۱.گزینه ۱ در ابتدا جدول را با فراوانی مطلق می‌نویسیم و توجه کنید که اختلاف فراوانی تجمعی در دو دسته‌ی iام و $(i+1)$ام، فراوانی مطلق دسته‌ی $(i+1)$ام را می‌دهد.

مرکز دسته‌ها	۸	۱۰	۱۲	۱۴
فراوانی مطلق	۲	۵	۵	۹

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i x_i=\frac{1}{21}((2\times 8)+(5\times 10)+(5\times 12)+(9\times 14))=a\to\frac{252}{21}=a\to a=12$$

بنابراین سه داده‌ی اضافه شده عبارتند از ۱۲ و $\frac{3\times 12}{4}=9$ و $12-2=10$ که در این صورت جدول فراوانی به صورت زیر در می‌آید.

حدود دسته‌ها	$[7,9)$	$[9,11)$	$[11,13)$	$[13,15]$
فراوانی مطلق	۲	۷	۶	۹

حال در جدول قدیم و جدول جدید، زاویه‌ی مرکزی دسته‌ی $[11,13)$ در نمودار دایره‌ای را حساب می‌کنیم.

$$d_i=\frac{360}{N}F_i\to d_{i\,\text{قدیم}}=\frac{360}{21}\times 5$$

$$d_i=\frac{360}{N}F_i\to d_{i\,\text{جدید}}=\frac{360}{24}\times 6$$

مقدار زاویه افزایش یافته $=\frac{360}{24}\times 6-\frac{360}{21}\times 5=360(\frac{6}{24}-\frac{5}{21})=360(\frac{1}{4}-\frac{5}{21})=360(\frac{1}{84})=\frac{360}{84}=\frac{30}{7}$ درجه

۲.گزینه ۲ مساحت زیرنمودار نمودار چندبر فراوانی برابر با مساحت نمودار مستطیلی است.

مساحت زیرنمودار چندبر فراوانی $=N\cdot C\to 100=(1+6+3+4+6)C\to 100=20C$

$\to C=5\to$

مرکز دسته‌ها	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵
فراوانی	۱	۶	۳	۴	۶

برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۱۵ واحد کم می‌کنیم که البته واریانس تغییر نمی‌کند (اگر به تمام داده‌های آماری مقداری ثابت را اضافه یا کم کنیم واریانس تغییر نمی‌کند)

مرکز دسته‌ها	-10	-5	0	5	10
فراوانی	۱	۶	۳	۴	۶

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i x_i=\frac{1}{20}(-10-30+0+20+60)=\frac{40}{20}=2$$

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^2$$

$$=\frac{1}{20}\left(1(-10-2)^2+6(-5-2)^2+3(0-2)^2+4(5-2)^2+6(10-2)^2\right)=\frac{870}{20}=\frac{87}{2}=43.5$$

۳.گزینه ۱ اگر طول دسته را C در نظر بگیریم از کران پائین دسته‌ی سوم تا مرکز دسته‌ی ششم $3C+\frac{C}{2}$ فاصله است. بنابراین:

$$3C+\frac{C}{2}=25.5-15\Rightarrow\frac{7C}{2}=10.5\Rightarrow C=3$$

بنابراین:

دامنه‌ی تغییرات $=$ طول دسته $\times$ تعداد دسته $=3\times 8=24$

هم‌چنین:

$$\text{کران پائین دسته‌ی اول} = \text{کران پائین دسته‌ی سوم} - ۲C = ۱۵ - ۲(۳) = ۹$$

وقتی داده‌ها در ۶ طبقه دسته‌بندی می‌شوند داریم:

$$\text{طول دسته}: C' = \frac{R}{n} = \frac{۲۴}{۶} = ۴$$

در نتیجه:

$$\text{مرکز دسته‌ی دوم} = \text{کران پائین دسته‌ی اول} + C' + \frac{C'}{۲} = ۹ + ۴ + ۲ = ۱۵$$

۴.گزینه ۱

ابتدا از روی نمودار، جدول فراوانی را رسم می‌کنیم.

