پاسخنامهٔ ریاضی

۲۱. گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{\log ۵ = ۱ - \log ۲ \ , \ \log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ , \ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$

$$\begin{vmatrix} \log x & \log ۲ \\ \log ۲ & \log x \end{vmatrix} = (\log x)^۲ - (\log ۲)^۲ = \log \frac{۵}{۲}$$

$$\to (\log x)^۲ = (\log ۲)^۲ + \log ۵ - \log ۲ \Rightarrow (\log x)^۲ = (\log ۲)^۲ + ۱ - \log ۲ - \log ۲ \Rightarrow (\log x)^۲ = (\log ۲)^۲ - ۲\log ۲ + ۱$$

$$\Rightarrow (\log x)^۲ = (۱ - \log ۲)^۲ \xrightarrow{a^۲ = b^۲ \to a = \pm b} \begin{cases} \log x = ۱ - \log ۲ = \log ۵ \Rightarrow x = ۵ \\ \log x = \log ۲ - ۱ = -\log ۵ = \log ۵^{-۱} = \log \frac{۱}{۵} \Rightarrow x = \frac{۱}{۵} \end{cases}$$

$x = ۵$ و $x = \frac{۱}{۵}$ هر دو قابل قبول هستند، اما فقط $x = ۵$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۲۲. گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a - \log_k^b = \log_k^{\frac{a}{b}} \ , \ \log_k^{a^n m} = \frac{n}{m}\log_k^a}$

$$\log_{\sqrt[۴]{۲}}^x - \log_۲^x = \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}^x - \log_۲^x = ۲\log_۲^۴ - \log_۲^x \Rightarrow \log_۲^{۱۶} - \log_۲^x = \log_۲^{\frac{۱۶}{x}}$$

$$A = ۲^{(\log_{\sqrt[۴]{۲}}^۴ - \log_۲^x)} = ۱ \Rightarrow ۲^{\log_۲^{\frac{۱۶}{x}}} = ۱ = ۲^۰ \xrightarrow{\log ۱ = ۰} \frac{۱۶}{x} = ۱ \Rightarrow x = ۱۶$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{\sqrt[۳]{x}} = \log_{\frac{۱}{۲}}^{\sqrt[۳]{۱۶}} = \log_{۲^{-۱}}^{\sqrt[۳]{۲^۴}} = \log_{۲^{-۱}}^{۲^{\frac{۴}{۳}}} = -\frac{۴}{۳}\log_۲^۲ = -\frac{۴}{۳}(۱) = -\frac{۴}{۳}$$

۲۳. گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_k^a = \frac{۱}{\log_a^k} \ , \ \log_k^{a^n} = n\log_k^a \ , \ \log_b^N = x \to b^x = N}$

$$\log_۴^x + ۲\log_x^۸ = ۴ \Rightarrow \log_{۲^۲}^x + ۲\log_x^{۲^۳} = ۴ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\log_۲^x + ۶\log_x^۲ = ۴$$

$$\to \frac{۱}{۲}\log_۲^x + \frac{۶}{\log_۲^x} = ۴ \xrightarrow{t = \log_۲^x} \frac{۱}{۲}t + \frac{۶}{t} - ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲t} t^۲ + ۱۲ - ۸t = ۰ \Rightarrow (t-۶)(t-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲ \Rightarrow \log_۲^x = ۲ \Rightarrow x = ۲^۲ = ۴ \Rightarrow \alpha = ۴ \\ t = ۶ \Rightarrow \log_۲^x = ۶ \Rightarrow x = ۲^۶ = ۶۴ \Rightarrow \beta = ۶۴ \end{cases}$$

بنابراین $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = ۲ + ۸ = ۱۰$ است.

