ثانیه مساحت زیر نمودار را حساب می‌کنیم که همان بار عبوری از مقطع سیم می‌باشد.

با نوشتن تناسب بین مثلث بزرگ و کوچک می‌توان I_1 را حساب کرد.



$$\frac{2}{1} = \frac{22-6}{I_1-6}$$

$$2I_1 - 12 = 16$$

$$I_1 = 14A$$

با نوشتن تناسب بین مثلث بزرگ و متوسط I_2 را حساب کرد.

$$\frac{4}{3} = \frac{22-6}{I_2-6}$$

$$48 = 4I_2 - 24$$

$$I_2 = 18A$$

$$\Delta q = S_{\text{دوزنقه}} = \frac{(18+14) \times 2}{2} = 32C$$

از طرفی $\Delta q = ne$ پس داریم:

$$32 = 1.6 \times 10^{-19} n \quad n = 20 \times 10^{19} = 2 \times 10^{20}$$

۱۷۰. گزینه ۲ برای پیچۀ مسطح:

$$N = \frac{L}{2\pi R} = \frac{20}{2\pi \times 15 \times 10^{-2}} = \frac{20}{0.3\pi}$$

$$B_1 = \frac{\mu_o NI}{2R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times \frac{20}{0.3\pi} \times 9}{2 \times 0.15} = 8 \times 10^{-4} T = 8G$$

برای سیملوله:

$$N = \frac{L}{2\pi R} = \frac{20}{2\pi \times 5 \times 10^{-2}} = \frac{200}{\pi}$$

$$B_2 = \frac{\mu_o NI}{L} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times \frac{200}{\pi} \times 5}{0.25} = 16 \times 10^{-4} T = 16G$$

$$\Rightarrow B_2 - B_1 = 16 - 8 = 8G$$

۱۷۱. گزینه ۳ در این گزینه بیشترین الکتروننگاتیوی مربوط به اکسیژن و کمترین واکنشپذیری مربوط به نیتروژن است، N ، B و O در یک تناوب هستند و B در سمت چپ نیتروژن و اکسیژن قرار دارد و بزرگترین شعاع را دارد.
۱۷۲. گزینه ۱ فردریک وُلر با گرم کردن کربن و آلیاژی از روی و کلسیم موفق شد که کلسیم کاربید (CaC_2) را کشف کند سپس، کلسیم کاربید را با آب واکنش داد و به این ترتیب اتین (استیلن) را تهیه کرد.
۱۷۳. گزینه ۴

ساختار I مربوط به متیل سالیسیلات می باشد که دارای گروه عاملی استری می باشد. $(-C(=O)-O-)$

- در ترکیب (I) ، $-OH$ هیدروکسیل نام دارد ولی چون مستقیماً به حلقه ی بنزنی متصل است عامل فنولی است نه عامل الکلی.

- ترکیب (II) مربوط به فرمول ساختاری آسپرین است و در آن گروه های عاملی کربوکسیل و استری موجود است.

۱۷۴. گزینه ۴ برای پاسخ دادن به این تست بایستی فرمول ترکیب های داده شده را به صورت نمادی بنویسیم (فرمول نویسی) و سپس نسبت های خواسته شده را محاسبه کنیم.

$$\text{ردیف ۴ ستون II} \left\{ Al(ClO_3)_3 : \frac{\text{آنیون}}{\text{کاتیون}} = \frac{3}{1} \right.$$

$$\text{ردیف ۱ ستون I} \left\{ Cs_3PO_4 : \frac{\text{کاتیون}}{\text{آنیون}} = \frac{3}{1} \right.$$

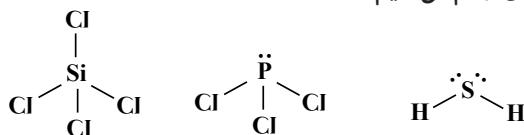
۱۷۵. گزینه ۱ حجم بزرگ برم و دو اتمی بودن مولکول آن باعث قطبیت پذیری بیش تر آن نسبت به کریپتون می باشد.

۱۷۶. گزینه ۲ تعداد الکترون های $4s$ در اتم A دو برابر تعداد الکترون های $4s$ در B است بنابراین: $A = 4s^2$ ، $B = 4s^1$

و در رابطه با زیرلایه $3d$ تعداد الکترون های $3d$ در اتم A نصف تعداد الکترون های $3d$ در اتم B می باشد. یعنی اگر $3d^5$ در اتم A داشته باشیم در اتم B $3d^{10}$ خواهد بود.

گزینه ۲ دارای چنین حالتی است. $A = Mn : [18Ar] 3d^5 / 4s^2$ ، $B = Cu : [18Ar] 3d^{10} / 4s^1$

۱۷۷. گزینه ۳ ساختار لوویس و شکل هندسی آنها را با توجه به زوایای پیوندی رسم می کنیم.



