آزمون ۱۲

۱- گزینه‌ی (۴) اگر مبدأ مختصات را به رأس یک سهمی قائم منتقل کنیم، آن‌گاه معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=ax^2$ درمی‌آید.

$$y=2x^2-8x \Rightarrow y=2(x^2-4x) \Rightarrow y=2[(x-2)^2-4] \Rightarrow y=2(x-2)^2-8 \Rightarrow 2(x-2)^2=y+8 \Rightarrow (x-2)^2=\frac{1}{2}(y+8)$$

رأس این سهمی $S(2,-8)$ است و این نقطه در ناحیه چهارم قرار دارد.

۲- گزینه‌ی (۱) معادله‌ی داده شده سهمی است هرگاه $b^2-4ac=0$ باشد.

$$b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4(1)(m)=0 \Rightarrow 12-4m=0 \Rightarrow m=3$$

۳- گزینه‌ی (۱) در معادله‌ی داده شده $b^2-4ac=1+8=9>0$ پس این معادله یا هذلولی یا دو خط متقاطع است. برای آن‌که هذلولی نباشد باید مرکز معادله در آن صدق کند.

$$\begin{cases} f'_x=0 \Rightarrow 2x+y+4=0 \\ f'_y=0 \Rightarrow x-4y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+4y+16=0 \\ x-4y-7=0 \end{cases} \Rightarrow 9x+9=0 \Rightarrow x=-1,\ y=-2 \Rightarrow O(-1,-2)$$

$$f(O)=0 \Rightarrow 1+2-8-4+14-m=0 \Rightarrow m=5$$

۴- گزینه‌ی (۴) زاویه‌ی دوران از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\tan 2\theta=\frac{b}{a-c} \xrightarrow{\theta=60^\circ} \tan 120^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{m+2} \Rightarrow -\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{m+2} \Rightarrow m=-4$$

۵- گزینه‌ی (۳) زاویه‌ی دوران از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}=\frac{-12}{17-8}=\frac{-12}{9}=-\frac{4}{3}$$

$$1+\tan^2 2\theta=\frac{1}{\cos^2 2\theta} \Rightarrow 1+\frac{16}{9}=\frac{1}{\cos^2 2\theta} \Rightarrow \cos^2 2\theta=\frac{9}{25} \Rightarrow \cos 2\theta=\frac{-3}{5}$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{2}=\frac{1}{5} \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

دقت کنید که چون $\tan 2\theta$ منفی شده است پس 2θ در ناحیه‌ی دوم قرار دارد و کسینوس آن نیز منفی است.

۶- گزینه‌ی (۲) به‌طور کلی معادله‌ی $ax^2+bxy+cy^2=f$ هیچ‌گاه نمی‌تواند سهمی باشد زیرا اگر $b^2-4ac=0$ شود معادله‌ی فوق به‌صورت $(mx+ny)^2=f$ درمی‌آید که بسته به علامت f می‌تواند تهی یا یک خط یا دو خط موازی باشد.

۷- گزینه‌ی (۲) بین ضرایب معادلات قبل و بعد از دوران محورها به شرط آن‌که اعداد ثابت آن‌ها برابر باشند رابطه‌های زیر برقرار است.

$$5x^2+my^2-nxy=8$$

$$x'^2+4y'^2=4 \xrightarrow{\times 2} 2x'^2+8y'^2=8$$

$$1)\ \ a+c=A+C \Rightarrow 5+m=2+8 \Rightarrow m=5$$

$$2)\ \ b^2-4ac=B^2-4AC \Rightarrow n^2-4(5)(m)=0-4(2)(8) \xrightarrow{m=5} n^2-100=-64 \Rightarrow n^2=36 \Rightarrow n=\pm 6$$

دقت کنید که تنها $n=6$ قابل قبول است (چرا؟)، پس معادله به‌صورت $5x^2+5y^2-6xy=8$ درمی‌آید.

$$\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}=\frac{-6}{5-5}=\frac{-6}{0} \Rightarrow 2\theta=90^\circ \Rightarrow \theta=45^\circ$$

۸- گزینه‌ی (۲) اگر زاویه‌ی دوران 45° باشد، باید ضرایب x^2 و y^2 در معادله‌ی قبل از دوران محورها مساوی هم باشند پس گزینه‌ی (۴) که این ویژگی را ندارد نادرست است. از طرفی در گزینه‌های (۱) و (۳) ابتدا طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم زیرا باید اعداد ثابت در معادله‌ی جدید و قدیم برابر باشند.