۲۴. گزینه ۲

چون جمعیت با نرخ ۰٫۰۵ رو به انقراض است، بنابراین:

$$k = -۰٫۰۵ \Rightarrow A(t) = A_۰ e^{-۰٫۰۵t}$$

وقتی ۰٫۴ جمعیت از بین می‌رود، مقدار ۰٫۴ − ۱ ، یعنی ۰٫۶ این جمعیت باقی می‌ماند. در نتیجه:

$$۰٫۶A_۰ = A_۰ e^{-۰٫۰۵t} \Rightarrow ۰٫۶ = e^{-۰٫۰۵t}$$

حال از طرفین Ln می‌گیریم:

$$Ln ۰٫۶ = Ln e^{-۰٫۰۵t} \Rightarrow -۰٫۵ = -۰٫۰۵t \Rightarrow t = \frac{۰٫۵}{۰٫۰۵} = \frac{۵۰}{۵} = ۱۰$$

۲۵. گزینه ۲

$$x-۴\times ۱۸^{۷-۲x}=۱۴۵۸\rightarrow (۲^{۲}\times ۳)^{۳x-۴}(۳^{۲}\times ۲)^{۷-۲x}=۲\times ۳^{۶}\rightarrow (۲^{۶x-۸})(۳^{۳x-۴})(۳^{۱۴-۴x})(۲^{۷-۲x})=۲\times ۳^{۶}$$

$$(۲^{۴x-۱})(۳^{۱۰-x})=۲\times ۳^{۶}\rightarrow \frac{۲^{۴x-۱}}{۲}=\frac{۳^{۶}}{۳^{۱۰-x}}\rightarrow ۲^{۴x-۲}=۳^{x-۴}$$

$$\xrightarrow{=۳^{o}} a=۴x-۲\ ,\ b=x-۴\ \rightarrow\ a+b=۵x-۶$$

۲۶. گزینه ۱

$$۲^{x}-۱۲۵=\frac{۳۸۴}{۲^{x}}\xrightarrow{\times ۲^{x}} ۲^{۲x}-۱۲۵\times ۲^{x}=۳۸۴\rightarrow (۲^{x})^{۲}-۱۲۵(۲^{x})-۳۸۴=۰$$

$$\xrightarrow{۲^{x}=A} A^{۲}-۱۲۵A-۳۸۴=۰\rightarrow (A-۱۲۸)(A+۳)=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=۱۲۸\rightarrow ۲^{x}=۱۲۸\rightarrow x=۷\rightarrow x^{۲}+۲x=۴۹+۱۴=۶۳ \\ A=-۳\rightarrow ۲^{x}=-۳\rightarrow \text{امکان ندارد} \end{cases}$$

۲۷. گزینه ۱ تابع رشد را به صورت $f(t)=Ae^{kt}$ نشان می‌دهیم.

$$f(۲۰)=۳A\Rightarrow Ae^{۲۰k}=۳A\Rightarrow e^{۲۰k}=۳\Rightarrow Lne^{۲۰k}=Ln۳\Rightarrow ۲۰k=Ln۳\Rightarrow k=\frac{۱}{۲۰}Ln۳$$

$$f(t)=۹A\Rightarrow Ae^{kt}=۹A\Rightarrow e^{kt}=۹\Rightarrow Lne^{kt}=Ln۹$$

$$\Rightarrow kt=۲Ln۳\Rightarrow \frac{۱}{۲۰}tLn۳=۲Ln۳\Rightarrow t=۴۰$$

۲۸. گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{Lna=b\rightarrow e^{b}=a\ \ ,\ \ Lna+Lnb=Lnab}$

$$Ln(ex^{۲})\cdot Lnx=۱\rightarrow (Lne+Lnx^{۲})Lnx=۱\rightarrow (۱+۲Lnx)Lnx=۱$$

$$\rightarrow ۲(Lnx)^{۲}+Lnx-۱=۰\xrightarrow{Lnx=A} ۲A^{۲}+A-۱=۰$$

$$\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases} A=-۱\rightarrow Lnx=-۱\xrightarrow{\text{تعریف}} x=e^{-۱}=\frac{۱}{e} \\ A=-\frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\rightarrow Lnx=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{تعریف}} x=e^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{e} \end{cases}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها $=\frac{۱}{e}(\sqrt{e})=\frac{\sqrt{e}}{e}$

۲۹. گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{\log_{a}^{A}\geq m\xrightarrow{۰<a<۱} A\leq a^{m}}$

$$\log_{۰/۵}^{\frac{۲x+۳}{۴}}\geq -۱\ \rightarrow\ \frac{۲x+۳}{۴}\leq (۰/۵)^{-۱}\Rightarrow \frac{۲x+۳}{۴}\leq ۲\Rightarrow x\leq \frac{۵}{۲}\ \ (I)$$

