۲۱. گزینه ۳

$$n(S) = ۶^۳ = ۲۱۶$$

$$\left.\begin{array}{l} ۱,۱,۶ \xrightarrow{\text{جابجایی}} \frac{۳!}{۲!} = ۳ \\ ۱,۲,۵ \xrightarrow{\text{جابجایی}} ۳! = ۶ \\ ۱,۳,۴ \xrightarrow{\text{جابجایی}} ۳! = ۶ \\ ۲,۲,۴ \xrightarrow{\text{جابجایی}} \frac{۳!}{۲!} = ۳ \\ ۲,۳,۳ \xrightarrow{\text{جابجایی}} \frac{۳!}{۲!} = ۳ \end{array}\right\} \Longrightarrow n(A) = ۲۱$$

پس $P(A) = \frac{۲۱}{۲۱۶} = \frac{۷}{۷۲}$ است.

۲۲. گزینه ۱ فضای نمونه ای این آزمایش اعداد سه رقمی فرد هستند.

$$۱۰۱, ۱۰۳, ۱۰۵, \cdots, ۹۹۹$$

یک تصاعد حسابی با قدر نسبت ۲ داریم:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \rightarrow ۹۹۹ = ۱۰۱ + ۲n - ۲ \rightarrow ۲n = ۹۰۰ \rightarrow n = ۴۵۰$$

پس $n(S) = ۴۵۰$ می باشد.

حال باید بدانیم از بین اعداد فرد چندتا مضرب ۳ هستند.

از هر سه عدد فرد متوالی یکی از آن‌ها مضرب ۳ است پس تعداد اعداد فرد مضرب ۳ برابر $\frac{۴۵۰}{۳} = ۱۵۰$ تا می‌باشد یعنی $n(A) = ۱۵۰$ می باشد.

پس $P(A) = \frac{۱۵۰}{۴۵۰} = \frac{۱}{۳}$ است.

۲۳. گزینه ۲ حالتی که عناصر را متوالیاً و بدون جایگذاری برمی داریم دقیقاً مشابه حالتی است که عناصر را با هم برمی داریم پس می توانیم فرض کنیم که قرار است عناصر را با هم برداریم.

چون ۶ و ۸ انتخاب شده اند سه توپ بعدی باید از بین ۸ توپ باقیمانده انتخاب شوند.

$$n(S) = \binom{۱۰}{۵} = \frac{۱۰!}{۵! \times ۵!} = ۲۵۲$$

$$n(A) = \binom{۸}{۳} = ۵۶$$

پس $P(A) = \frac{۵۶}{۲۵۲} = \frac{۲}{۹}$ است.

۲۴. گزینه ۱ احتمال آمدن عدد ۶ در هر بار پرتاب تاس $\frac{۱}{۶}$ و احتمال نیامدن آن $\frac{۵}{۶}$ است.

دفعه ی اول شش بیاید : $\frac{۱}{۶}$

دفعه اول شش نیاید و دفعه دوم شش بیاید: $\frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۶}$

دفعه اول شش نیاید و دفعه دوم شش نیاید و دفعه سوم شش بیاید: $\frac{۵}{۶} \times \frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۶}$

$$\text{احتمال} = \frac{1}{6} + (\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}) + (\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{91}{216}$$

۲۵. گزینه ۱

$$\begin{cases} P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0/3 \Rightarrow P(A\cap B) = 0/3P(B) \Rightarrow P(B) = \dfrac{10}{3}P(A\cap B) \\ P(B|A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = 0/2 \Rightarrow P(A\cap B) = 0/2P(A) \Rightarrow P(A) = 5P(A\cap B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{25}{3}P(A\cap B) = 0/6 \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{9}{125}$$

$$P(A|B') = \frac{\overbrace{P(A\cap B')}^{P(A-B)}}{P(B')} = \frac{\overbrace{P(A)}^{5P(A\cap B)} - P(A\cap B)}{1 - P(B)} = \frac{4P(A\cap B)}{1 - \frac{10}{3}P(A\cap B)} = \frac{\frac{36}{125}}{\frac{95}{125}} = \frac{36}{95}$$

۲۶. گزینه ۴ یعنی دفعه‌ی اول مجموع ۷ نباشد و دفعه‌ی دوم مجموع ۷ باشد ابتدا احتمال آن‌که مجموع دو عدد رو شده ۷ باشد را حساب می‌کنیم.