گزینه‌ی (۱): $3x^2+3y^2-10xy=2 \xrightarrow{\div 2} \frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2-5xy=1$

$$a+c=A+C \Rightarrow \frac{3}{2}+\frac{3}{2}=1-4$$ نادرست

گزینه‌ی (۳): $۵x^۲+۵y^۲-۱۰xy=۲ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۵}{۲}x^۲+\frac{۵}{۲}y^۲-۵xy=۱$

$a+c=A+C \Rightarrow \frac{۵}{۲}+\frac{۵}{۲}=۱-۴$ نادرست

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

۹- گزینه‌ی ۴ اگر θ زاویه‌ی مناسب برای دوران محورها باشد، آن‌گاه $\tan\theta$ شیب محور تقارن است.

$$\tan ۲\theta=\frac{b}{a-c}=\frac{-۳}{۴}$$

$$\tan ۲\theta=\frac{۲\tan\theta}{۱-\tan^۲\theta} \Rightarrow -\frac{۳}{۴}=\frac{۲\tan\theta}{۱-\tan^۲\theta} \Rightarrow ۳-۳\tan^۲\theta=-۸\tan\theta \Rightarrow ۳\tan^۲\theta-۸\tan\theta-۳=۰$$

$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{۸\pm\sqrt{۶۴+۳۶}}{۶}=\frac{۸\pm۱۰}{۶} \Rightarrow \begin{cases} \tan\theta=\frac{۸+۱۰}{۶}=۳ \Rightarrow y=۳x & \text{محور تقارن} \\ \tan\theta=\frac{۸-۱۰}{۶}=\frac{-۱}{۳} \Rightarrow y=\frac{-۱}{۳}x & \text{محور تقارن} \end{cases}$$

خط $۳y+x=۰$ در بین گزینه‌ها وجود دارد.

۱۰- گزینه‌ی ۳ اگر اعداد ثابت دو معادله برابر باشند، باید روابط زیر بین ضرایب برقرار باشد.

$۲x^۲-xy+۲y^۲=۱۵ \Rightarrow a+c=۲+۲=۴$

گزینه‌ی (۱): $۵y^۲+۳x^۲=۱۵ \Rightarrow A+C=۵+۳=۸$ نادرست

گزینه‌ی (۲): $۵x^۲+۳y^۲=۱۵ \Rightarrow A+C=۵+۳=۸$ نادرست

گزینه‌ی (۳): $۵y^۲+۳x^۲=۳۰ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۵}{۲}y^۲+\frac{۳}{۲}x^۲=۱۵ \Rightarrow A+C=\frac{۵}{۲}+\frac{۳}{۲}=۴$ درست

گزینه‌ی (۴): $۵x^۲+۲y^۲=۳۰ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۵}{۲}x^۲+y^۲=۱۵ \Rightarrow A+C=\frac{۵}{۲}+۱=\frac{۷}{۲}$ نادرست

۱۱- گزینه‌ی ۳ در هذلولی کم‌ترین مقدار $MF+MF'$ برابر $۲c$ می‌باشد. پس باید با دوران محورها مقطع داده شده را به‌صورت استاندارد بنویسیم تا $۲c$ را به‌دست آوریم.

$$a=c \Rightarrow \theta=۴۵^\circ \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'-\frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \\ y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \end{cases}$$

این مقادیر را به‌جای این‌که در معادله $x^۲-۳xy+y^۲=۱$ قرار دهیم در مساوی آن $(x-y)^۲-xy=۱$ قرار می‌دهیم تا محاسبات ساده‌تر شود.

$$(-\sqrt{۲}y')^۲-\frac{x'^۲}{۲}+\frac{y'^۲}{۲}=۱ \Rightarrow ۲y'^۲-\frac{x'^۲}{۲}+\frac{y'^۲}{۲}=۱ \xrightarrow{\times ۲} ۴y'^۲-x'^۲+y'^۲=۲ \Rightarrow ۵y'^۲-x'^۲=۲ \Rightarrow \frac{y'^۲}{\frac{۲}{۵}}-\frac{x'^۲}{۲}=۱$$

$$\left.\begin{aligned} a^۲&=\frac{۲}{۵} \\ b^۲&=۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow c^۲=a^۲+b^۲ \Rightarrow \frac{۲}{۵}+۲=\frac{۱۲}{۵} \Rightarrow c=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}} \Rightarrow ۲c=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}}$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ ابتدا به کمک دوران محورها معادله‌ی داده را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a=۱ \\ c=۱ \end{cases} \Rightarrow \theta=۴۵^\circ \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'-\frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \\ x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \end{cases}$$

این مقادیر را به‌جای آن‌که در معادله $x^۲-xy+y^۲=۳$ قرار دهیم در مساوی آن $(x-y)^۲+xy=۳$ که ساده‌تر است جایگزین کنیم.

$$(-\sqrt{۲}y')^۲+\frac{x'^۲}{۲}-\frac{y'^۲}{۲}=۳ \Rightarrow ۲y'^۲+\frac{x'^۲}{۲}-\frac{y'^۲}{۲}=۳ \Rightarrow ۳y'^۲+x'^۲=۶ \Rightarrow \frac{y'^۲}{۲}+\frac{x'^۲}{۶}=۱$$

معادله‌ی فوق یک بیضی است.