حدود دسته ها	$[۰,۲)$	$[۲,۴)$	$[۴,۶)$	$[۶,۸]$
فراوانی مطلق	۱	۲	۹	۴
مرکز دسته ها	۱	۳	۵	۷

ابتدا باید میانگین را حساب کنیم.

$$\bar{x} = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} Fi\, xi = \frac{۱}{۱۶}((۱\times۱)+(۳\times۲)+(۵\times۹)+(۷\times۴)) = \frac{۸۰}{۱۶} = ۵$$

حال، واریانس را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} Fi\ (x\,i - \bar{x})^۲ = \frac{۱}{۱۶}(۱(۱-۵)^۲ + ۲(۳-۵)^۲ + ۹(۵-۵)^۲ + ۴(۷-۵)^۲) = \frac{۴۰}{۱۶} = ۲/۵ \to \sigma = \sqrt{۲/۵}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۲/۵}}{۵} = \frac{\sqrt{۲۵\times ۰/۱}}{۵} = \frac{۵\sqrt{۰/۱}}{۵} = \sqrt{۰/۱} = \sqrt{\frac{۱}{۱۰}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

۵.گزینه ۴

$$\bar{x} = ۱۱ \to \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۸}{۸} = ۱۱ \to x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۸ = ۸۸ \to \sum_{i=۱}^{۸} xi = ۸۸$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \to ۱۰ = \frac{\sum_{i=۱}^{۸} x_i^۲}{۸} - ۱۲۱ \to \frac{\sum_{i=۱}^{۸} x_i^۲}{۸} = ۱۳۱ \to \sum_{i=۱}^{۸} x_i^۲ = ۱۰۴۸$$

با اضافه کردن داده‌ی جدید $x = ۲$ داریم:

$$\text{مجموع داده‌ها در حالت جدید} = ۸۸ + ۲ = ۹۰ \to \sum_{i=۱}^{۹} xi = ۹۰$$

$$\text{مجموع مربعات داده‌ها در حالت جدید} = ۱۰۴۸ + ۲^۲ = ۱۰۵۲ \to \sum_{i=۱}^{۹} x_i^۲ = ۱۰۵۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \to \sigma^۲ = \frac{۱۰۵۲}{۹} - (\frac{۹۰}{۹})^۲ = \frac{۱۰۵۲}{۹} - ۱۰۰ = \frac{۱۵۲}{۹} \sim ۱۶/۹$$

۶.گزینه ۲

دقت کنید $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۵$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=۲$ می‌باشند.

α و β ریشه‌های معادله هستند پس در معادله صدق می‌کنند.

$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق}} \alpha^۲+۵\alpha+۲=۰ \Rightarrow ۵\alpha+۲=-\alpha^۲$$

$$\beta \xrightarrow{\text{صدق}} \beta^۲+۵\beta+۲=۰ \Rightarrow ۵\beta+۲=-\beta^۲$$

$$\frac{\alpha^۳\beta^۲}{۵\alpha+۲}+\frac{\beta^۳\alpha^۲}{۵\beta+۲}=\frac{\alpha^۳\beta^۲}{-\alpha^۲}+\frac{\beta^۳\alpha^۲}{-\beta^۲}=-\alpha\beta^۲-\beta\alpha^۲=-\alpha\beta(\alpha+\beta)=-(۲)(-۵)=۱۰$$

۷.گزینه ۱ از آنجا که سهمی، محور x ها را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند، لذا معادله‌ی $y=۰$ حداقل یک جواب دارد. لذا $\Delta\geq ۰$. در نتیجه داریم:

$$y=ax^۲+۲(a+۲)x+۲a+۷ \quad , \quad \Delta\geq ۰$$
$$\Delta=۴(a+۲)^۲-۴(a)(۲a+۷)=۴(a^۲+۴a+۴-۲a^۲-۷a)=۴(-a^۲-۳a+۴)\geq ۰$$
$$\Rightarrow a^۲+۳a-۴\leq ۰ \Rightarrow (a-۱)(a+۴)\leq ۰ \Rightarrow -۴\leq a\leq ۱$$

بنابراین مقادیر صحیح قابل قبول برای a برابر است با:

$$a=-۴,-۳,-۲,-۱,۱ \Rightarrow \text{۵ مقدار صحیح}$$

$a=۰$ قابل قبول نیست زیرا در این صورت تابع، به صورت خط در می آید و دیگر سهمی نیست.

۸.گزینه ۱ از عبارت‌های $\alpha^۲+۵\alpha$ و $\beta^۲+۵\beta$ و $x^۲+۵x$ متوجه می‌شویم که باید ریشه‌های معادله را در معادله صدق دهیم.

