پاسخ‌های تشریحی

فصل اول

(B) **۱- گزینه‌ی ۴** قرینه‌ی نقطه $A(x,y,z)$ نسبت به صفحه‌ی xoz نقطه‌ی $A'(x,-y,z)$ است. پس برای قرینه کردن نقطه نسبت به صفحه‌ی xoz کافی است y را به $-y$ تبدیل کنیم.

$$A(۱,۲n,۲)\xrightarrow[\text{صفحه‌ی } xoz]{\text{قرینه نسبت به}}A'(۱,-۲n,۲)$$

$$A'=B\Rightarrow(۱,-۲n,۲)=(m,m+n,-۴n)\Rightarrow\begin{cases}m=۱\\m+n=-۲n\\۲=-۴n\Rightarrow n=-۲\end{cases}$$

مقادیر m و n به‌دست آمده در رابطه‌ی $m+n=-۲n$ صدق نمی‌کنند، پس m و nای با این شرایط وجود ندارد.

(B) **۲- گزینه‌ی ۲** قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ نسبت به محور zها نقطه‌ی $A'(-x,-y,z)$ می‌باشد.

$$A(a+b,۴,a+۲)\xrightarrow[\text{محور } z\text{ها}]{\text{قرینه نسبت به}}A'(-a-b,-۴,a+۲)$$

بنابر فرض $A'(۲,۲a-b,b)$ داریم:

$$(-a-b,-۴,a+۲)=(۲,۲a-b,b)\Rightarrow\begin{cases}-a-b=۲\\۲a-b=-۴\\a+۲=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a-b=۲\\۲a-b=-۴\end{cases}\Rightarrow a=-۲,b=۰$$

پس $A(a+b,۴,a+۲)=(-۲,۴,۰)$ و $A''(-a,-۲a,b)=(۲,۴,۰)$ و دو نقطه‌ی A و A'' قرینه‌ی یک‌دیگر نسبت به محور yها هستند.

(B) **۳- گزینه‌ی ۲** تصویر قائم نقطه‌ی $A(x,y,z)$ بر محور xها نقطه‌ی $H(x,۰,۰)$ می‌باشد. چون $H(۲,۰,۰)$ تصویر $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ بر محور xها می‌باشد، نتیجه می‌گیریم $x_۰=۲$.

از طرفی، قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ نسبت به صفحه‌ی xy نقطه‌ی $A'(x,y,-z)$ است.

$$A(x_۰,y_۰,z_۰)\xrightarrow[\text{صفحه‌ی } xy]{\text{قرینه نسبت به}}A'(x_۰,y_۰,-z_۰)$$

$$A'(x_۰,y_۰,-z_۰)=(x_۰,۳,۴)\Rightarrow\begin{cases}y_۰=۳\\-z_۰=۴\Rightarrow z_۰=-۴\end{cases}$$

پس مختصات نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ به صورت $(۲,۳,-۴)$ است و قرینه‌ی این نقطه نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ی $(-۲,-۳,۴)$ می‌باشد.

(A) **۴- گزینه‌ی ۱** قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ نسبت به صفحه‌ی yoz نقطه‌ی $A'(-x,y,z)$ است، پس در این‌جا $A'(-۲,۴,-۵)$. از طرفی، قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ نسبت به محور yها نقطه‌ی $A''(-x,y,-z)$ می‌باشد. بنابراین قرینه‌ی $A'(-۲,۴,-۵)$ نسبت به محور yها نقطه‌ی $A''(۲,۴,۵)$ می‌باشد. بنابراین:

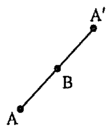
$$x_{A''}+y_{A''}+z_{A''}=۲+۴+۵=۱۱$$

(A) **۵- گزینه‌ی ۱** تصویر قائم نقطه‌ی $A(x,y,z)$ روی صفحه‌ی xz نقطه‌ی $H(x,۰,z)$ و قرینه‌ی A نسبت به صفحه‌ی yz نقطه‌ی $B(-x,y,z)$ است. پس داریم:

$$A(۲,-۱,۳)\xrightarrow[\text{صفحه‌ی } xz]{\text{تصویر قائم } A \text{ روی}}A'(۲,۰,۳)\quad,\quad A(۲,-۱,۳)\xrightarrow[\text{صفحه‌ی } yz]{\text{قرینه‌ی } A \text{ نسبت به}}A''(-۲,-۱,۳)$$

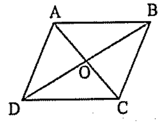
اگر M وسط $A'A''$ باشد، آن‌گاه مختصات M به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$M=\frac{A'+A''}{۲}=(۰,\frac{-۱}{۲},۳)\Rightarrow x_M+y_M+z_M=۰-\frac{۱}{۲}+۳=\frac{۵}{۲}$$



Ⓐ **۶- گزینه‌ی (۳)** اگر نقطه‌ی A' قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی B باشد، آن‌گاه B وسط AA' قرار دارد. بنابراین داریم:

$$B=\frac{A+A'}{2}\Rightarrow A'=2B-A\Rightarrow A'=2(2,3,-1)-(1,-2,4)\Rightarrow A'(3,8,-6)$$



Ⓑ **۷- گزینه‌ی (۳)** چون نقطه‌ی $(2,3,0)$ وسط پاره‌خط واصل نقاط $(4,5,2)$ و $(2,4,1)$ نیست، پس نقاط داده شده رئوس مجاور متوازی‌الاضلاع می‌باشند. فرض کنید $A(4,5,2)$ و $B(2,4,1)$ دو رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و نقطه‌ی $O(2,3,0)$ مرکز آن است. دقت کنید O وسط هر دو قطر قرار دارد.

$$O=\frac{A+C}{2}\Rightarrow C=2O-A=2(2,3,0)-(4,5,2)\Rightarrow C=(0,1,-2)$$

حال طول دو ضلع AB و BC را به‌دست می‌آوریم.

$$|AB|=\sqrt{(4-2)^2+(5-4)^2+(2-1)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$
$$|BC|=\sqrt{(2-0)^2+(4-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{4+9+9}=\sqrt{22}$$

بنابراین اندازه‌ی ضلع بزرگ‌تر $\sqrt{22}$ می‌باشد.