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{2}{6}}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ در هذلولی فاصله مرکز تا یکی از کانون‌ها برابر c می‌باشد پس لازم است با دوران محورها معادله‌ی داده شده را به‌صورت استاندارد بنویسیم ولی در این تست $\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}=\frac{8}{6}$ محاسبات را خیلی پیچیده می‌کند در این‌جا بهتر است به‌صورت زیر عمل کنیم.

فرض کنیم شکل استاندارد معادله $2x^2+8xy-4y^2=1$ به‌صورت $Ax'^2+Cy'^2=1$ باشد داریم:

$$A+C=a+c\Rightarrow A+C=2-4\Rightarrow A+C=-2$$

$$B^2-4AC=b^2-4ac\Rightarrow 0-4AC=64-4(2)(-4)\Rightarrow -4AC=96\Rightarrow AC=-24$$

دو عدد که ضرب آن‌ها -24 و جمع آن‌ها -2 است برابر $A=4$ و $C=-6$ است. پس معادله جدید به شکل $4x'^2-6y'^2=1$ می‌باشد.

$$4x'^2-6y'^2=1\Rightarrow \frac{x'^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y'^2}{\frac{1}{6}}=1$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2=\frac{1}{4} \\ b^2=\frac{1}{6} \end{array}\right\}\Rightarrow c^2=a^2+b^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{15}}{6}$$

پس c مساوی $\frac{1}{6}$ عدد $\sqrt{15}$ می‌باشد.

۱۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا معادله‌ی داده شده را به کمک دوران محورها به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$a=c=2\Rightarrow \theta=45^\circ\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

این مقادیر را به‌جای آن‌که در معادله $2x^2+xy+2y^2=3$ قرار دهیم به‌خاطر سادگی در معادله‌ی مساوی آن $(\sqrt{2}x+\sqrt{2}y)^2-3xy=3$ یا $2(x+y)^2-3xy=3$ قرار می‌دهیم.

$$2(\sqrt{2}x')^2-3\left(\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}\right)=3\Rightarrow 4x'^2-\frac{3}{2}x'^2+\frac{3}{2}y'^2=3\xrightarrow{\times 2}5x'^2+3y'^2=6\Rightarrow \frac{x'^2}{\frac{6}{5}}+\frac{y'^2}{2}=1$$

معادله‌ی فوق بیضی است و در بیضی مجموع فواصل M از دو کانون برابر $2a$ است.

$$a^2=2\Rightarrow a=\sqrt{2}\Rightarrow 2a=2\sqrt{2}$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ در این مقطع مخروطی $b^2-4ac=4-4=0$ پس این مقطع سهمی است و در سهمی فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر $|2a|$ می‌باشد. به کمک دوران محورها معادله‌ی داده شده را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$a=c\Rightarrow \theta=45^\circ\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$

این مقادیر را به‌جای آن‌که در معادله $x^2-2xy+y^2-8x-8y=4$ قرار دهیم به‌خاطر سادگی در مساوی آن یعنی معادله $(x-y)^2-8(x+y)=4$ جایگزین می‌کنیم.

$$(-\sqrt{2}y')^2-8(\sqrt{2}x')=4\Rightarrow 2y'^2-8\sqrt{2}x'=4\Rightarrow y'^2=4\sqrt{2}x'+2\Rightarrow y'^2=4\sqrt{2}\left(x'+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

در این سهمی $4a=4\sqrt{2}$ پس $2a=2\sqrt{2}$ است.

آزمون ۱۳

۱- گزینه‌ی ۲

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$A^{۲۰}=(A^{۳})^{۶}A^{۲}=(I)^{۶}A^{۲}=A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

۲- گزینه‌ی ۲

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۷ & ۸\end{bmatrix}$$

$$A^{۶}=A^{۳}\times A^{۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۷ & ۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۷ & ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۶۳ & ۶۴\end{bmatrix}$$

$$A^{۹}=A^{۶}\times A^{۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۶۳ & ۶۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۷ & ۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۶۳+۷\times۶۴ & ۸\times۶۴\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های $A^{۹}=۱+۶۳+۷\times۶۴+۸\times۶۴=۱۶\times۶۴=۱۰۲۴$

۳- گزینه‌ی ۳

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ ۶ & ۶\end{bmatrix}$$

$$A^{۴}=A^{۲}\times A^{۲}=\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ ۶ & ۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۳\\ ۶ & ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۷ & ۲۷\\ ۵۴ & ۵۴\end{bmatrix}$$

$$A^{۵}=A^{۴}\times A=\begin{bmatrix}۲۷ & ۲۷\\ ۵۴ & ۵۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸۱ & ۸۱\\ ۱۶۲ & ۱۶۲\end{bmatrix}$$