از طرفی : $\frac{۲x+۳}{۴}>۰\Rightarrow x>\frac{-۳}{۲}\ \ (II)$

$$\left.\begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک } II,I}\ \frac{-۳}{۲}<x\leq \frac{۵}{۲}$$

۳۰. گزینه ۴

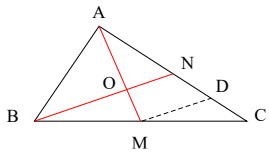
می‌دانیم: $\boxed{\log_{k}^{a}=\frac{۱}{\log_{a}^{k}}\ \ ,\ \ a^{\log_{b}^{x}}=x^{\log_{b}^{a}}\ \ ,\ \ \log_{b}^{N}=x\rightarrow N=b^{x}}$

$$۵^{x+۱}=۱۰^{x}\Rightarrow ۵^{x}\times ۵^{۱}=۵^{x}\times ۲^{x}\Rightarrow ۲^{x}=۵\Rightarrow x=\log_{۲}^{۵}$$

$$۴^{x}\times ۵^{\frac{۱}{x}}=۴^{\log_{۲}^{۵}}\times ۵^{\frac{۱}{\log_{۲}^{۵}}}=۵^{\log_{۲}^{۴}}\times ۵^{\log_{۵}^{۲}}=۵^{۲}\times ۲^{\log_{۵}^{۵}}=۵^{۲}\times ۲^{۱}=۵۰$$

۳۱. گزینه ۳ از M پای میانه موازی ON رسم کرده تا AC را در نقطه‌ی D قطع کند، از قضیه‌ی تالس نتیجه می‌گیریم:

$$MD \parallel BN \Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{CD}{ND} \xrightarrow{MC=MD} CD = ND$$

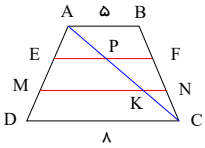


در مثلث AMD چون O وسط ضلع AM است: $MD \parallel ON \Rightarrow ON = \frac{۱}{۲} MD$

بنابراین:

$$ON = \frac{۱}{۲} MD = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲} BN\right) = \frac{۱}{۴} BN$$

۳۲. گزینه ۳ از A به C وصل می‌کنیم. با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:



$$MK \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{MK}{DC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow MK = \frac{۱۶}{۳}$$

$$KN \parallel AB \Rightarrow \frac{KN}{AB} = \frac{CN}{CB} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow KN = \frac{۵}{۳}$$

$$\Rightarrow MN = MK + KN = \frac{۱۶}{۳} + \frac{۵}{۳} = \frac{۲۱}{۳} = ۷$$

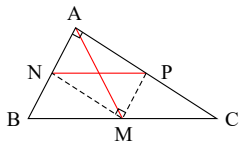
$$\left.\begin{array}{l} EP \parallel DC \Rightarrow \frac{EP}{DC} = \frac{AE}{AD} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow EP = \frac{۸}{۳} \\ PF \parallel AB \Rightarrow \frac{PF}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow PF = \frac{۱۰}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow EF = \frac{۸}{۳} + \frac{۱۰}{۳} = ۶$$

پس $\frac{EF}{MN} = \frac{۶}{۷}$.

۳۳. گزینه ۲

می‌دانیم که در هر مثلث قائم الزاویه میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است. بنابراین: $AM = \frac{BC}{۲}$

چون M ، N و P اوساط اضلاع BC ، AB و AC هستند، طبق قضیه ی میان خط نتیجه می شود:

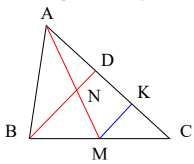


$$MP||AB, MN||AC$$

پس چهار ضلعی $MNAP$ متوازی الاضلاع بوده و چون $\hat{A} = ۹۰^\circ$ ، مستطیل نیز می‌باشد. از طرفی می‌دانیم که در هر مستطیل قطرها منصف یکدیگرند. بنابراین:

$$AM = OA + OM \xrightarrow{OA=OM=۳} AM = ۲OM = ۶ \xrightarrow{AM=\frac{BC}{۲}} BC = ۱۲$$