Ⓑ **۸- گزینه‌ی (۳)** مختصات نقطه تلاقی میانه‌های مثلث ABC یعنی مرکز ثقل به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$G=\frac{A+B+C}{3}\Rightarrow G=(\frac{2}{3},1,2)$$

در ضمن، اگر $A(x,y,z)$ یک نقطه باشد، آن‌گاه فاصله‌ی A از صفحات مختصات برابر است با:

$|x|=$ فاصله‌ی A از صفحه‌ی yz ، $|y|=$ فاصله‌ی A از صفحه‌ی xz ، $|z|=$ فاصله‌ی A از صفحه‌ی xy

بنابراین فاصله‌های نقطه‌ی G از صفحات مختصات برابر است با:

$\frac{2}{3}=$ فاصله‌ی G از صفحه‌ی yz ، $1=$ فاصله‌ی G از صفحه‌ی xz ، $2=$ فاصله‌ی G از صفحه‌ی xy

در نتیجه نقطه‌ی G به صفحه‌ی yz نزدیک‌تر است.

Ⓐ **۹- گزینه‌ی (۲)** فاصله‌ی یک نقطه تا صفحه‌ی xz برابر $|y|$ می‌باشد پس $|m|=1$ در نتیجه $m=\pm1$:

$m=1\Rightarrow M(2,1,1)\Rightarrow$ فاصله‌ی M از محور y ها $=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

$m=-1\Rightarrow M(0,-1,1)\Rightarrow$ فاصله‌ی M از محور y ها $=\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{0+1}=1$

در بین گزینه‌ها عدد $\sqrt{5}$ وجود دارد.

Ⓐ **۱۰- گزینه‌ی (۳)** فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x,y,z)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$|OA|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Rightarrow 3=\sqrt{(a-1)^2+a^2+a^2}\Rightarrow 3=\sqrt{a^2-2a+1+a^2+a^2}$$
$$\Rightarrow 3=\sqrt{3a^2-2a+1}\Rightarrow 9=3a^2-2a+1\Rightarrow 3a^2-2a-8=0$$

از دستور b' معادله‌ی درجه دوم بالا را حل می‌کنیم:

$$a=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{3}\begin{cases}a=2\\ a=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

$a=2\Rightarrow A(1,2,2)\Rightarrow$ فاصله‌ی A از محور x ها $=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

عدد $2\sqrt{2}$ در گزینه‌ها وجود دارد پس نیازی به بررسی حالت $a=-\frac{4}{3}$ نیست.

Ⓑ **۱۱- گزینه‌ی (۱)** ابتدا نقطه‌ی وسط AB را به‌دست می‌آوریم. اگر M وسط AB باشد، داریم:

$$M=\frac{A+B}{2}\Rightarrow M=(\frac{-2+2m}{2},\frac{m-2-m}{2},\frac{3-1}{2})=(m-1,-1,1)$$

فاصله‌ی M از مبدأ برابر $\sqrt{2}$ است، پس:

$$|OM|=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{(m-1)^2+1+1}=\sqrt{2}\Rightarrow m^2-2m+3=2\Rightarrow m^2-2m+1=0\Rightarrow(m-1)^2=0\Rightarrow m=1$$

Ⓐ **۱۲- گزینه‌ی (۲)** اگر $A(x,y,z)$، آن‌گاه فاصله‌ی A از محور x ها برابر $\sqrt{y^2+z^2}$ و فاصله‌ی A از صفحه yoz برابر $|x|$ می‌باشد. طبق فرض داریم:

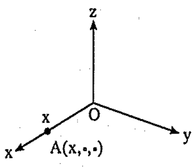
(فاصله‌ی A از صفحه yoz) $2=$ فاصله‌ی A از محور x ها

$$\sqrt{y^2+z^2}=2|x| \qquad (1)$$

حالا گزینه‌ها را آزمایش می‌کنیم. گزینه‌ای درست است که مختصات آن در رابطه‌ی (۱) صدق کند:

گزینه‌ی (۱) $\Rightarrow\sqrt{6^2+8^2}=2(10)\Rightarrow 10=20$ نادرست ، گزینه‌ی (۲) $\Rightarrow\sqrt{6^2+8^2}=2|-5|\Rightarrow 10=10$ درست

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است و نیازی به بررسی سایر گزینه‌ها نیست.



Ⓑ **۱۳- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم اگر $A(x,y,z)$ یک نقطه باشد، آن‌گاه تصویر قائم A روی محور x ها نقطه‌ی $H(x,0,0)$ و قرینه‌ی A نسبت به محور x ها نقطه‌ی $A'(x,-y,-z)$ است. طبق فرض تست، دو نقطه‌ی H و A' بر هم منطبق هستند. داریم:

$$H=A'\Rightarrow(x,0,0)=(x,-y,-z)\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}$$

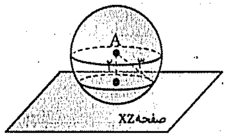
بنابراین A نقطه‌ی $(x,0,0)$ است، پس فاصله‌ی A از مبدأ مختصات، محور y ها، صفحه‌ی yz و محور z ها برابر $|x|$ می‌باشد و فاصله‌ی A از صفحه‌ی xy برابر صفر است، پس گزینه‌ی (۳) درست است.

Ⓐ **۱۴- گزینه‌ی (۱)** ابتدا تصاویر نقاط A و B را بر صفحه‌ی xy به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}A(1,2,3)\xrightarrow[xy]{\text{تصویر روی صفحه‌ی}}A'(1,2,0)\\ B(5,5,1)\xrightarrow[xy]{\text{تصویر روی صفحه‌ی}}B'(5,5,0)\end{array}\right\}\Rightarrow|A'B'|=\sqrt{(5-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

Ⓐ **۱۵- گزینه‌ی (۴)** تصویر قائم $A(x,y,z)$ بر صفحه‌ی xz نقطه‌ی $A'(x,0,z)$ و تصویر قائم A بر صفحه‌ی yz نقطه $A''(0,y,z)$ است، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}A(2,3,-1)\xrightarrow[xz]{\text{تصویر روی صفحه‌ی}}A'(2,0,-1)\\ B(4,-1,1)\xrightarrow[yz]{\text{تصویر روی صفحه‌ی}}B'(0,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow|A'B'|=\sqrt{(2-0)^2+(0+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{9}=3$$



Ⓒ **۱۶- گزینه‌ی (۴)** **راه‌حل اول:** هر نقطه روی صفحه‌ی xz به صورت $M(x,0,z)$ می‌باشد. طبق فرض تست $|AM|=3$، بنابراین داریم:

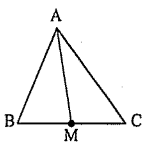
$$|AM|=3\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2+4+(z+1)^2}=3\Rightarrow(x-1)^2+(z+1)^2=5 \qquad (1)$$

پس نقاطی از صفحه‌ی xz که در رابطه‌ی (۱) صدق می‌کنند، جواب این تست هستند. در نتیجه مسأله بیشمار جواب دارد.