جمع درایه‌های ستون اول $A^{۵}=۸۱+۱۶۲=۲۴۳$

۴- گزینه‌ی ۴ ماتریس A را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$A=\frac{A+A^{t}}{۲}+\frac{A-A^{t}}{۲}$$

$$A=\frac{۱}{۲}\left(\begin{bmatrix}۱ & ۲ & a\\ ۰ & ۱ & ۱\\ b & -c & ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰ & b\\ ۲ & ۱ & -c\\ a & ۱ & ۰\end{bmatrix}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\begin{bmatrix}۱ & ۲ & a\\ ۰ & ۱ & ۱\\ b & -c & ۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰ & b\\ ۲ & ۱ & -c\\ a & ۱ & ۰\end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱}{۲}\underbrace{\begin{bmatrix}۲ & ۲ & a+b\\ ۲ & ۲ & ۱-c\\ a+b & ۱-c & ۰\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس متقارن}}+\frac{۱}{۲}\underbrace{\begin{bmatrix}۰ & ۲ & a-b\\ -۲ & ۰ & ۱+c\\ b-a & -c-۱ & ۰\end{bmatrix}}_{\text{ماتریس پادمتقارن}}$$

جمع درایه‌های ماتریس متقارن $=\frac{۱}{۲}(۱۰+۲a+۲b-۲c)\xrightarrow{a+b-c=۱۱}$ جمع درایه‌ها $=\frac{۱}{۲}(۱۰+۲۲)=۱۶$

$\frac{1}{2}(0)=0=$ جمع درایه‌های ماتریس پادمتقارن

۵- گزینه‌ی ۱ ابتدا حاصل‌ضرب را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 3 & x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ x \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4+x & -1 & 7-2x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ x \end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 4+x-10+7x-2x^2=0 \Rightarrow 2x^2-8x+6=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=-\frac{b}{a}=4$$

۶- گزینه‌ی ۳ بنابر فرض $A=\begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{bmatrix}$ پس $A-B=\begin{bmatrix} 0 & a & a \\ -a & 0 & a \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix}$

دیده می‌شود $A-B$ ماتریس پادمتقارن است.

۷- گزینه‌ی ۲ در ماتریس پادمتقارن درایه‌های روی قطر اصلی صفر و درایه‌های بالا و پایین قطر نظیر به نظیر قرینه‌اند.

$k^3-k=0 \Rightarrow k(k^2-1)=0 \Rightarrow k=0$ یا $k=1$ یا $k=-1$

$k^3=k^2 \Rightarrow k^2(k-1)=0 \Rightarrow k=0$ یا $k=1$

اشتراک این مقادیر $k=0$ و $k=1$ می‌باشد پس به ازای دو مقدار k ماتریس پادمتقارن است.

۸- گزینه‌ی ۴ گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم و می‌دانیم $A^t=A$ و $B^t=-B$ داریم:

گزینه‌ی (۱): $(AB+BA)^t=(AB)^t+(BA)^t=B^tA^t+A^tB^t=-BA-AB=-(AB+BA)$ پادمتقارن

گزینه‌ی (۲): $(AB-BA)^t=(AB)^t-(BA)^t=B^tA^t-A^tB^t=-BA+AB=AB-BA$ متقارن

گزینه‌ی (۳): $(ABA)^t=A^tB^tA^t=-ABA$ پادمتقارن است

گزینه‌ی (۴): $(A+B)^t=A^t+B^t=A-B$ نه متقارن و نه پادمتقارن است

۹- گزینه‌ی ۴ ماتریس $B(C^tA)^t$ را بر حسب AB^t و C^t باید بنویسیم:

$$B(C^tA)^t=B(A^tC)=(BA^t)C=\left[C^t(BA^t)^t\right]^t=\left[C^t(AB^t)\right]^t$$

$$C^t(AB^t)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ x & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ? & ? \\ -2-3x & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \Rightarrow \left[C^t(AB^t)\right]^t=\begin{bmatrix} ? & -2-3x & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

$$-2-3x=9 \Rightarrow -3x=11 \Rightarrow x=\frac{-11}{3}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ A ماتریس قطری است پس برای محاسبه‌ی A^{1395} کافیست درایه‌های روی قطر را به توان ۱۳۹۵ برسانیم.

$$A^{1395}=\begin{bmatrix} 1^{1395} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{1395} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{1395} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=-1$$

۱۱- گزینه‌ی ۱ به‌جای B مقدار $I-A$ را جایگزین می‌کنیم:

$$A^2+AB+B=A^2+A(I-A)+I-A=A^2+A-A^2+I-A=I$$

۱۲- گزینه‌ی ۳ اگر A و B ماتریس‌های مربعی باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی AB با مجموع درایه‌های قطر اصلی BA برابر خواهد شد، بنابراین در ماتریس $AB-BA$ مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر صفر است و در بین گزینه‌ها فقط ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های قطر اصلی در آن برابر صفر می‌باشد.