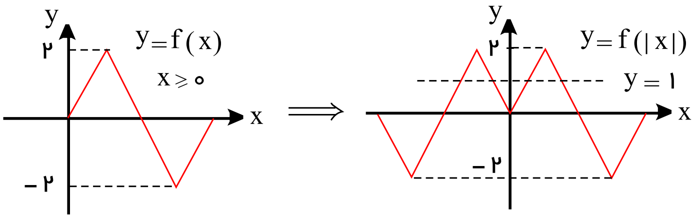
$$\alpha \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \alpha^۲+۵\alpha-۱=۰ \rightarrow \alpha^۲+۵\alpha=۱$$

$$\beta \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} \beta^۲+۵\beta-۱=۰ \rightarrow \beta^۲+۵\beta=۱$$

در ضمن $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۵$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱$ می‌باشد.

$$\frac{\alpha^۳\beta+\alpha\beta^۳}{(\alpha^۲+۵\alpha+۴)(\beta^۲+۵\beta+۷)}=\frac{\alpha\beta(\alpha^۲+\beta^۲)}{(۱+۴)(۱+۷)}$$

$$=\frac{\alpha\beta((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)}{(۵)(۸)}=\frac{-۱(۲۵+۲)}{۴۰}=\frac{-۲۷}{۴۰}$$



۹.گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع $f(|x|)$ را رسم می‌کنیم:

برای رسم $f(|x|)$، قسمت‌هایی از نمودار $f(x)$ را که در آن‌ها $x\geq ۰$ است نگه می‌داریم و سپس قرینه‌ی آن را نسبت به محور عرض‌ها به نمودار $f(x)$ اضافه می‌کنیم.

باتوجه به نمودار تابع $y=f(|x|)$ و $y=۱$، چهار برخورد دارند

بنابراین معادله‌ی $f(|x|)=۱$ چهار ریشه دارد.

۱۰.گزینه ۳

می‌دانیم که $|u^۲|=u^۲$ می‌باشد.

$$(|x-۱|)^۲-۵|x-۱|+۴=۰ \Rightarrow (|x-۱|-۴)(|x-۱|-۱)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} |x-۱|=۱ \Rightarrow x-۱=\pm۱ \Rightarrow x=۲\ ,\ x=۰ \\ |x-۱|=۴ \Rightarrow x-۱=\pm۴ \Rightarrow x=۵\ ,\ x=-۳ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=۰+۲-۳+۵=۴$$

۱۱.گزینه ۲ می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l} ab\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad |a+b|=|a|+|b| \\ ab<۰ \quad \Rightarrow \quad |a+b|<|a|+|b| \end{array}}$$

پس چون مجموع عبارت‌های داخل قدرمطلق‌های سمت چپ تساوی با عبارت داخل قدرمطلق سمت راست تساوی برابر است، بنابراین باید این عبارت‌ها هم‌علامت باشند یا حداقل یکی از آن‌ها صفر شود:

$$(x^2+1)(x-2)\ \ge\ 0 \ \xrightarrow{(x^2+1)>0}\ x-2\ \ge\ 0 \ \Rightarrow x\in[2\,,+\infty)$$

۱۲.گزینه ۱

$$\left|4x^2-3x\right|<\left|2x^2+x\right| \Rightarrow |x(4x-3)|<|x(2x+1)| \Rightarrow |x|\cdot|4x-3|<|x|\cdot|2x+1|$$

چون $|x|$ همواره مثبت است بنابراین می‌توانیم آن را از دو طرف حذف کنیم.

$$\xrightarrow{x\neq 0} |4x-3|<|2x+1| \xrightarrow{2} 16x^2+9-24x<4x^2+1+4x$$

$$\Rightarrow 12x^2-28x+8<0 \to 3x^2-7x+2<0$$

$$\Delta=b^2-4ac=49-4(3)(2)=49-24=25 \Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{7+5}{6}=2 \\ x''=\dfrac{7-5}{6}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & \frac{1}{3} & & 2 & & +\infty \\ \hline \text{عبارت} < 0 & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array} \Rightarrow \frac{1}{3}<x<2 \quad \text{یا} \quad x\in(\frac{1}{3},2)$$

پس $b-a=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$ است.

۱۳.گزینه ۲

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=-2 \Rightarrow -2\le x+\frac{1}{2}<-1 \Rightarrow -2-\frac{1}{2}\le x<-1-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{2}\le x<-\frac{3}{2} \Rightarrow -5\le 2x<-3 \Rightarrow [2x]=-5\ ,\ -4$$

۱۴.گزینه ۳ عدد صحیح از داخل جزء صحیح بیرون می‌آید.

$$f(x)=[1+x]+[1-x]=1+[x]+1+[-x]=2+[x]+[-x]$$

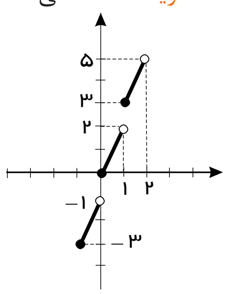
از طرفی می‌دانیم: $[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in Z \\ -1 & x\notin Z \end{cases}$

$$f(x)=2+[x]+[-x] \xrightarrow{x\in Z} f(x)=2+0=2$$

$$f(x)=2+[x]+[-x] \xrightarrow{x\notin Z} f(x)=2-1=1$$

بنابراین کمترین مقدار تابع، برابر یک است.