راه‌حل دوم: مکان هندسی نقاطی از فضا که از A به فاصله‌ی ۳ هستند کره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ می‌باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی xz برابر $|y|$ یعنی ۲ می‌باشد. پس کره‌ای به مرکز A و شعاع ۳، صفحه‌ی xz را قطع می‌کند و مکان یک دایره است، پس مسأله بیشمار جواب دارد.

Ⓑ **۱۷- گزینه‌ی (۴)** نقاط واقع بر صفحه‌ی xoy به صورت $M(x,y,0)$ هستند. بنابر فرض سؤال $|MA|=|MB|$. داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|MA|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+4}\\ |MB|=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+1}\end{array}\right.\xrightarrow{|MA|=|MB|}\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+4}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+1}$$
$$\Rightarrow x^2+1-2x+y^2+1+2y+4=x^2+9-6x+y^2+1-2y+1\Rightarrow 4x+4y=5$$



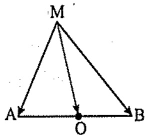
Ⓐ **۱۸- گزینه‌ی (۳)** اگر M وسط ضلع BC باشد، آن‌گاه فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و M، طول میانه‌ی AM است.

$$M=\frac{B+C}{2}=(\frac{2m}{2},\frac{5+3}{2},\frac{m+4+m}{2})=(m,4,m+2)$$
$$|AM|=2\Rightarrow\sqrt{(m+1)^2+2^2+(m+1)^2}=2\Rightarrow 2(m+1)^2+4=4\Rightarrow(m+1)^2=0\Rightarrow m=-1$$
$$M(m,4,m+2)\xrightarrow{m=-1}M(-1,4,1)\Rightarrow x_M+y_M+z_M=4$$

Ⓒ **۱۹- گزینه‌ی ۲** تصویر قائم نقطه‌ی $M(x, y, z)$ روی صفحه‌ی yz نقطه‌ی $(0, y, z)$ و قرینه‌ی M نسبت به محور yها نقطه‌ی $(-x, y, -z)$ می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} M(m-1,1,-1)\xrightarrow[yz]{\text{تصویر روی صفحه‌ی}}A(0,1,-1) \\ M(m-1,1,-1)\xrightarrow[\text{ها}y]{\text{قرینه نسبت به محور}}B(-m+1,1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow |AB|=\sqrt{(1-m)^2+0+4}$$

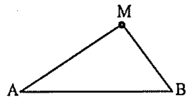
چون $|AB|=\sqrt{(1-m)^2+4}$، پس کم‌ترین فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B از هم در صورتی ایجاد می‌شود که $(1-m)^2$ برابر صفر شود. بنابراین مینیمم فاصله A از B برابر $\sqrt{4}=2$ می‌باشد.



Ⓒ **۲۰- گزینه‌ی ۳** اگر O وسط پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه مجموع $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ مساوی $2\overrightarrow{MO}$ خواهد بود، نتیجه می‌گیریم:

$$\text{فرض تست} \Rightarrow |\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\vec{V}| \Rightarrow |2\overrightarrow{MO}|=|\vec{V}| \Rightarrow |\overrightarrow{MO}|=\frac{|\vec{V}|}{2}$$

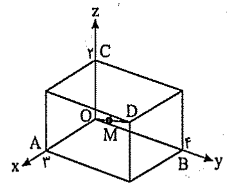
بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی متغیر M از نقطه‌ی ثابت O برابر $\frac{|\vec{V}|}{2}$ می‌باشد، پس M روی کره‌ای به مرکز O و شعاع $\frac{1}{2}|\vec{V}|$ قرار دارد.



Ⓐ **۲۱- گزینه‌ی ۲** با توجه به نامساوی مثلث، همواره $|MA|+|MB|\geq|AB|$، پس مینیمم $|MA|+|MB|$ برابر $|AB|$ است و این مینیمم در صورتی اتفاق می‌افتد که M روی AB باشد.

$$|AB|=\sqrt{(1-0)^2+(-1-1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$$

بنابراین مینیمم مقدار $|MA|+|MB|$ برابر $\sqrt{21}$ می‌باشد.



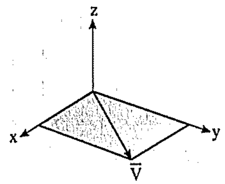
Ⓑ **۲۲- گزینه‌ی ۳** اگر این مکعب مستطیل را ترسیم کنیم، آن‌گاه رأس D به مختصات $(3,4,2)$ و مرکز مکعب مستطیل، نقطه‌ی M وسط OD می‌باشد.

$$M=\frac{O+D}{2}=(\frac{3}{2},2,1)$$

$$\text{فاصله‌ی } M \text{ تا محور } x\text{ها}=\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

توجه کنید در حالت کلی، اگر OA، OB و OC در راستای محورهای مختصات بوده و سه یال یک مکعب مستطیل باشند، آن‌گاه مختصات مرکز مکعب مستطیل برابر است با:

$$\text{مرکز مکعب مستطیل}=\frac{A+B+C}{2}$$



Ⓐ **۲۳- گزینه‌ی ۳** می‌دانیم هر بردار از مبدأ مختصات آغاز می‌شود. پس برداری که با صفحه‌ی xy موازی است در صفحه‌ی xy خواهد بود. بنابراین مؤلفه‌ی z بردار، برابر صفر است.

$$m-1=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow V=(4,3,0)$$

$$|V|=\sqrt{4^2+3^2+0}=\sqrt{25}=5$$

Ⓑ **۲۴- گزینه‌ی ۴** اگر $a=(x, y, z)$، آن‌گاه داریم:

$$a=(x,y,z)\xrightarrow[xy]{\text{تصویر بر صفحه‌ی}}a'=(x,y,0)\xrightarrow{|a'|=2\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{2}$$

$$a=(x,y,z)\xrightarrow[xz]{\text{تصویر بر صفحه‌ی}}a''=(x,0,z)\xrightarrow{|a''|=2}\sqrt{x^2+z^2}=2$$

$$a=(x,y,z)\xrightarrow[yz]{\text{تصویر بر صفحه‌ی}}a'''=(0,y,z)\xrightarrow{|aa'''|=\sqrt{6}}\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=8\\x^2+z^2=4\\y^2+z^2=6\end{cases}\xrightarrow{\text{۳ معادله را جمع می‌کنیم}}2x^2+2y^2+2z^2=18\Rightarrow x^2+y^2+z^2=9\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3\Rightarrow|a|=3$$