۱۳- گزینه‌ی ۳ ابتدا ماتریس‌های $A^۴$ و $A^۵$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^۲=۳A-۲I \xrightarrow{\text{به توان ۲}} A^۴=۹A^۲+۴I-۱۲A \xrightarrow{A^۲=۳A-۲I} A^۴=۹(۳A-۲I)+۴I-۱۲A$$

$$\Rightarrow A^۴=۱۵A-۱۴I \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در } A \text{ ضرب}} A^۵=۱۵A^۲-۱۴A \xrightarrow{A^۲=۳A-۲I} A^۵=۱۵(۳A-۲I)-۱۴A \Rightarrow A^۵=۳۱A-۳۰I$$

بنابر فرض تست داریم:

$$A^۵-A^۴=k(A-I)\Rightarrow(۳۱A-۳۰I)-(۱۵A-۱۴I)=k(A-I)\Rightarrow ۱۶A-۱۶I=k(A-I)\Rightarrow ۱۶(A-I)=k(A-I)\Rightarrow k=۱۶$$

۱۴- گزینه‌ی ۳ از فرض $A^۲=A$ نتیجه می‌گیریم A خود توان است و به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $A^n=A$.

$$(۲A-I)^۲=۴A^۲+I-۴A=۴A+I-۴A=I$$

$$(۲A-I)^{۲۵}=[(۲A-I)^۲]^{۱۲}(۲A-I)=I^{۱۲}(۲A-I)=۲A-I$$

۱۵- گزینه‌ی ۴ از فرض $AB+۲BA=0$ نتیجه می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB+۲BA=0 \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}A]{\text{از چپ در}} A^۲B+۲ABA=0\Rightarrow A^۲B=-۲ABA \\ AB+۲BA=0 \xrightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}A]{\text{از راست در}} ABA+۲BA^۲=0\Rightarrow ۲BA^۲=-ABA \end{array}\right\}\Rightarrow A^۲B=۴BA^۲$$

آزمون ۱۴

۱- گزینه‌ی ۲ ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix}_{۲\times ۳} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} \end{bmatrix}_{۳\times ۲} \Rightarrow B=-\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱۸ & -۱۶ \\ ۱ & -۵ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=-۳۸$$

۲- گزینه‌ی ۲ حاصل‌ضرب دو ماتریس بالا مثلثی یک ماتریس بالا مثلثی است.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

به استقراء می‌توان نتیجه گرفت $A^{n}=\begin{bmatrix} ۱ & n & n \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ داریم:

$$A^{۱۰}-A^{۹}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱۰ & ۱۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۱ & ۹ & ۹ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۳- گزینه‌ی ۱ ابتدا ماتریس $B^{t}A^{t}C$ را بر حسب AB و C^{t} بازنویسی می‌کنیم:

$$B^{t}A^{t}C=(B^{t}A^{t})C=(AB)^{t}C=\left[C^{t}(AB)\right]^{t}$$

حالا ماتریس‌های AB و C^{t} را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=[i-j]_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad C^{t}=[j-i]_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ -۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B^{t}A^{t}C_{\text{درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم}}=\left[C^{t}(AB)\right]^{t}_{\text{درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم}}$$

$$=C^{t}(AB)_{\text{درایه‌ی سطر سوم و ستون دوم}}=\begin{bmatrix} -۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}=۲$$

۴- گزینه‌ی ۱ ابتدا ماتریس $(BCB^{t})^{t}A$ را بر حسب ماتریس‌های $A^{t}B$ و CB^{t} می‌نویسیم:

$$(BCB^{t})^{t}A=(BC^{t}B^{t})A=(BC^{t})(B^{t}A)=(CB^{t})^{t}(A^{t}B)^{t}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ x & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ? & ? \\ x+۲ & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \Rightarrow x+۲=۳ \Rightarrow x=۱$$

۵- گزینه‌ی ۳ ماتریس‌های A و B پادمتقارن هستند پس $A^t=-A$ و $B^t=-B$، از طرفی AB متقارن است پس داریم:

$$(AB)^t=AB\Rightarrow B^tA^t=AB\Rightarrow(-B)(-A)=AB\Rightarrow BA=AB\Rightarrow AB-BA=0$$

۶- گزینه‌ی ۳

$$A^2=\begin{bmatrix}1&3\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-3\\1&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}-2&-3\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

$$A^{1394}=(A^3)^{464}\times A^2=I^{464}\times A^2=A^2=\begin{bmatrix}-2&-3\\1&1\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطری اصلی این ماتریس برابر ۱- می‌باشد.

۷- گزینه‌ی ۴

$$A^2=\begin{bmatrix}a&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2-1&-a\\a&-1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}a^2-1&-a\\a&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^3-2a&-a^2+1\\a^2-1&-a\end{bmatrix}$$

$$A^3=I\Rightarrow\begin{bmatrix}a^3-2a&-a^2+1\\a^2-1&-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a^3-2a=1\Rightarrow a=-1\\-a^2+1=0\Rightarrow a=\pm1\\-a=1\Rightarrow a=-1\end{cases}$$

پس $a=-1$ جواب می‌باشد. بنابراین $A^2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-1\end{bmatrix}$.