۱۵.گزینه ۲ کافی است قسمتی از نمودار تابع $y=2x+[x]$ را رسم کنیم.

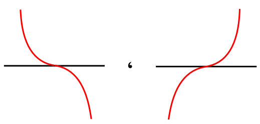
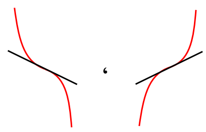


$$-1\le x<0 \xrightarrow{[x]=-1} y=2x-1 \xrightarrow{\text{برای رسم}} \begin{vmatrix}-1\\-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$$

$$0\le x<1 \xrightarrow{[x]=0} y=2x \xrightarrow{\text{برای رسم}} \begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$$

$$1\le x<2 \xrightarrow{[x]=1} y=2x+1 \xrightarrow{\text{برای رسم}} \begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2\\5\end{vmatrix}$$

واضح است که اگر خط افقی $y=2$ را رسم کنیم شکل را قطع نمی‌کند.

۱۶.گزینه ۱ تابع درجه‌ی سوم در حالتی که مشتق دارای ریشه‌ی مضاعف است () و یا ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد () اکیداً یکنوا بوده و در نتیجه یک به یک است پس:

$$y'=x^2-4x+2a \Rightarrow \Delta=16-8a\le 0 \to 8a\ge 16 \Rightarrow a\ge 2$$

۱۷.گزینه ۱ محور yها طولش صفر است یعنی طراح سؤال $f^{-1}(0)$ را خواسته است. نیازی نیست که $f^{-1}(x)$ را تشکیل دهید چون طول تابع معکوس، y تابع اصلی است پس تابع $f(x)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f=0 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{2}{x+1}} \Rightarrow x^2=\frac{2}{x+1} \Rightarrow x^3+x^2-2=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}}$$
$$\Rightarrow x=1$$

۱۸.گزینه ۱

روش اول:

برای به‌دست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$g(x)=2+10^{x-1} \Rightarrow y-2=10^{x-1} \Rightarrow \log_{10}^{y-2}=\log_{10}^{10^{x-1}}$$

$$\Rightarrow x-1=\log_{10}^{y-2} \Rightarrow x=1+\log_{10}^{y-2} \Rightarrow g^{-1}(x)=1+\log(x-2)$$

روش دوم:

در تابع g $x=2 \Rightarrow g(2)=12 \Rightarrow (2,12)\in g \Rightarrow (12,2)\in g^{-1} \Rightarrow$ گزینه‌ی اول

۱۹.گزینه ۴

می‌دانیم $\tan x$ و $\cot x$ عکس یکدیگرند و دو عددی که عکس یکدیگرند فقط وقتی مجموعشان -2 می‌شود که هر کدام -1 باشند.

$$\tan x+\frac{1}{\tan x}=-2 \Rightarrow \tan x=\cot x=-1 \Rightarrow \tan^{4n}x+\cot^{n}x=(-1)^{4n}+(-1)^{n}$$
$$=\begin{cases} \text{زوج } n \to 1+1=2 \\ \text{فرد } n \to 1+(-1)=0 \end{cases}$$

۲۰.گزینه ۱

روش اول:

$$\cos\frac{6\pi}{7}=\cos(\pi-\frac{\pi}{7})=-\cos\frac{\pi}{7}$$
$$\cos\frac{5\pi}{7}=\cos(\pi-\frac{2\pi}{7})=-\cos\frac{2\pi}{7}$$
$$\cos\frac{4\pi}{7}=\cos(\pi-\frac{3\pi}{7})=-\cos\frac{3\pi}{7}$$
$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\ldots+\cos\frac{6\pi}{7}=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+(-\cos\frac{3\pi}{7})+(-\cos\frac{2\pi}{7})+(-\cos\frac{\pi}{7})=0$$

روش دوم: می دانیم: $\boxed{\alpha+\beta=\pi \to \cos\alpha+\cos\beta=0}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}=\pi \to \cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=0 \\ \frac{2\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}=\pi \to \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=0 \\ \frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi \to \cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cdots+\cos\frac{6\pi}{7}=0$$