Ⓑ **۲۵- گزینه‌ی ۱** فرض کنید $a=(x, y, z)$، در این صورت x، y و z تصاویر بردار a بر محورهای مختصات خواهند بود. پس طول تصویر a روی محور zها برابر $|z|$ است. در نتیجه $|z|=3$:

$$|a|=4\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2+z^2}=4\xrightarrow{|z|=3}\sqrt{x^2+y^2+9}=4\Rightarrow x^2+y^2+9=16\Rightarrow x^2+y^2=7$$

از طرفی اندازه‌ی تصویر بردار $a=(x, y, z)$ بر صفحه‌ی xy برابر $\sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\text{طول تصویر } a \text{ بر صفحه‌ی } xy=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{7}$$

Ⓐ **۲۶- گزینه‌ی ۲** بردار c هم‌راستا و **غیرهم‌جهت** با بردار $a+b$ می‌باشد، پس c یک **مضرب منفی** $a+b$ است.

$$a+b=(1,-1,2)+(3,1,4)=(4,0,6)$$

در بین گزینه‌ها فقط بردار $(\frac{-6}{\sqrt{13}},0,\frac{-4}{\sqrt{13}})$ مضرب منفی $a+b$ است، پس گزینه‌ی (۲) درست می‌باشد.

Ⓑ **۲۷- گزینه‌ی ۲** می‌دانیم قرینه‌ی بردار $a=(x, y, z)$ نسبت به محور xها بردار $(x, -y, -z)$ و قرینه‌ی بردار a نسبت به محور yها بردار $(-x, y, -z)$ است، بنابراین داریم:

$$a=(-2,-3,6)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور}x\text{ها}}a'(-2,3,-6)\quad,\quad b=(-1,\beta,\gamma)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور}y\text{ها}}b'(1,\beta,-\gamma)$$

بنابر فرض، a' و b' در یک امتداد هستند، پس a' موازی b' است، بنابراین مختصات این دو بردار متناسب‌اند.

$$a'\|b'\Rightarrow\frac{-2}{1}=\frac{3}{\beta}=\frac{-6}{-\gamma}\Rightarrow\begin{cases}\beta=-\frac{3}{2}\\\gamma=-3\end{cases}$$

پس $a'=(-2,3,-6)$ و $b'=(1,-\frac{3}{2},3)$. در نتیجه داریم:

$$a'+b'=(-2,3,-6)+(1,-\frac{3}{2},3)=(-1,\frac{3}{2},-3)\Rightarrow|a'+b'|=\sqrt{1+\frac{9}{4}+9}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$$

Ⓐ **۲۸- گزینه‌ی ۲** می‌دانیم عمل قرینه‌کردن یک تبدیل ایزومتری است. بنابراین اندازه‌ی قرینه‌ی یک بردار با اندازه‌ی خود بردار برابر است. پس طول قرینه‌ی بردار $a+b$ نسبت به هر برداری برابر اندازه‌ی $a+b$ است.

$$a+b=(2,-1,1)+(4,1,2)=(6,0,3)\Rightarrow|a+b|=\sqrt{36+0+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

Ⓑ **۲۹- گزینه‌ی ۴** بردار c با بردار $a+b$ موازی است. پس بردار c مضربی از بردار $a+b$ می‌باشد.

$$c\|(a+b)\Rightarrow c=m(a+b)\xrightarrow{a+b=(2,0,1)}c=(2m,0,m)$$

$$|c|=3\Rightarrow\sqrt{4m^2+m^2}=3\Rightarrow\sqrt{5m^2}=3\Rightarrow m=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$m<0$ قابل قبول است، زیرا c و $a+b$ غیرهم‌جهت هستند. بنابراین مجموع مؤلفه‌های c برابر $-\frac{9}{\sqrt{5}}$ است.

Ⓐ **۳۰- گزینه‌ی ۴** سه نقطه‌ی $A(0,-2,3)$، $B(4,a,5)$ و $C(b,-3,1)$ روی یک خط قرار دارند. هرگاه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ موازی باشند، باید مختصات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متناسب باشند.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(4,a,5)-(0,-2,3)=(4,a+2,2)$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(b,-3,1)-(0,-2,3)=(b,-1,-2)$$

$$\overrightarrow{AB}\|\overrightarrow{AC}\Rightarrow\frac{4}{b}=\frac{a+2}{-1}=\frac{2}{-2}\Rightarrow\begin{cases}b=-4\\a=-1\end{cases}\Rightarrow a+b=-5$$

Ⓑ **۳۱- گزینه‌ی ۳** می‌دانیم $\overrightarrow{AM}$ برابر $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$ یا به عبارتی $M-A$ است، بنابراین داریم:

$$2\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{MB}=o\Rightarrow2(M-A)-3(B-M)=0\Rightarrow2M-2A-3B+3M=0$$

$$\Rightarrow5M=2A+3B\Rightarrow5M=2(2,1,5)+3(1,-1,2)\Rightarrow M(\frac{7}{5},-\frac{1}{5},\frac{16}{5})$$

$$\text{فاصله‌ی } M \text{ تا محور } z\text{ها}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{49}{25}+\frac{1}{25}}=\sqrt{2}$$

(C) **۳۲- گزینه‌ی «۴»** راه‌حل اول: در اینجا برای ساده کردن عبارت داده شده، هر بردار را به کمک رابطه‌ی $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ ساده می‌کنیم.

$$\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DE}+3\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}\Rightarrow\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}+3(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}+3(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OE}-3\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}+3\overrightarrow{OD}-3\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}-2\overrightarrow{OC}\Rightarrow-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OE}$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{BE}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BE}$$

بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BE}$ موازی و در نقطه‌ی B مشترک هستند، بنابراین نقاط A، B و E در یک راستا قرار دارند.

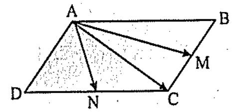
راه‌حل دوم: عبارت داده شده را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}}_{\overrightarrow{AE}}+2\overrightarrow{CE}+\underbrace{\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BD}}_{\overrightarrow{BE}}+2\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}$$

پس:

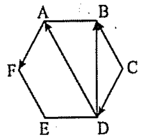
$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}=2(\underbrace{\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}}_{\overrightarrow{EB}})$$

در نتیجه: $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EB}$، بنابراین بردارهای $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{EB}$ موازی‌اند، پس A، B و E در یک راستا قرار دارند.