۸- گزینه‌ی ۳ هر ماتریس مربعی A را می‌توان به‌صورت $\frac{A+A^t}{2}+\frac{A-A^t}{2}$ نوشت به‌طوری که $\frac{A-A^t}{2}$ پادمتقارن است. پس با توجه به رابطه‌ی $A=B-C$ می‌توان نتیجه گرفت $\frac{A-A^t}{2}=-C$.

$$A^t=\begin{bmatrix}-2&0&3\\1&1&0\\-1&2&2\end{bmatrix}\Rightarrow A-A^t=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\0&1&2\\3&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&0&3\\1&1&0\\-1&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-4\\-1&0&2\\4&-2&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\frac{A-A^t}{2}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&-2\\-\frac{1}{2}&0&1\\2&-1&0\end{bmatrix}=-C\Rightarrow C=\begin{bmatrix}0&-\frac{1}{2}&2\\\frac{1}{2}&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌های ستون دوم}=\frac{-1}{2}+0+1=\frac{1}{2}$$

۹- گزینه‌ی ۳ از رابطه‌ی $(A+A^t)^t=2A$ نتیجه می‌گیریم $A^t+A=2A$ پس $A^t=A$ داریم:

گزینه ی (۱): $(A^t+nA)^t=(A+nA)^t=((n+1)A)^t=(n+1)A^t=(n+1)A$

گزینه ی (۲): $A^t=A\Rightarrow$ A متقارن است

گزینه ی (۳): $(A^t-2A)^t=A-2A^t=A-2A=-A$

پس گزینه‌ی (۳) نادرست است درضمن درستی گزینه‌ی (۴) واضح می‌باشد.

۱۰- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1+\tan^2\alpha\\ \cos^2\alpha & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1+\tan^2\alpha\\ \cos^2\alpha & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

بنابراین $A^8=(A^2)^4=I^4=I$ و $A^7=(A^2)^3\times A=I^3\times A=A$ پس $A^7+A^8=A+I$.

۱۱- گزینه‌ی ۴ چون $A^2=O$ پس $A^3=O$ داریم:

$$(2A-I)^3=\underbrace{(2A)^3}_{O}-3\underbrace{(2A)^2}_{O}(I)+3(-I)^2(2A)-I^3=6A-I$$

۱۲- گزینه‌ی ۱ ماتریسی که هم متقارن و هم پادمتقارن است ماتریس صفر است پس $2AB^2-BA=O$ بنابراین $BA=2AB^2$ داریم:

$$B^3A=B^2(BA)=B^2(2AB^2)=2B(BA)B^2=2B(2AB^2)B^2=4(BA)B^4=4(2AB^2)B^4=8AB^6\Rightarrow k+1=8\Rightarrow k=7$$

۱۳- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم ماتریس $A+A^t$ همواره متقارن است از طرفی بنابر فرض $A+A^t$ پادمتقارن است پس ماتریس $A+A^t$ صفر می‌باشد.

$A+A^t=O\Rightarrow A^t=-A\Rightarrow$ پادمتقارن است A

۱۴- گزینه‌ی ۴

متقارن است $A-B\Rightarrow(A-B)^t=A-B\Rightarrow A^t-B^t=A-B$

از طرفی بنابر فرض تست $A^t-B^t=B-A$ بنابراین $A-B=B-A$ یعنی $A=B$ داریم:

$A^2-BA=A^2-A^2=O$

۱۵- گزینه‌ی ۱ ماتریس A پادمتقارن است پس $A^t=-A$ داریم:

$AA^t=2I\Rightarrow -A^2=2I\Rightarrow A^2=-2I$

چون A ماتریس پادمتقارن از مرتبه ۲ است پس فرض می‌کنیم $A=\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}$ داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a^2 & 0\\ 0 & -a^2\end{bmatrix}\xrightarrow{A^2=-2I}\begin{bmatrix}-a^2 & 0\\ 0 & -a^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow a^2=2\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$$

پس $A=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$ یا $A=\begin{bmatrix}0 & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$ درنتیجه $(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2=4$.

آزمون ۱۵

۱- گزینه‌ی ۲

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ ۲y \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x=x' \\ ۲y=y' \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=x' \\ y=\frac{y'}{۲} \end{cases}$$

این مقادیر را در معادله $x^{۲}+y^{۲}=۱$ قرار می‌دهیم:

$$x'^{۲}+\frac{y'^{۲}}{۴}=۱$$

دیده می‌شود معادله یک بیضی قائم به‌دست آمده است.