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$\text{مجموع} = 7 \Rightarrow A = \{(1,6)(6,1)(2,5)(5,2)(3,4)(4,3)\} \ \rightarrow \ n(A) = 6$$

پس احتمال آن‌که مجموع دو عدد رو شده ۷ باشد $\frac{6}{36}$ یا $\frac{1}{6}$ است و احتمال آن‌که مجموع دو عدد رو شده ۷ نباشد $1 - \frac{1}{6}$ یا $\frac{5}{6}$ است.

پس $P(A) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$ است.

۲۷. گزینه ۲

دقت کنید $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -5$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = 2$ می‌باشند.

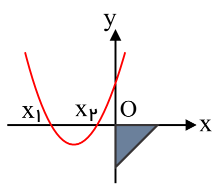
α و β ریشه‌های معادله هستند پس در معادله صدق می‌کنند.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق}} \alpha^2 + 5\alpha + 2 = 0 \Rightarrow 5\alpha + 2 = -\alpha^2$$

$$\beta \xrightarrow{\text{صدق}} \beta^2 + 5\beta + 2 = 0 \Rightarrow 5\beta + 2 = -\beta^2$$

$$\frac{\alpha^3\beta^2}{5\alpha+2} + \frac{\beta^3\alpha^2}{5\beta+2} = \frac{\alpha^3\beta^2}{-\alpha^2} + \frac{\beta^3\alpha^2}{-\beta^2} = -\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 = -\alpha\beta(\alpha+\beta) = -(2)(-5) = 10$$

۲۸. گزینه ۴ با توجه به شکل زیر، برای این که نمودار فقط از ناحیه‌ی چهارم نگذرد باید حالت مقابل رخ دهد، با توجه به این حالت:



$f(0) = \frac{9}{4} \ \Rightarrow$ **تابع بالای مبدأ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.**

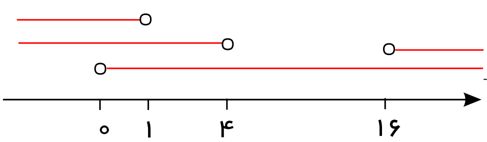
تابع باید مینیمم داشته باشد. $\Rightarrow \ a > 0 \quad (I)$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0 \ \xrightarrow{a>0} \ a - 4 < 0 \ \Rightarrow \ a < 4 \quad (II)$$

$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \ \xrightarrow{a>0} \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{9}{4} > 0$ **همواره برقرار است**

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \ \Rightarrow \ \Delta = (a-4)^2 - 9a = a^2 - 17a + 16 > 0$$

$(a-1)(a-16) > 0 \ \Rightarrow \ a < 1$ یا $a > 16 \quad (III)$



$$\xrightarrow{(I)\cap(II)\cap(III)} \ 0 < a < 1$$

۲۹. گزینه ۳ صورت کلی یک تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=ax^{۲}+bx+c$ می‌باشد و نقطه‌ی $\begin{vmatrix} ۲ \\ -۱ \end{vmatrix}$ رأس سهمی است که در تابع صدق می‌کند و طولش از رابطه‌ی $x_S=\frac{-b}{۲a}$ به دست می‌آید در ضمن نقطه‌ی $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix}$ نیز روی تابع قرار دارد پس در تابع صدق می‌کند.

$$x_S=\frac{-b}{۲a}\to ۲=\frac{-b}{۲a}\to ۴a=-b \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} ۲ \\ -۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} -۱=۴a+۲b+c \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} ۱=c$$

$$-۱=۴a+۲b+c \xrightarrow[c=۱]{۴a=-b} -۱=-b+۲b+۱\to b=-۲\,,\, a=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین تابع درجه‌ی دوم به صورت $y=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x+۱$ است و باتوجه به شکل، $x=\alpha$ ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $y=۰$ است.

$$y=۰\xrightarrow{\times ۲} x^{۲}-۴x+۲=۰\to \Delta=b^{۲}-۴ac=۱۶-۸=۸$$

$$\text{ریشه‌ی بزرگتر}=\frac{۴+\sqrt{۸}}{۲}=\frac{۴+۲\sqrt{۲}}{۲}=۲+\sqrt{۲}$$

۳۰. گزینه ۲

$$(x-۲)(x^{۲}+mx+m+۳)=۰\to \begin{cases} x=۲ \\ x^{۲}+mx+m+۳=۰ \end{cases}$$

یک ریشه‌ی معادله $x=۲$ است و اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^{۲}+mx+m+۳=۰$ را α و β در نظر بگیریم طبق صورت مسأله $\underbrace{\alpha^{۲}+\beta^{۲}+۲^{۲}}_{\text{مجموع مجذورات ریشه‌ها}}=۱۳$ است.