خمیده هرم با قاعده مثلث چهار وجهی

۱۷۸. گزینه ۱ دستگاه طیف بین، توسط رابرت بونزن کشف شد و به کمک آن معلوم شد که طیف نشری فلزات خطی و منحصر به فرد است همچنین جنس پرتوها در این دستگاه مشابه اشعه ی x است.

۱۷۹. گزینه ۱ الف) نادرست است چون طول پیوند $H-Cl$ از $H-H$ بیشتر است. بنابراین انرژی پیوند $H-H$ از $H-Cl$ بیشتر است.

ب) این عبارت صحیح است.

پ) این عبارت صحیح است.

ت) نادرست است چون، اگر اتم ها از فاصله ی تعادلی به یکدیگر نزدیک تر یا دورتر شوند در وضعیت ناپایدار قرار خواهند گرفت.

۱۸۰. گزینه ۳ با توجه به الکتروننگاتیوی عناصر

Z	G	A	D	E	M	X	J
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Li	Be	B	C	N	O	F	Ne

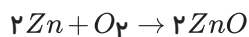
$\Leftarrow M, E$ NO, NO_2, N_2O و ... و هیچ کدام آمفوتر نیستند.

$\Leftarrow X, D$ CF_4 مولکول ناقطبی می دهند.

$\Leftarrow D, M$ CO_2 ترکیب کووالانسی با ساختار خطی می دهند.

$\Leftarrow J, X$ ترکیب نمی شوند.

۱۸۱. گزینه ۲



$$۸,۱۲۵ \text{ g Zn} \times \frac{۸۰ \text{ g Zn}}{۱۰۰ \text{ g Zn}} \times \frac{۱ \text{ mol Zn}}{۶۵ \text{ g Zn}} = ۰,۱ \text{ mol} \Rightarrow \frac{۰,۱}{۲} = \frac{۱}{۲۰} \text{ محدودکننده}$$

$$۲ \text{ g O}_2 \times \frac{۱ \text{ mol O}_2}{۳۲ \text{ g O}_2} = \frac{۱}{۱۶} \text{ mol O}_2 \Rightarrow \frac{۱}{۱۶} \text{ mol} \div ۱ = \frac{۱}{۱۶} \text{ اضافی}$$

$$? \text{ g O}_2 = ۰,۱ \text{ mol Zn} \times \frac{۱ \text{ mol O}_2}{۲ \text{ mol Zn}} \times \frac{۳۲ \text{ g O}_2}{۱ \text{ mol O}_2} = ۱,۶ \text{ g O}_2 \text{ اکسیژن مصرفی}$$

$$۲ \text{ g O}_2 - ۱,۶ \text{ g O}_2 = ۰,۴ \text{ g O}_2 \text{ اضافی}$$

روش دوم:

$$\frac{۱}{۲۰} = \frac{۸,۱۲۵ \text{ g Zn} \times ۸۰}{۲ \times ۶۵ \times ۱۰۰} < \frac{۲ \text{ g O}_2}{۳۲} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲۰} = \frac{x \text{ g O}_2}{۳۲} \text{ مصرف} \Rightarrow x = ۱,۶ \text{ g O}_2 \Rightarrow ۲ - ۱,۶ = ۰,۴ \text{ g}$$

محدودکننده اضافی مصرف می شود

۱۸۲. گزینه ۲

$$gC_2H_5OH = ۱۱,۵ \text{ mL} \times \frac{۰,۸ \text{ g}}{۱ \text{ mL}} = ۹,۲ \text{ g}$$

$$molC_2H_5OH = ۹,۲ \text{ g} \times \frac{۱ \text{ mol}}{۴۶ \text{ g}} = ۰,۲ \text{ mol}$$

$$molH_2O = ۱۴,۴ \text{ g} \times \frac{۱ \text{ mol}}{۱۸ \text{ g}} = ۰,۸ \text{ mol}$$

$$C_2H_5OH\% = \frac{۰,۲ \text{ mol } C_2H_5OH}{(۰,۲ + ۰,۸)} \times ۱۰۰ = ۲۰\%$$

۱۸۳. گزینه ۴ ظرفیت گرمایی به جرم جسم بستگی دارد ظرف دومی ۲۰۰ میلی لیتر آب دارد از ۱۰۰ میلی لیتر آب ظرفیت گرمایی بیش تری دارد. بنابراین افزایش دمای آب به میزان مساوی گرمای متفاوتی احتیاج دارد.

۱۸۴. گزینه ۴ $\Delta S < 0$, $\Delta H < 0$ اما عامل مساعد بر عامل نامساعد غلبه دارد.

رد گزینه ی ۱: ΔS در واکنش II، مثبت و مساعد است.