۲- گزینه‌ی ۳ معادله دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ به‌صورت $x^{۲}+y^{۲}=۴$ است.

$$\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲}x \\ -۲y \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \frac{۱}{۲}x=x' \\ -۲y=y' \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=۲x' \\ y=-\frac{۱}{۲}y' \end{cases}$$

این مقادیر را در معادله $x^{۲}+y^{۲}=۴$ قرار می‌دهیم:

$$۴x'^{۲}+\frac{۱}{۴}y'^{۲}=۴\xrightarrow{\div ۴}x'^{۲}+\frac{y'^{۲}}{۱۶}=۱\Rightarrow a^{۲}=۱۶, b^{۲}=۱$$

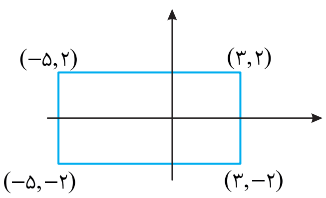
$$e=\sqrt{۱-\frac{b^{۲}}{a^{۲}}}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

۳- گزینه‌ی ۲ اگر M ماتریس تقارن نسبت به یک خط باشد، آن‌گاه $M^{۲}=I$ داریم:

$$M^{۱۳۹۴}=(M^{۲})^{۶۹۷}=I^{۶۹۷}=I$$

$$M^{۱۳۹۴}A=IA=A$$

۴- گزینه‌ی ۴ با توجه به شکل طول و عرض این مستطیل برابر ۸ و ۴ می‌باشد پس مساحت آن برابر ۳۲ است.



$$S'=\left||M|\right|S=|-۵|\times ۳۲=۱۶۰$$

۵- گزینه‌ی ۲ ماتریس A را می‌توان به‌صورت یک ماتریس دوران نوشت:

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}=-\sqrt{۲}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}=-\sqrt{۲}R_{\frac{\pi}{۴}}$$

$$A^{۲۰۰}=(-\sqrt{۲}R_{\frac{\pi}{۴}})^{۲۰۰}=۲^{۱۰۰}R_{\frac{۲۰۰\pi}{۴}}=۲^{۱۰۰}R_{۵۰\pi}=۲^{۱۰۰}R_{۰}=۲^{۱۰۰}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های این ماتریس $۲^{۱۰۰}+۲^{۱۰۰}=۲^{۱۰۱}$ می‌باشد.

۶- گزینه‌ی ۱

$$\begin{bmatrix} ۰ & \alpha \\ \beta & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha y \\ \beta x \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \alpha y=x' \\ \beta x=y' \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=\frac{x'}{\alpha} \\ x=\frac{y'}{\beta} \end{cases}$$

این مقادیر را در معادله $۴x^{۲}+۹y^{۲}=۱$ قرار می‌دهیم:

$$۴x^۲+۹y^۲=۱\Rightarrow ۴(\frac{y'}{\beta})^۲+۹(\frac{x'}{\alpha})^۲=۱\Rightarrow \frac{۴y'^۲}{\beta^۲}+\frac{۹x'^۲}{\alpha^۲}=۱$$

با مقایسه این معادله با دایره‌ی $x'^۲+y'^۲=۱$ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{۹}{\alpha^۲}=۱\Rightarrow \alpha^۲=۹\Rightarrow \alpha=\pm۳\,,\ \frac{۴}{\beta^۲}=۱\Rightarrow \beta^۲=۴\Rightarrow \beta=\pm۲$$

پس $(\alpha,\beta)=(\pm۳,\pm۲)$ در گزینه‌ها $(\alpha,\beta)=(۳,۲)$ وجود دارد.

۷- گزینه‌ی ۳ با توجه به ویژگی‌های ماتریس دوران گزینه‌ی (۳) نادرست است زیرا $(kA)^t=kA^t$.

۸- گزینه‌ی ۳ نقطه‌ی $(۳,-۱)$ را از خط $x+۲y-۱=۰$ انتخاب می‌کنیم و تصویر آن را تحت ماتریس A به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

و نقطه‌ی $(۱,-۱)$ تنها در خط $x_۱=۱$ صدق می‌کند.

۹- گزینه‌ی ۲ ابتدا تبدیل‌یافته‌ی خط را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ a & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲y \\ ax \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} -۲y=x' \\ ax=y' \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{x'}{۲} \\ x=\frac{y'}{a} \end{cases}$$

این مقادیر را در معادله خط قرار می‌دهیم:

$$۲(\frac{y'}{a})-(-\frac{x'}{۲})=۱\Rightarrow \frac{۲y'}{a}+\frac{x'}{۲}=۱$$

شیب این خط برابر $-\frac{a}{۴}$ و شیب خط اولیه برابر ۲ می‌باشد باید این دو مساوی باشند.

$$-\frac{a}{۴}=۲\Rightarrow a=-۸$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ می‌دانیم اگر S مساحت یک شکل و S' مساحت تصویر آن تحت ماتریس A باشد داریم:

$$S'=\left||A|\right|S\Rightarrow ۲۴=۳S\Rightarrow S=۸$$

مساحت مربع به قطر AC برابر $\frac{۱}{۲}AC^۲$ است.

$$\frac{۱}{۲}AC^۲=۸\Rightarrow AC^۲=۱۶\Rightarrow AC=۴$$

۱۱- گزینه‌ی ۲ ابتدا ماتریس این تبدیل را به‌دست می‌آوریم:

$$M=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\sqrt{۲} & \sqrt{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