$$\alpha^{۲}+\beta^{۲}+۴=۱۳\to \alpha^{۲}+\beta^{۲}=۹\to (\alpha+\beta)^{۲}-۲\alpha\beta=۹ \xrightarrow[\alpha\beta=\frac{c}{a}=m+۳]{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-m}$$

$$m^{۲}-۲(m+۳)=۹\to m^{۲}-۲m-۱۵=۰\to (m-۵)(m+۳)=۰$$

$$\to \begin{cases} m=۵ \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^{۲}+۵x+۸=۰\to \Delta=b^{۲}-۴ac=۲۵-۳۲<۰\to \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \\ m=-۳ \xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}} x^{۲}-۳x=۰\to x(x-۳)=۰\to x=۰, x=۳ \end{cases}$$

بنابراین فقط $m=-۳$ قابل قبول است.

۳۱. گزینه ۴

$$Max\to x^{۲}\ \text{ضریب}\ <۰\to m<۰:I$$

$$\text{تابع، محورطول را قطع نمی کند}\to \Delta<۰\to b^{۲}-۴ac<۰\to ۳۲-۴m(m-۲)<۰\to ۳۲-۴m^{۲}+۸m<۰$$

$$\to ۴m^{۲}-۸m-۳۲>۰\to m^{۲}-۲m-۸>۰\to (m-۴)(m+۲)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m<-۲ \quad \text{یا} \quad m>۴:II$$

از طرفی طول رأس سهمی یعنی $\frac{-b}{۲a}$ منفی می‌باشد.

$$\frac{-b}{۲a}<۰\to \frac{-۴\sqrt{۲}}{۲m}<۰\to m>۰:III$$

که اشتراک جواب‌های I و II و III تهی می‌باشد.

۳۲. گزینه ۳

می‌دانیم: $x \in Z \to [x]+[-x]=۰$

به ازای تمام اعدادی که داخل جزء صحیح را صحیح می‌کنند مخرج صفر می‌شود $۱)[x^{۲}]+[-x^{۲}]\neq ۰ \Rightarrow x^{۲}\notin Z \Rightarrow$

$۲)۱-x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow ۱\geq x^{۲} \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$

از اشتراک دو شرط بالا: $Df=(-۱,۱)-\{۰\}$

۳۳. گزینه ۲ می‌دانیم:
$$\boxed{\begin{array}{l} ab\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad |a+b|=|a|+|b| \\ ab< ۰ \quad \Rightarrow \quad |a+b| < |a|+|b| \end{array}}$$

پس چون مجموع عبارت‌های داخل قدرمطلق‌های سمت چپ تساوی با عبارت داخل قدرمطلق سمت راست تساوی برابر است، بنابراین باید این عبارت‌ها هم‌علامت باشند یا حداقل یکی از آن‌ها صفر شود:

$$(x^{۲}+۱)(x-۲)\geq ۰ \xrightarrow{(x^{۲}+۱)>۰} x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\in[۲,+\infty)$$

۳۴. گزینه ۲

$$[x]+[x-\frac{۳}{۲}]-[x-\frac{۱}{۲}]=۳\Rightarrow [x]+[x-\frac{۱}{۲}-۱]-[x-\frac{۱}{۲}]=۳$$

$$\Rightarrow [x]+[x-\frac{۱}{۲}]-۱-[x-\frac{۱}{۲}]=۳\Rightarrow [x]=۴\Rightarrow ۴\leq x<۵ \text{ یا } x\in[۴,۵)$$

۳۵. گزینه ۳ واضح است که $(۵,f^{-۱}(۵))\in f^{-۱}$ است، پس $(f^{-۱}(۵),۵)\in f$ خواهد بود. یعنی نقطه‌ی $(f^{-۱}(۵),۵)$ در ضابطه‌ی f صدق می‌کند. به جای $f(x)$ عدد ۵ و به جای x مقدار $f^{-۱}(۵)$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=f^{-۱}(۵)+x-۳\Rightarrow ۵=f^{-۱}(۵)+f^{-۱}(۵)-۳\Rightarrow f^{-۱}(۵)=۴$$

حال ضابطه‌ی تابع f را دوباره می‌نویسیم و $f(۵)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=۴+x-۳\Rightarrow f(x)=x+۱\Rightarrow f(۵)=۵+۱=۶$$

۳۶. گزینه ۳ مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^{۲}-۵x+a<۰$، بین دو ریشه است، چون ضریب $x^{۲}$ مثبت است.