(C) **۳۳- گزینه‌ی «۳»** در هر مثلث مجموع برداری دو ضلع، مساوی ۲ برابر بردار میانه‌ی ضلع سوم است. در اینجا AM میانه‌ی مثلث ABC و AN میانه‌ی مثلث ADC است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{در مثلث } ABC: 2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\ \text{در مثلث } ADC: 2\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\end{array}\right\}\xrightarrow{+}2\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AN}=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AC}}+2\overrightarrow{AC}$$
$$\Rightarrow 2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN})=3\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN})$$



(C) **۳۴- گزینه‌ی «۱»** در شش‌ضلعی منتظم، قطر بزرگ دو برابر ضلع شش‌ضلعی می‌باشد. با توجه به شکل، بردار $-\overrightarrow{ED}$ برابر $\overrightarrow{DE}$ و قرینه‌ی بردار $\overrightarrow{AB}$ است، پس داریم:

$$\cancel{\overrightarrow{AB}}+\underbrace{\overrightarrow{AF}}_{\overrightarrow{CD}}+\overrightarrow{DB}-\cancel{\overrightarrow{ED}}-\underbrace{\overrightarrow{FE}}_{\overrightarrow{BC}}=\underbrace{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}}_{\overrightarrow{CB}}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$$

توجه کنید قطر $\overrightarrow{DA}$ موازی و هم‌جهت با $\overrightarrow{CB}$ است و در ضمن $|\overrightarrow{DA}|=2|\overrightarrow{CB}|$. پس گزینه‌ی (۱) درست است.

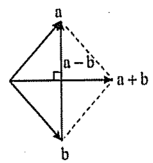
(C) **۳۵- گزینه‌ی «۲»** می‌دانیم $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ پس $\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}$ برابر $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$ برابر $\overrightarrow{AH}$ می‌باشد. بنابراین:

$$-\overrightarrow{OA}+\underbrace{\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}}_{\overrightarrow{EF}}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{EF}\quad(1)$$

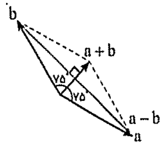
در شکل، $\overrightarrow{EF}$ با $\overrightarrow{HG}$ مساوی است پس رابطه‌ی (۱) برابر $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}$ می‌باشد که این مجموع مساوی $\overrightarrow{AG}$ است. از طرفی، $\overrightarrow{AG}$ قطر این مکعب است و اگر a طول یال مکعب باشد، $a\sqrt{3}$ برابر قطر آن است.

$$|\overrightarrow{AG}|=a\sqrt{3}=(3\sqrt{3})(\sqrt{3})=9$$

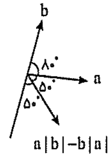
(A) **۳۶- گزینه‌ی «۳»** همان‌طور که دیده می‌شود، بردارهای $a+b$ و $a-b$ هم اندازه هستند. از طرفی $a+b$ و $a-b$ اقطار متوازی‌الاضلاعی است که a و b دو ضلع آن هستند و متوازی‌الاضلاعی که دو قطر برابر دارد، مستطیل می‌باشد. بنابراین $a\perp b$. در نتیجه بردارهای $3a$ و $-7b$ نیز بر هم عمودند.



(A) **۳۷- گزینه‌ی «۴»** چون a و b قرینه‌ی یکدیگر نسبت به $a+b$ می‌باشند و بازتاب، ایزومتری است، پس $|a|=|b|$ و در نتیجه متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی a و b لوزی است و در نهایت قطرهای آن بر هم عمودند، یعنی $a+b$ و $a-b$ بر هم عمودند.



(A) **۳۸- گزینه‌ی «۴»** با توجه به شکل، اگر زاویه‌ی بین a و $a+b$ برابر ۷۵ درجه باشد، چون زاویه‌ی بین a و b برابر ۱۵۰ درجه است، پس زاویه‌ی بین b و $a+b$ نیز ۷۵ درجه است. بنابراین قطر $a+b$، نیمساز می‌باشد. می‌دانیم متوازی‌الاضلاعی که قطر آن نیمساز است، لوزی می‌باشد و در لوزی اقطار بر هم عمودند. در نتیجه بردارهای $a+b$ و $a-b$ بر هم عمودند.



(B) **۳۹- گزینه‌ی «۴»** اگر a و b دو بردار باشند، آن‌گاه $a|b|+b|a|$ در راستای نیمساز داخلی زاویه‌ی بین a و b و $a|b|-b|a|$ در راستای نیمساز خارجی زاویه‌ی بین a و b است. با توجه به شکل داریم:

زاویه‌ی خواسته‌شده $=50^\circ+80^\circ=130^\circ$

(B) **۴۰- گزینه‌ی «۲»** می‌دانیم $|b|a+|a|b$ یا هر مضرب غیرصفری از آن، راستای نیمساز زاویه‌ی بین a و b است. با توجه به صورت سؤال، $3a+4b$ نیز راستای نیمساز زاویه بین a و b می‌باشد، پس می‌توان نتیجه گرفت که دو بردار مضرب یک‌دیگرند.

$$|b|a+|a|b=m(3a+4b)\Rightarrow\begin{cases}|b|=3m\\|a|=4m\end{cases}$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$\frac{|a|}{|b|}=\frac{4m}{3m}=\frac{4}{3}\Rightarrow$$ $|a|$، $\frac{4}{3}$ برابر $|b|$ است.

(A) **۴۱- گزینه‌ی «۳»** با توجه به اطلاعات مسأله داریم:

$$\frac{5}{3}b+\frac{3}{5}a=|a|b+|b|a$$
$$\frac{3}{5}a-\frac{5}{3}b=|b|a-|a|b$$

از طرفی این دو بردار $|a|b+|b|a$ و $|b|a-|a|b$ راستای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی بین دو بردار a و b می‌باشند. می‌دانیم نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر هر زاویه بر هم عمودند، پس دو بردار بر هم عمودند.

(B) **۴۲- گزینه‌ی «۱»** می‌دانیم $|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB}$ یا هر مضرب غیرصفری از آن در راستای نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|=3\\ \overrightarrow{AC}=(-4,4,-2)\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=6\end{array}\right.\Rightarrow|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB}=3(-4,4,-2)+6(1,-2,2)=(-6,0,6)$$

مسلماً مضارب غیرصفر بردار به‌دست آمده هم در راستای نیمساز قرار دارد، پس $\frac{1}{6}(-6,0,6)=(-1,0,1)$ نیز در راستای نیمساز زاویه‌ی A است.