دو نقطه‌ی $A(۰,\sqrt{۲})$ و $B(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰)$ را از خط $y=۲x+\sqrt{۲}$ انتخاب کرده تصویر آن‌ها را تحت ماتریس M به‌دست می‌آوریم:

$$M\times A=\begin{bmatrix} -\sqrt{۲} & \sqrt{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ \sqrt{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=A'$$

$$M\times B=\begin{bmatrix} -\sqrt{۲} & \sqrt{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}=B'$$

شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی A' و B' برابر $\frac{y_{A'}-y_{B'}}{x_{A'}-x_{B'}}=\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{۲-۱}=\frac{۳}{۲}$ است.

معادله خط تصویر $\Rightarrow y-1=\frac{3}{2}(x-2)$

بین گزینه‌ها تنها نقطه $(0,-2)$ در معادله‌ی این خط به‌دست آمده صدق می‌کند.

۱۲- گزینه‌ی ۳

$$\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x\\5y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x=x'\\5y=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{x'}{3}\\y=\frac{y'}{5}\end{cases}$$

این مقادیر را در معادله $9x^2+25y^2=1$ قرار می‌دهیم:

$$9(\frac{x'^2}{9})+25(\frac{y'^2}{25})=1\Rightarrow x'^2+y'^2=1$$

و این مقطع یک دایره است.

۱۳- گزینه‌ی ۴ **راه‌حل اول**: ماتریس‌های A و B را به‌صورت ماتریس دوران می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}=\sqrt{2}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\sqrt{2}R_{\frac{\pi}{4}}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=2R_{\frac{\pi}{3}}$$

$$A^{1394}=(\sqrt{2}R_{\frac{\pi}{4}})^{1394}=2^{697}R_{\frac{1394\pi}{4}}=2^{697}R_{(174\times8+2)\frac{\pi}{4}}=2^{697}R_{\frac{\pi}{2}}$$

$$B^{1394}=(2R_{\frac{\pi}{3}})^{1394}=2^{1394}R_{\frac{1394\pi}{3}}=2^{1394}R_{(232\times6+2)\frac{\pi}{3}}=2^{1394}R_{\frac{2\pi}{3}}$$

$$A^{1394}B^{1394}=(2^{697}R_{\frac{\pi}{2}})(2^{1394}R_{\frac{2\pi}{3}})=2^{2091}R_{\frac{7\pi}{6}}=2^{2091}\begin{bmatrix}\cos\frac{7\pi}{6} & -\sin\frac{7\pi}{6}\\\sin\frac{7\pi}{6} & \cos\frac{7\pi}{6}\end{bmatrix}$$

$$=2^{2091}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=-\sqrt{3}\times2^{2091}$$

راه‌حل دوم: چون A و B را می‌توان به‌صورت ماتریس دوران نوشت و ضرب ماتریس‌های دوران خاصیت جابه‌جایی دارد می‌توان نوشت:

$$A^{1394}B^{1394}=(AB)^{1394}=(\sqrt{2}R_{\frac{\pi}{4}}\times2R_{\frac{\pi}{3}})^{1394}=(2\sqrt{2}R_{\frac{7\pi}{12}})^{1394}=2^{2091}R_{1394(\frac{7\pi}{12})}$$

$$2^{2091}R_{(116\times12+2)\frac{7\pi}{12}}=2^{2091}R_{\frac{7\pi}{6}}=2^{2091}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=-\sqrt{3}\times2^{2091}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ ماتریس A را به‌صورت ماتریس دوران می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A=2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=2R_{\frac{\pi}{3}}$$

$$A^{۶}=(۲R_{\frac{\pi}{۳}})^{۶}=۲^{۶}R_{۲\pi}=۲^{۶}I=\begin{bmatrix} ۶۴ & ۰ \\ ۰ & ۶۴ \end{bmatrix}$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ ماتریس A را می‌توان به‌صورت ماتریس دوران نوشت ولی ماتریس B نمی‌تواند ماتریس دوران باشد.

$$A=\begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -۱ \\ ۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}=۲R_{\frac{\pi}{۶}}$$

$$B=\begin{bmatrix} \sqrt{۳} & ۱ \\ ۱ & -\sqrt{۳} \end{bmatrix}\Rightarrow B^{۲}=\begin{bmatrix} \sqrt{۳} & ۱ \\ ۱ & -\sqrt{۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{۳} & ۱ \\ ۱ & -\sqrt{۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}=۴I$$

$$A^{۳۰}B^{۲۰}=(۲R_{\frac{\pi}{۶}})^{۳۰}(۴I)^{۲۰}=(۲^{۳۰}R_{۵\pi})(۲^{۴۰}I)=۲^{۷۰}R_{\pi}=۲^{۷۰}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=-۲^{۷۰}I$$