(B) **۱۶۴- گزینه‌ی ۳** برای محاسبه $a.(b\times c)$ جای بردارهای a و c را با هم عوض می‌کنیم. می‌دانیم این جابه‌جایی ضرب مختلط را منفی می‌کند. پس $a.(b\times c)$ مساوی $-c.(b\times a)$ است. با جابه‌جایی بردارهای a و b خواهیم داشت:

$$a.(b\times c)=c.(a\times b)\xrightarrow{c=a\times b} a.(b\times c)=c.c=|c|^2=4+1+4=9$$

(B) **۱۶۵- گزینه‌ی ۱** ابتدا عبارت $(a-b).[(2a+b)\times(c-a)]$ را ساده می‌کنیم.

$$(a-b).[(2b+c)\times(c-a)]=(a-b).[2b\times c-2b\times a+\underbrace{c\times c}_{0}-c\times a]$$

$$=2a.(b\times c)-\underbrace{2a.(b\times a)}_{0}-\underbrace{a.(c\times a)}_{0}-\underbrace{2b.(b\times c)}_{0}+\underbrace{2b.(b\times a)}_{0}+b.(c\times a)=2a.(b\times c)+b.(c\times a)$$

چون $c=a\times b$، در ضرب‌های مختلط به‌دست آمده جای بردارها را عوض می‌کنیم تا در آن‌ها $a\times b$ ایجاد شود. می‌دانیم با جابه‌جایی بردارها در ضرب مختلط، حاصل‌ضرب منفی می‌شود، پس $2a.(b\times c)$ مساوی $-2c.(b\times a)$ و مساوی $2c.(a\times b)$ است و همچنین $b.(c\times a)$ مساوی $-c.(b\times a)$ و مساوی $c.(a\times b)$ است، بنابراین داریم:

$$(a-b).[(2b+c)\times(c-a)]=2a.(b\times c)+b.(c\times a)=2c.(a\times b)+c.(a\times b)=3c.(a\times b)$$

بنا بر فرض، $c=a\times b$، پس $3c.(a\times b)$ مساوی $3c.c$ یا $3|c|^2$ است، یعنی برابر $3(1+4+1)=18$ می‌باشد. بنابراین حاصل عبارت خواسته‌شده برابر ۱۸ می‌باشد.

(B) **۱۶۶- گزینه‌ی ۳** بردارهای a، b و c بر بردار V عمودند، بنابراین بردارهای a، b و c در یک صفحه قرار دارند، پس حاصل‌ضرب مختلط آن‌ها صفر است، یعنی $a.(b\times c)=0$.

$$b\times c=\begin{bmatrix} m & 3 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}=(7,-1-3m,2m+3)$$

$$a.(b\times c)=(0,1,2).(7,-3m-1,2m+3)=0-3m-1+4m+6=m+5$$

چون $a.(b\times c)=0$ پس داریم:

$$m+5=0\Rightarrow m=-5$$

(B) **۱۶۷- گزینه‌ی ۴** اگر بتوانیم a را به صورت ترکیبی از بردارهای b و c بنویسیم، آن‌گاه بردارهای a، b و c در یک صفحه هستند، بنابراین $a.(b\times c)=0$.

$$a.(b\times c)=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 2 & m\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 1(-5)-2(-4)+m(2)=0\Rightarrow m=-\frac{3}{2}$$

(A) **۱۶۸- گزینه‌ی ۱** هر سه بردار $a\times d$، $b\times d$ و $c\times d$ بر بردار d عمودند. بنابراین این بردارها موازی صفحه‌ی عمود بر d هستند.

(A) **۱۶۹- گزینه‌ی ۲** نقاط A، B، C و D در یک صفحه هستند هرگاه حاصل‌ضرب مختلط پیکان‌های همرس $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ صفر باشد، یعنی $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=0$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(-2,2,-2)\quad,\quad\overrightarrow{AC}=C-A=(2,1,-1)\quad,\quad\overrightarrow{AD}=D-A=(-1,1,m-2)$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & m-2\end{bmatrix}=(m-1,-2m+5,3)$$

$$\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=(-2,2,-2).(m-1,-2m+5,3)=-2m+2-4m+10-6=-6m+6$$

بنا بر آنچه گفته شد، باید $-6m+6$ برابر صفر باشد، پس $m=1$.