۳۴. گزینه ۳ از M خطی به موازات BD رسم می‌کنیم تا AC را در K قطع کند. طبق قضیه‌ی تالس داریم:



$$ND||MK \Rightarrow \frac{ND}{MK} = \frac{AN}{AM} = \frac{۱}{۲}$$

$$MK||BD \Rightarrow \frac{MK}{BD} = \frac{CM}{CB} = \frac{۱}{۲}$$

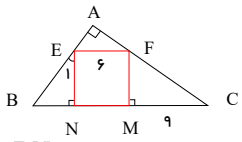
با توجه به روابط فوق داریم:

$$\frac{ND}{BD} = \frac{ND}{MK} \cdot \frac{MK}{BD} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow ND = \frac{۱}{۴} BD \Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۴} BD \Rightarrow BD = ۴$$

۳۵. گزینه ۳ با توجه به شکل داریم :

$CM=۹, MN=EF=۶$

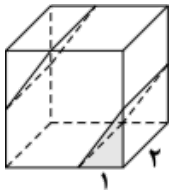


بنابراین کافی است طول BN را به دست آوریم و برای این امر از تشابه میان مثلث‌های CMF و BEN استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E_۱}+\hat{B}=۹۰^\circ\\ \hat{C}+\hat{B}=۹۰^\circ\\ \hat{M}=\hat{N}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}=\hat{E_۱}\Bigg\}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\triangle}{CMF}\sim\overset{\triangle}{BEN}\Rightarrow\frac{BN}{MF}=\frac{EN}{CM}\xrightarrow{EN=MF}EN^۲=BN\times CM$$

$$\Rightarrow (۶)^۲=BN\times ۹\Rightarrow BN=۴\quad,\quad BC=BN+NM+CM=۴+۶+۹=۱۹$$

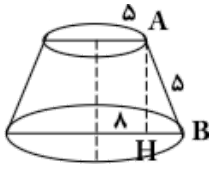
۳۶. گزینه ۴ جزء بالا و پایین منشور مثلث القاعده هستند که دو ضلع قاعده ۱ و ارتفاع منشور ۲ است پس حجم هر منشور ۱ است:



$$V=Sh=\frac{۱\times ۱}{۲}\times ۲=۱$$

$$\text{حجم دو منشور}-\text{حجم مکعب}=\text{حجم قسمت وسط}=۲\times ۲\times ۲-۲\times ۱=۶$$

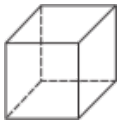
۳۷. گزینه ۲ مثلث ABH شکل مقابل قائم الزاویه است که $AB=۵$ و $HB=۸-۵=۳$ پس $AH=۴$ و حجم مخروط ناقص از رابطه ی زیر تعیین می شود:



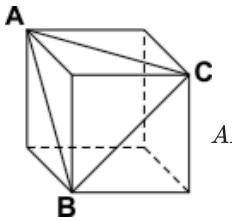
$$V=\frac{h}{۳}(S+S'+\sqrt{SS'})=\frac{۴}{۳}(۲۵\pi+۶۴\pi+\sqrt{۲۵\pi+۶۴\pi})$$

$$=\frac{۴}{۳}\times ۱۲۹\pi=۱۷۲\pi$$

۳۸. گزینه ۲ اگر طول یال مکعبی a باشد اندازه قطر آن $a\sqrt{۳}$ و اندازه حجم آن $a^۳$ است. لذا حجم مکعب $a^۳$ است.



۳۹. گزینه ۳

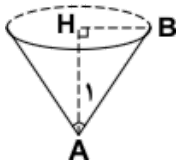


اگر A را به C وصل کنیم مثلث ABC متساوی الاضلاع است چون هر ضلع آن قطر یک وجه مکعب است بنابراین $\angle ABC=۶۰^\circ$

از طرفی BC قطر مربع وجه است پس $A\hat{B}C=۴۵^\circ$ داریم:

$$A\hat{B}C-C\hat{B}D=۶۰-۴۵=۱۵$$

۴۰. گزینه ۲



$$\angle A=۹۰\Rightarrow\angle A_۱=۴۵\Rightarrow HB=AH=R$$

$$\text{حجم}=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}\pi R^۲R=۲۴۳\pi$$

$$R^۳=۳^۶\Rightarrow R=۹$$