(A) **۴۳- گزینه‌ی «۲»** اندازه‌ی بردار جهت برابر ۱ است. داریم:

$$\left|\frac{1}{3m+1}a\right|=1\Rightarrow|a|=|3m+1|\xrightarrow{|a|=\sqrt{1+9m^2+16}=\sqrt{9m^2+17}}\sqrt{9m^2+17}=|3m+1|=(-6,0,6)$$
$$\Rightarrow 9m^2+17=9m^2+6m+1\Rightarrow 6m=16\Rightarrow m=\frac{8}{3}$$

(C) **۴۴- گزینه‌ی «۱»** اندازه‌ی بردار جهت، برابر ۱ است. از طرفی هر بردار با بردار جهت خود موازی می‌باشد.

$$e_a\parallel a\Rightarrow\frac{t+1}{k}=\frac{t}{m}=\frac{t-2}{-m}\Rightarrow\frac{t}{m}=\frac{t-2}{-m}\Rightarrow -t=t-2\Rightarrow t=1$$

بنابراین $a=(2,1,-1)$، پس $|a|=\sqrt{6}$. در نتیجه $e_a=\frac{a}{|a|}=\frac{a}{\sqrt{6}}=(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}})$. از طرفی $e_a=(k,m,-m)$، پس:

$$k=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(B) **۴۵- گزینه‌ی «۴»** می‌دانیم $e_a=\frac{a}{|a|}$. بنابراین $a=|a|e_a$، پس داریم:

$$a=|a|e_a\Rightarrow\begin{cases}2=|a|\times\frac{1}{4}\Rightarrow|a|=8\\ y=|a|\times\frac{1}{8}\Rightarrow y=8\times\frac{1}{8}=1\\ z=|a|\times x\Rightarrow z=8x\end{cases}\Rightarrow 8x+y-z=z+1-z=1$$

Ⓒ **۴۶- گزینه‌ی (۴)** راه‌حل اول: بردار e_a بردار واحد نظیر بردار a است و می‌دانیم $e_a=\frac{a}{|a|}$، پس داریم:

$$2e_a+\frac{2a}{|a|}+|a|a=4a\Rightarrow 2\frac{a}{|a|}+\frac{2a}{|a|}+|a|a=4a\Rightarrow 2a+2a+|a|^2a=4|a|a$$
$$\Rightarrow(4+|a|^2)a=4|a|a\Rightarrow 4+|a|^2=4|a|\Rightarrow|a|^2-4|a|+4=0\Rightarrow(|a|-2)^2=0\Rightarrow|a|=2$$

راه‌حل دوم:

$$2e_a+2e_a+|a|a=4a$$

$$\text{می‌دانیم}\begin{cases}e_a=\frac{(4-|a|)}{4}a\\ e_a=\frac{1}{|a|}a\end{cases}\Rightarrow\frac{4-|a|}{4}=\frac{1}{|a|}\Rightarrow 4|a|-|a|^2=4\Rightarrow|a|^2-4|a|+4=0\Rightarrow|a|=2$$

Ⓒ **۴۷- گزینه‌ی (۴)** از آن‌جایی که $e_{a+i}=e_{a-i}$، می‌توان نتیجه گرفت که $a+i$ و $a-i$ با هم موازی و هم‌جهت هستند، بنابراین:

$$a+i\,||\,a-i\Rightarrow a+i=m(a-i)\xrightarrow{m>0}a+i=ma-mi\Rightarrow a=(\frac{m+1}{m-1})i\xrightarrow{i=(1,0,0)}a=(\frac{m+1}{m-1},0,0)$$

با این رابطه به سادگی می‌توان گزینه‌ی (۴) را رد کرد، زیرا اگر برداری بخواهد با هر سه محور زاویه‌ی مساوی بسازد باید سه مؤلفه‌ی آن با هم برابر باشند و این در حالی است که در بردار a فقط مؤلفه‌های y و z برابر شدند.

Ⓐ **۴۸- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم مجموع توان دوم کسینوس‌های زوایایی که یک بردار با محورهای مختصات می‌سازد همواره برابر ۱ می‌باشد، به عبارتی اگر α و β و γ زوایایی باشند که یک بردار با جهت مثبت محورهای مختصات می‌سازد آن‌گاه $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
بنابراین گزینه‌ای درست است که در این رابطه صدق کند. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱) $\Rightarrow\cos^2 120^\circ+\cos^2 60^\circ+\cos^2 90^\circ=(-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+0=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\neq 1$ نادرست

گزینه‌ی (۲) $\Rightarrow\cos^2 150^\circ+\cos^2 45^\circ+\cos^2 60^\circ=(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}\neq 1$ نادرست

گزینه‌ی (۳) $\Rightarrow\cos^2 60^\circ+\cos^2 120^\circ+\cos^2 45^\circ=(\frac{1}{2})^2+(\frac{-1}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=1$ درست

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است و نیازی به بررسی گزینه‌ی (۴) نیست.

Ⓑ **۴۹- گزینه‌ی (۲)** اگر α و β و γ زوایایی باشند که یک بردار با جهت مثبت محورهای مختصات می‌سازد، آن‌گاه بین این زوایا رابطه‌ی $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ برقرار است.

$$\cos^2 60^\circ+\cos^2 135^\circ+\cos^2\gamma=1\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\cos^2\gamma=1\Rightarrow\cos^2\gamma=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$$ دارای دو جواب می‌باشد.

از طرفی کسینوس‌های زوایای α، β و γ برابر مختصات بردار واحد است، پس داریم:

$$e_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\cos 60^\circ,\cos 135^\circ,\cos\gamma)=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{1}{2})$$

مسلماً مضارب e_a نیز بردارهایی با همین ویژگی هستند و $2e_a=(1,-\sqrt{2},\pm 1)$. پس گزینه‌ی (۲) درست است.

Ⓑ **۵۰- گزینه‌ی (۴)** اگر $a=(x,y,z)$ یک بردار باشد، آن‌گاه داریم:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|a|}\ ,\ \cos\beta=\frac{y}{|a|}\ ,\ \cos\gamma=\frac{z}{|a|}$$

از طرفی، زاویه‌های یک بردار با جهت مثبت محورهای مختصات کوچک‌تر و مساوی ۱۸۰ درجه است و در این محدوده کسینوس تابع نزولی است، پس هر چقدر مقدار کسینوس کوچک‌تر باشد، زاویه‌ی آن بزرگ‌تر است. داریم:

$$\cos\alpha=\frac{-3}{|a|}\ ,\ \cos\beta=\frac{5}{|a|}\ ,\ \cos\gamma=\frac{3}{|a|}$$

بنابراین $\cos\beta>\cos\gamma>\cos\alpha$ و چون کسینوس تابع نزولی است، پس: $\beta<\gamma<\alpha$

نکته: دقت کنید که ترتیب نوشتن بردار a به صورت ترکیب خطی در صورت این سؤال رعایت نشده است:

$$a=3k-3i+5j\Rightarrow a=-3i+5j+3k$$

Ⓑ **۵۱- گزینه‌ی (۲)** اگر α و β و γ زوایایی باشند که یک بردار با جهت مثبت محورهای مختصات می‌سازد، آن‌گاه:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$
$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\gamma=1\Rightarrow(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\cos^2\gamma=1\Rightarrow$$
$$1+\cos^2\gamma=1\Rightarrow\cos\gamma=0\Rightarrow\gamma=90^\circ$$

بنابراین برداری با این خصوصیت وجود دارد و مضارب مثبت آن نیز دارای این ویژگی هستند، یعنی این مسأله بیشمار جواب دارد، ولی بردار به طول یک فقط یکی می‌باشد.