(B) **۱۷۰- گزینه‌ی ۳** می‌دانیم بردار $a\times b$ بر صفحه شامل دو بردار a و b عمود است. از طرفی، بنا بر فرض تست، بردار c نیز بر صفحه شامل دو بردار a و b عمود است، پس بردارهای $a\times b$ و c موازی‌اند، بنابراین زاویه‌ی بین بردارهای $a\times b$ و c یا صفر یا ۱۸۰ درجه است. چون همه‌ی گزینه‌ها مثبت هستند، پس زاویه را صفر در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$c.(a\times b)=|c||a\times b|\underbrace{\cos 0}_{1}=|c||a||b|\sin 30^\circ=2\times3\times4\times\frac{1}{2}=12$$

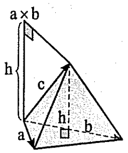
(A) **۱۷۱- گزینه‌ی ۳** حجم متوازی‌السطوحی که با بردارهای a، b و c ساخته می‌شود، برابر $|a.(b\times c)|$ می‌باشد.

$$b\times c=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}=(8,-3,1)\Rightarrow a.(b\times c)=(2,-1,1).(8,-3,1)=16+3+1=20$$

حجم متوازی‌السطوح: $V=|a.(b\times c)|=20$

بنابراین حجم هرم هم‌حجم با این متوازی‌السطوح نیز برابر ۲۰ می‌باشد.

(B) **۱۷۲- گزینه‌ی ۲** با توجه به شکل مقابل اندازه‌ی ارتفاع h را باید تعیین کنیم.



راه‌حل اول: برای این کار ابتدا حجم هرم و سپس مساحت قاعده‌ی آن را تعیین می‌کنیم.

می‌دانیم حجم هرم برابر $\frac{1}{3}Sh$ می‌باشد و به این وسیله می‌توانیم ارتفاع h را به‌دست آوریم:

$$a\times b=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=(-3,-2,1)$$

مساحت قاعده: $S=\frac{1}{2}|a\times b|=\frac{1}{2}\sqrt{9+4+1}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

حجم هرم: $V=\frac{1}{6}|c.(a\times b)|=\frac{1}{6}|(3,1,0).(-3,-2,1)|=\frac{1}{6}|-9-2|=\frac{11}{6}$ ، حجم هرم: $V=\frac{1}{3}Sh\Rightarrow\frac{11}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{14}}{2}h\Rightarrow h=\frac{11}{\sqrt{14}}$

راه‌حل دوم: طول ارتفاع برابر طول تصویر قائم بردار c روی $a\times b$ است، پس:

$$h=\frac{|c.(a\times b)|}{|a\times b|}=\frac{11}{\sqrt{14}}$$

(A) **۱۷۳- گزینه‌ی ۴** با رئوس A، B، C و D پیکان‌های همرس $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ را به‌دست می‌آوریم. در این صورت حجم هرم خواسته شده برابر $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|$ می‌باشد.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,0,-2),\ \overrightarrow{AC}=C-A=(0,4,-2),\ \overrightarrow{AD}=D-A=(-2,0,1)$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\begin{bmatrix}0 & 4 & -2\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}=(4,4,8)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=(0,0,-2).(4,4,8)=-16$$

حجم هرم: $V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

(B) **۱۷۴- گزینه‌ی ۱** برای محاسبه‌ی $|b-c|$ باید زاویه‌ی بین دو بردار b و c را به‌دست آوریم. فرض کنید θ زاویه‌ی بین بردارهای b و c است. طبق فرض تست، $\theta<90^\circ$.

حجم هرم: $V=\frac{1}{6}|a.(b\times c)|\Rightarrow4\sqrt{3}=\frac{1}{6}|a||b\times c|\cos60^\circ\Rightarrow4\sqrt{3}=\frac{1}{6}|a||b||c|\sin\theta\cos60^\circ$

$$\Rightarrow4\sqrt{3}=\frac{1}{6}(4)(4)(6)\sin\theta(\frac{1}{2})\Rightarrow4\sqrt{3}=8\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

حال می‌توانیم $|b-c|$ را به‌دست آوریم.

$$|b-c|=\sqrt{|b|^2+|c|^2-2|b||c|\cos\theta}=\sqrt{16+36-2(4)(6)\cos60^\circ}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$

(A) **۱۷۵- گزینه‌ی ۴** حجم منشور مثلث‌القاعده، نصف حجم متوازی‌السطوح ساخته شده بر روی بردارهای a، b و c است، بنابراین حجم منشور مثلث‌القاعده برابر $\frac{1}{2}|a.(b\times c)|$ می‌باشد.

$$b\times c=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}=(-4,-3,5)\Rightarrow a.(b\times c)=(1,3,-1).(-4,-3,5)=-4-9-5=-18$$

حجم منشور مثلث‌القاعده: $V=\frac{1}{2}|a.(b\times c)|=\frac{1}{2}|-18|=9$

(A) **۱۷۶- گزینه‌ی ۲** می‌دانیم $a\times(b\times c)$ برابر $(a.c)b-(a.b)c$ است و بردار $a\times(b\times c)$ بر بردار a عمود است، پس زاویه‌ی بین دو بردار a و $(c.a)b-(a.b)c$ برابر ۹۰ درجه است.