بنابراین $x=۴$ یک جواب معادله‌ی $x^{۲}-۵x+a=۰$ می‌باشد.

بنابراین داریم:

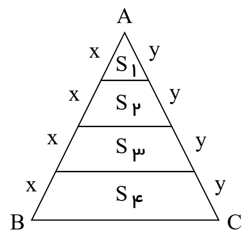
$$x=۴ \quad\Rightarrow\quad ۴^{۲}-۵\times۴+a=۰ \quad\Rightarrow\quad a=۴$$

از طرف دیگر $x=b$ باید جواب دیگر معادله‌ی $x^{۲}-۵x+۴=۰$ شود. در نتیجه داریم:

$$x^{۲}-۵x+۴=۰ \quad\Rightarrow\quad x=۱ \text{ یا } x=۴$$

پس جواب دیگر $b=۱$ می‌باشد، بنابراین $a^{۲}+b^{۲}=۱۷$ می‌باشد.

۳۷. گزینه ۳



$$(۱): S_{۱}=\frac{۱}{۲}\times x\times y\times\sin\widehat{A}$$

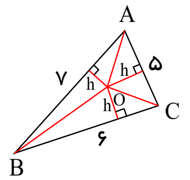
$$(۲): S_{۳}=\frac{۱}{۲}(۳x)\times(۳y)\times\sin\widehat{A}-\frac{۱}{۲}(۲x)(۲y)\times\sin\widehat{A}=\frac{۱}{۲}\times ۵xy\sin\widehat{A}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} S_{۱}+S_{۳}=۳xy\sin\widehat{A}$$

$$S_{۲}+S_{۴}=S-S_{۱}-S_{۳}=\frac{۱}{۲}(۴x)(۴y)\sin\widehat{A}-۳xy\sin\widehat{A}=۵xy\sin\widehat{A}$$

$$?=\frac{S_{۲}+S_{۴}}{S_{۱}+S_{۳}}=\frac{۵xy\sin\widehat{A}}{۳xy\sin\widehat{A}}=\frac{۵}{۳}$$

۳۸. گزینه ۳ O محل تلاقی نیمسازهاست یعنی از همه اضلاع به یک فاصله (h) است. پس می‌توان گفت مثلث‌های AOB و AOC و BOC دارای ارتفاع یکسان و قاعده‌های متفاوتند پس AOB بزرگترین مساحت و AOC کوچک‌ترین مساحت را دارد.



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AOB}}+S_{\overset{\triangle}{AOC}}}{S_{\overset{\triangle}{BOC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}h\times AB+\frac{۱}{۲}h\times AC}{\frac{۱}{۲}h\times BC}=\frac{۷+۵}{۶}=۲$$

۳۹. گزینه ۲

به کمک رابطه‌ی مساحت هر ارتفاع را بر حسب ضلع نظیر آن می‌نویسیم.

$$S=\frac{۱}{۲}h_a\times a=\frac{۱}{۲}h_b\times b\Rightarrow h_a=\frac{۲S}{a}\ ,\ h_b=\frac{۲S}{b}$$

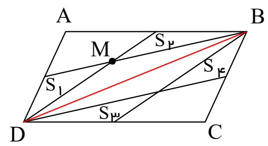
$$\sqrt{۲}(\frac{۲S}{a}+\frac{۲S}{b})=a+b\Rightarrow ۲\sqrt{۲}S=ab$$

$$\left.\begin{array}{l} S=\frac{\sqrt{۲}}{۴}ab \\ S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow \sin\hat{C}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow \hat{C}=\frac{\pi}{۴}$$

۴۰. گزینه ۳ برداشتن گام اول سخت است اما ما با رسم قطر BD آن را برمی‌داریم.

ما می‌توانیم به جای نسبت بین قسمت رنگی و متوازی الاضلاع، نسبت مساحت $S_۱$ و $S_۲$ را به $\overset{\Delta}{ABD}$ به دست بیاوریم. چون مساحت کلی (متوازی الاضلاع) و هم مساحت جزئی (قسمت رنگی) نصف شده‌اند.

حال در مثلث ABD نقطه‌ی M نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها است و $S_۱$ و $S_۲$ هر کدام $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث پس:



$$S_۱+S_۲=(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶})S_{ABD}=\frac{۱}{۳}S_{ABD}$$