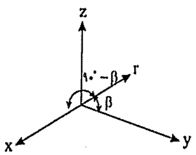
Ⓑ **۵۲- گزینه‌ی (۳)** اگر α زاویه‌ی بردار $a=(x,y,z)$ با جهت مثبت محور xها و γ زاویه‌ی این بردار با جهت مثبت محور zها باشد، داریم:

$$\cos\gamma=\frac{z}{|a|}\Rightarrow\cos 45^\circ=\frac{m}{\sqrt{2+m^2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{m}{\sqrt{2+m^2}}\Rightarrow 2+m^2=2m^2\Rightarrow m^2=2\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}\xrightarrow[\text{باشد}]{m\text{ باید مثبت}}m=\sqrt{2}$$
$$\cos\alpha=\frac{x}{|a|}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2+m^2}}=\frac{1}{2}$$

Ⓐ **۵۳- گزینه‌ی (۳)** زاویه‌ی بردار a با صفحه xoy برابر متمم زاویه‌ی a با محور zها است و زاویه‌ی بردار a با صفحه yoz برابر متمم زاویه‌ی a با محور xها است. پس اگر بردار a با دو صفحه‌ی xoy و yoz زوایایی مساوی بسازد، آن‌گاه بردار a با دو محور x و z نیز زوایای مساوی می‌سازد. بنابراین در بردار a دو مختص x و z برابر هم هستند، پس گزینه‌ی (۳) درست است.

Ⓒ **۵۴- گزینه‌ی (۱)** کسینوس زوایایی که یک بردار با محورهای مختصات می‌سازد، در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\xrightarrow[\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=\gamma\Rightarrow\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2}]{\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{4}=\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}}(\frac{\sqrt{2}}{4})^2+\cos^2\beta+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=1$$
$$\Rightarrow\frac{1}{8}+\cos^2\beta+\frac{3}{4}=1\Rightarrow\cos^2\beta=\frac{1}{8}\Rightarrow\cos\beta=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$



از طرفی زاویه‌ای که بردار r با صفحه‌ی xoz می‌سازد متمم زاویه‌ای است که بردار r با محور yها می‌سازد. به عبارتی اگر β زاویه‌ی بین بردار r با محور yها باشد، آن‌گاه $90^\circ-\beta$ زاویه‌ی بین بردار r با صفحه‌ی xoz است.

$$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\sin(90^\circ-\beta)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

اگر $\theta=90^\circ-\beta$ فرض شود، آن‌گاه $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$ و در نتیجه $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$، بنابراین $\theta=\cos^{-1}\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Ⓑ **۵۵- گزینه‌ی (۴)** اگر α، β و γ زوایایی باشند که بردار a با محورهای مختصات می‌سازد، آن‌گاه بین کسینوس‌های این زوایا رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\cos^2\gamma=1\Rightarrow\cos^2\gamma=\frac{9}{16}\Rightarrow\cos\gamma=\pm\frac{3}{4}$$

با توجه به فرض $90<\gamma$، نتیجه می‌گیریم $\cos\gamma=-\frac{3}{4}$. از طرفی مختصات بردار واحد برابر است با:

$$e_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4})\Rightarrow a=|a|e_a=4e_a=(2,\sqrt{3},-3)$$

Ⓒ **۵۶- گزینه‌ی (۱)** اگر α و β و γ زوایای هادی یک بردار باشند، می‌دانیم:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\xrightarrow{\alpha=150^\circ,\gamma=60^\circ}\cos^2 150^\circ+\cos^2\beta+\cos^2 60^\circ=1\Rightarrow\frac{3}{4}+\cos^2\beta+\frac{1}{4}=1\Rightarrow\cos\beta=0$$

از طرفی $\cos\beta=\frac{a_2}{|a|}$، لذا $a_2=0$. حال به سراغ عبارت داده شده می‌رویم. با توجه به این‌که $\cos\alpha=\frac{a_1}{|a|}$ پس $\frac{|a|}{a_1}=\frac{1}{\cos\alpha}$:

$$|a|(a_2-\frac{1}{a_1})=|a|a_2-\frac{|a|}{a_1}=|a|\times 0-\frac{1}{\cos\alpha}=0-\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(A) **۵۷- گزینه‌ی (۲)** اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر θ باشد، خواهیم داشت:

$$|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲|a||b|\cos\theta$$
$$a-b=(۱,\sqrt{۲},۰)\Rightarrow|a-b|=\sqrt{۳}$$
$$\sqrt{۳}^۲=۲^۲+۱^۲-۲(۲)(۱)\cos\theta\Rightarrow ۳=۵-۴\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۶۰^\circ$$

(B) **۵۸- گزینه‌ی (۴)** فرض کنید $|a-b|=|a|=|b|=x$. در این صورت خواهیم داشت:

$$|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲|a||b|\cos\theta\Rightarrow x^۲=x^۲+x^۲-۲x^۲\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۶۰^\circ$$

بردارهـای $۴|a||b|e_a$ و $\frac{۱۳}{۲}|b||a|e_b$ مـوازی و هم‌جهـت بردارهای a و b می‌باشـند. پس زاویه‌ی بین این دو بـردار همان زاویه‌ی بین بردارهای a و b است.

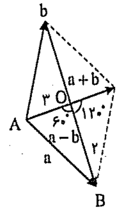
(B) **۵۹- گزینه‌ی (۳)** اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار a و b باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|a+b|^۲=|a|^۲+|b|^۲+۲|a||b|\cos\theta\\|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲|a||b|\cos\theta\end{array}\right\}\Rightarrow|a+b|^۲+|a-b|^۲=۲|a|^۲+۲|b|^۲$$
$$\Rightarrow ۲۴^۲+|a-b|^۲=۲(۱۳)^۲+۲(۱۹)^۲\Rightarrow|a-b|^۲=۲\times۱۶۹+۲\times۳۶۱-۵۷۶$$
$$\Rightarrow|a-b|^۲=۳۳۸+۷۲۲-۵۷۶\Rightarrow|a-b|^۲=۴۸۴\Rightarrow|a-b|=۲۲$$

(C) **۶۰- گزینه‌ی (۳)** **راه‌حل اول:** مجموع دو بردار $a+b$ و $a-b$ برابر بردار $۲a$ می‌باشد.