Ⓑ **۱۷۷- گزینه‌ی (۳)** ابتدا بردار $(a\times b)\times c$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a\times b=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}=(2,4,1)$$

$$(a\times b)\times c=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=(-4,3,-4)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مؤلفه‌های x و z در بردار $(a\times b)\times c$ برابر یک‌دیگرند، پس این بردار با محورهای x و z زوایای مساوی می‌سازد و برداری که با محورهای x و z زوایای مساوی می‌سازد، با صفحات yoz و xoy هم زاویه‌های برابر خواهد ساخت.

توجه: در این تست می‌توانستیم $(a\times b)\times c$ را از رابطه‌ی $(a.c)b-(b.c)a$ نیز به‌دست آوریم.

Ⓑ **۱۷۸- گزینه‌ی (۳)** از رابطه‌ی $a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c$ استفاده می‌کنیم و همچنین از آن‌جا که a بر b عمود است، داریم:

$$a\times(a\times b)=\underbrace{(a.b)}_{0}a-(a.a)b=-|a|^2b=-3b$$

بنا بر فرض $a\times(a\times b)$، مساوی $(-2,3,-6)$ است، پس داریم:

$$-3b=(-2,3,-6)\Rightarrow b=(\frac{2}{3},-1,2)$$

Ⓑ **۱۷۹- گزینه‌ی (۲)** **راه‌حل اول:** از رابطه‌ی $a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c$ استفاده و عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

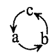
$$a\times(b\times c)-b\times(a\times c)-c\times(a\times b)=(a.c)b-\cancel{(a.b)}c-(b.c)a+\cancel{(b.a)}c-(c.b)a+(c.a)b$$

$$=2(a.c)b-2(b.c)a=2((a.c)b-(b.c)a)=2(a\times b)\times c$$

توجه کنید که از تساوی $(a\times b)\times c=(a.c)b-(b.c)a$ استفاده شده است.

راه‌حل دوم: می‌توانستیم با استفاده از نکته‌ی زیر نیز مسأله را حل کنیم:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$$



Ⓑ **۱۸۰- گزینه‌ی (۱)** **راه‌حل اول:** از تساوی $a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c$ استفاده و عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)=(a.c)b-\cancel{(a.b)}c+\cancel{(b.a)}c-(b.c)a=(a.c)b-(b.c)a=c\times(b\times a)$$

از طرفی می‌دانیم اگر $a+b+c=0$، آن‌گاه $a\times b=b\times c=c\times a$. بنابراین $b\times a=-b\times c$، پس داریم:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)=c\times(b\times a)=c\times(-b\times c)=-c\times(b\times c)$$

راه‌حل دوم: برای سه بردار a، b و c داریم:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$$

پس با توجه به این تساوی:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)=-c\times(a\times b)\quad(1)$$

از طرفی طبق رابطه‌ی $a+b+c=0$ داریم:

$$a\times b=b\times c=c\times a\quad(2)$$

حال از روابط (۱) و (۲):

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)=-c\times(b\times c)$$

Ⓑ **۱۸۱- گزینه‌ی (۱)** از تساوی $(a\times b)\times c=(a.c)b-(b.c)a$ استفاده می‌کنیم. داریم:

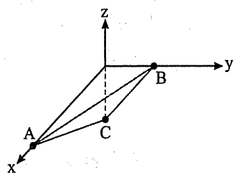
$$a.((a\times b)\times c)=a.((a.c)b-(b.c)a)=(a.c)(a.b)-(b.c)(a.a)$$

$$=(\underbrace{|a|}_{1}\underbrace{|c|}_{1}\cos 60^\circ)(\underbrace{|a|}_{1}\underbrace{|b|}_{1}\cos 60^\circ)-(\underbrace{|b|}_{1}\underbrace{|c|}_{1}\cos 60^\circ)(\underbrace{|a|^2}_{1})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

Ⓐ **۱۸۲- گزینه‌ی (۴)** بردار $a\times b$ بر صفحه‌ی شامل بردارهای a و b عمود است. بردار $a+b$ نیز در این صفحه قرار دارد، پس $a\times b$ بر $a+b$ عمود است. در نتیجه همواره داریم: $(a+b).(a\times b)=0$ و به مقدار m ربطی ندارد.