رد گزینه ی ۲: واکنش تجزیه ی H_2O خودبه خودی نیست.

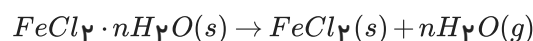
رد گزینه ی ۳: واکنش سوختن اتانول خودبه خودی است.

۱۸۵. گزینه ۳

$$\text{جرم آب} = ۷,۰۵ - ۳,۸۱ = ۳,۲۴ \text{ g} \Rightarrow \text{جرم نمک خشک} - \text{جرم نمک آبیوشیده} = \text{جرم آب}$$

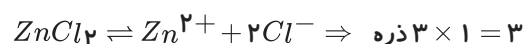
$$\left. \begin{aligned} \text{مول آب} &= ۳,۲۴ \text{ g} \times \frac{۱ \text{ mol}}{۱۸ \text{ g}} = ۰,۱۸ \text{ mol} \\ \text{مول نمک} &= ۳,۸۱ \text{ g} \times \frac{۱ \text{ mol}}{۱۲۷ \text{ g}} = ۰,۰۳ \text{ mol} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{molH_2O}{molFeCl_2} = \frac{۰,۱۸}{۰,۰۳} = ۶ \Rightarrow FeCl_2 \cdot ۶H_2O$$

روش دوم:



$$\frac{۳,۸۱ \text{ g}}{۱۲۷ \text{ g}} = \frac{۳,۲۴ \text{ g}}{n \times ۱۸} \quad n = ۶ \Rightarrow FeCl_2 \cdot ۶H_2O$$

۱۸۶. گزینه ۱ با توجه به بیشتر بودن غلظت ذره ی حل شونده $ZnCl_2$ گزینه ۱ صحیح است.



۱۸۷. گزینه ۴

$$\text{جرم رسوب تولیدشده} = \frac{(\text{جرم محلول سیر شده}) \times (\text{تفاضل انحلال پذیری ها})}{\text{انحلال پذیری بیشتر}} = \frac{900 \times (50 - 10)}{150} = 240 \text{ g}$$

$$\text{جرم محلول باقیمانده} = 900 - 240 = 660 \text{ g}$$

۱۸۸. گزینه ۴

$$q = m \cdot c \cdot \Delta T = 200 \times 4.2 \times (30 - 25) = 4200 \text{ J} = 4.2 \text{ kJ} \quad \text{گرمای مبادله شده}$$

$$\text{جمع حجم} = 150 + 50 = 200 \text{ mL}$$

با توجه به اینکه چگالی محلول $1 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ است 200 mL محلول معادل 200 g است.

پس واکنش دهنده‌ی اضافی نداریم

$$\text{mol NaOH} = 0.6 \times 50 \times 10^{-3} = 0.03 \text{ mol} \xrightarrow{\div 2 (\text{ضریب})} 0.015$$

$$\text{mol H}_2\text{SO}_4 = 0.1 \times 150 \times 10^{-3} = 0.015 \text{ mol} \xrightarrow{\div 1 (\text{ضریب})} 0.015$$

$$? \text{ kJ} = 1 \text{ mol H}_2\text{SO}_4 \times \frac{4.2 \text{ kJ}}{0.015 \text{ mol H}_2\text{SO}_4} = 280 \text{ kJ} \rightarrow \Delta H = -280 \text{ kJ}$$

دما زیاد شده پس واکنش گرماده است.

۱۸۹. گزینه ۳ اگر $\Delta S > 0$ و $\Delta H > 0$ باشند، واکنش گرماگیر و با افزایش بی نظمی همراه است. در این حالت واکنش در

دماهای بالا خودبه‌خودی است و در دماهای پایین ΔG ، مثبت است ($\Delta G > 0$)

اگر $\Delta S < 0$ و $\Delta H < 0$ باشند، واکنش گرماده و با کاهش بی نظمی همراه است. در این حالت واکنش در دماهای پایین خود به

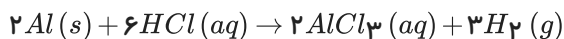
خودی است و در دماهای بالا ΔG ، مثبت است. بنابراین سه جمله‌ی زیر درست هستند:

- ΔG آنها می‌تواند مثبت باشد.

- در دماهای پایین می‌توانند خودبه‌خودی باشند.

- در دماهای بالا می‌توانند خودبه‌خودی باشند.

۱۹۰. گزینه ۲



$$\begin{array}{ccc} mg & & (0.4 \times 0.25) \text{ mol} \\ 2\text{Al} & \sim & 6\text{HCl} \\ 2 \times 27 & & 6 \end{array}$$

$$\frac{mg}{2 \times 27} = \frac{0.4 \times 0.25}{6} \Rightarrow m = 0.9 \text{ mol}$$