تذکر سؤال اشکال علمی دارد. حاصل‌ضرب داخلی دو بردار یک عدد است، نه یک بردار و ذکر کلمه‌ی «اندازه‌ی بردار» در صورت سؤال نادرست است.

Ⓑ **۱۸۳- گزینه‌ی (۴)** ابتدا مختصات A، B و C را به‌دست می‌آوریم سپس از فرمول $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ مساحت مثلث را محاسبه می‌کنیم. داریم:



$$A\xrightarrow{y=z=0}x+2\times0-2\times0=4\Rightarrow x=4\Rightarrow A(4,0,0)$$: محل برخورد صفحه با محور x ها

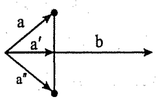
$$B\xrightarrow{x=z=0}0+2y-2\times0=4\Rightarrow y=2\Rightarrow B=(0,2,0)$$: محل برخورد صفحه با محور y ها

$$C\xrightarrow{x=y=0}0+2\times0-2z=4\Rightarrow z=-2\Rightarrow C=(0,0,-2)$$: محل برخورد صفحه با محور z ها

با معلوم بودن مختصات A، B و C مساحت به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-4,2,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-4,0,-2)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-4,-8,8)\Rightarrow|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{144}=12\xrightarrow{S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}S=6$$

Ⓐ **۱۸۴- گزینه‌ی (۱)** اگر a'' قرینه‌ی بردار a نسبت به امتداد بردار b و a' تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار b باشد، داریم:



$$a''=2a'-a=2(\frac{a.b}{|b|^2})b-a$$

حال با فرض $a=(1,-3,2)$ و $b=(1,2,0)$ داریم:

$$a''=2(\frac{1-6}{1+4})(1,2,0)-(1,-3,2)=(-2)(1,2,0)-(1,-3,2)=(-3,-1,-2)$$

روش تستی: همواره بردار قرینه و بردار اولیه، هم طول می‌باشند یعنی $|\vec{a}''|=|\vec{a}|$، پس داریم:

$$|\vec{a}''|=|\vec{a}|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$$

از میان گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی (۱) هم‌طول با بردار $\vec{a}$ می‌باشد.

Ⓑ **۱۸۵- گزینه‌ی (۲)** از عمود بودن $a+b$ بر $a-b$ نتیجه می‌گیریم:

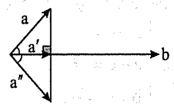
$$(a+b).(a-b)=0\Rightarrow|a|^2-|b|^2=0\Rightarrow|a|=|b|$$

$$\begin{cases}|a|=\sqrt{1+(\alpha+1)^2+4\alpha^2}\\ |b|=\sqrt{5}\end{cases}\xrightarrow{|a|=|b|}5\alpha^2+2\alpha+2=5\Rightarrow5\alpha^2+2\alpha-3=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \alpha=0/6\end{cases}$$

Ⓐ **۱۸۶- گزینه‌ی (۴)** با توجه به فرض‌های مسأله داریم: $\overrightarrow{AB}=(1,2,-2)$ و $\overrightarrow{AC}=(-4,4,-2)$. حال مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|(4,10,12)|=\frac{1}{2}\sqrt{16+100+144}=\sqrt{65}$$

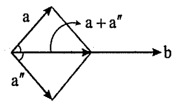
Ⓑ **۱۸۷- گزینه‌ی (۳)** در شکل $\vec{a}''$ قرینه‌ی بردار $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$ می‌باشد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود $\vec{a}$ نیز قرینه‌ی $\vec{a}''$ نسبت به $\vec{b}$ است. پس کافی است قرینه‌ی $\vec{a}''$ نسبت به $\vec{b}$ را از رابطه‌ی زیر به‌دست آوریم:



$$\vec{a}=2\vec{a}'-\vec{a}''=2(\frac{\vec{a}''.\vec{b}}{|b|^2})\vec{b}-\vec{a}''\qquad(1)$$

حال با فرض $\vec{a}''=(1,-2,5)$ و $\vec{b}=(2,-1,1)$ و با استفاده از رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$\vec{a}=2(\frac{2+2+5}{4+1+1})(2,-1,1)-(1,-2,5)=3(2,-1,1)-(1,-2,5)=(5,-1,-2)$$



روش تستی: با توجه به شکل، $\vec{a}+\vec{a}''$ هم‌راستا با بردار b است پس باید مضرب $\vec{b}$ باشد و در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (۳) این ویژگی را دارد. داریم:

$$\vec{a}+\vec{a}''=(1,-2,5)+(5,-1,-2)=(6,-3,3)=3\vec{b}$$