$$۲a=(a+b)+(a-b)\Rightarrow|۲a|=|(a+b)+(a-b)|$$
$$\Rightarrow ۲|a|=\sqrt{|a+b|^۲+|a-b|^۲-۲|a+b||a-b|\cos۱۲۰^\circ}\Rightarrow ۲|a|=\sqrt{۳۶+۱۶-۲(۴)(۶)(-\frac{۱}{۲})}$$
$$\Rightarrow ۲|a|=\sqrt{۵۲-۲۴}\Rightarrow ۲|a|=\sqrt{۲۸}\Rightarrow ۲|a|=۲\sqrt{۷}\Rightarrow|a|=\sqrt{۷}$$

راه‌حل دوم: با توجه به شکل مقابل، در مثلث OAB بنابر قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:



$$AB^۲=OA^۲+OB^۲-۲OA\times OB\cos۶۰^\circ$$
$$|a|^۲=۳^۲+۲^۲-۲(۳)(۲)(\frac{۱}{۲})\Rightarrow|a|^۲=۹+۴-۶=۷\Rightarrow|a|=\sqrt{۷}$$

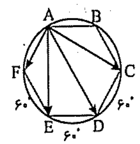
(A) **۶۱- گزینه‌ی (۲)** **راه‌حل اول:** بردارهای e_a و e_b بردار واحد هستند، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|e_a+e_b|=\sqrt{\underbrace{|e_a|^۲}_{۱}+\underbrace{|e_b|^۲}_{۱}+۲\underbrace{|e_a|}_{۱}\underbrace{|e_b|}_{۱}\underbrace{\cos۶۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}}}=\sqrt{۲+۱}=\sqrt{۳}\\|e_a-e_b|=\sqrt{\underbrace{|e_a|^۲}_{۱}+\underbrace{|e_b|^۲}_{۱}-۲\underbrace{|e_a|}_{۱}\underbrace{|e_b|}_{۱}\underbrace{\cos۶۰^\circ}_{\frac{۱}{۲}}}=۱\end{array}\right.\Rightarrow\frac{|e_a+e_b|}{|e_a-e_b|}=\frac{\sqrt{۳}}{۱}=\sqrt{۳}$$

راه‌حل دوم:

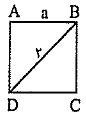
$$|e_a|=|e_b|\Rightarrow\begin{cases}|e_a+e_b|=۲|e_a|\cos\frac{\theta}{۲}\\|e_a-e_b|=۲|e_a|\sin\frac{\theta}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{|e_a+e_b|}{|e_a-e_b|}=\frac{۲|e_a|\cos\frac{\theta}{۲}}{۲|e_a|\sin\frac{\theta}{۲}}=\cot\frac{\theta}{۲}=\cot۳۰^\circ=\sqrt{۳}$$

(B) **۶۲- گزینه‌ی (۳)** هر شـش‌ضلعی منتظم در یک دایره محاط اسـت و آن دایره به شـش قسـمت مساوی تقسیم می‌شود، پس اندازه‌ی هر قسمت ۶۰ درجه است. در ضمن در شش‌ضلعی منتظم به ضلع a اندازه‌ی قطر بزرگ $۲a$ و اندازه‌ی قطر کوچک $a\sqrt{۳}$ است. پس در این‌جا $F\hat{A}C=۹۰^\circ$، $E\hat{A}D=۳۰^\circ$، $AD=۲$ و $AE=\sqrt{۳}$.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AF}|\cos۹۰^\circ=۰\\\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AE}|\cos۳۰^\circ=(۲)(\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=۳\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}=۳$$

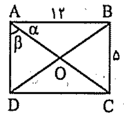
(A) **۶۳- گزینه‌ی (۳)** با توجه به شکل مقابل داریم:



$$BD=۲\xrightarrow{BD=\sqrt{۲}a}a\sqrt{۲}=۲\Rightarrow a=\sqrt{۲}$$ ضلع مربع

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos۴۵^\circ=\sqrt{۲}\times۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۲$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^۲=(\sqrt{۲})^۲=۲\ ,\quad\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos۹۰^\circ=۰$$
$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=۲+۲+۰=۴$$

(B) **۶۴- گزینه‌ی (۱)** **راه‌حل اول:** در این مستطیل، قطر AC برابر $۱۳=\sqrt{۱۲^۲+۵^۲}$ است و می‌دانیم در مستطیل قطرها مساوی و منصف هستند، بنابراین داریم:

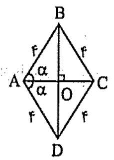


$$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos\alpha=\frac{۱۳}{۲}\times۱۲\times\frac{AB}{AC}=۱۳\times۶\times\frac{۱۲}{۱۳}=۷۲$$
$$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AD}|\cos\beta=\frac{۱۳}{۲}\times۵\times\frac{AD}{AC}=\frac{۱۳}{۲}\times۵\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۲۵}{۲}$$
$$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}=۷۲+\frac{۲۵}{۲}=\frac{۱۴۴+۲۵}{۲}=\frac{۱۶۹}{۲}$$

راه‌حل دوم:

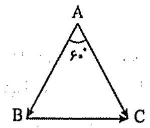
$$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AC}|=\frac{۱۳}{۲}\times۱۳=\frac{۱۶۹}{۲}$$

(A) **۶۵- گزینه‌ی (۱)** در لوزی طول ضلع‌ها مساوی‌اند، پس طول پاره‌خط‌های DC، AD و AC برابر ۴ است. بنابراین مثلث ADC متساوی‌الاضلاع است، پس $\alpha=۶۰^\circ$ و داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos۶۰^\circ=۴\times۴\times\frac{۱}{۲}=۸\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos۱۲۰^\circ=۴\times۴\times\frac{-۱}{۲}=-۸\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=۰$$

(A) **۶۶- گزینه‌ی (۲)** در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، زاویه‌ی بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ برابر ۱۲۰ درجه است، زیرا دو پیکان باید از یک نقطه شروع شوند. به همین دلیل زاویه‌ی بین $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CA}$ نیز ۱۲۰ درجه است، ولی زاویه‌ی بین $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{BA}$ برابر ۶۰ درجه است. داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos۱۲۰^\circ=(a)(a)(-\frac{۱}{۲})=\frac{-a^۲}{۲}\\\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|\cos۱۲۰^\circ=(a)(a)(-\frac{۱}{۲})=-\frac{a^۲}{۲}\\\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BA}|\cos۶۰^\circ=(a)(a)(\frac{۱}{۲})=\frac{a^۲}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}=\frac{-a^۲}{۲}$$

(B) **۶۷- گزینه‌ی (۴)** اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار a و b باشد، می‌دانیم:

$$|a+b|^۲=|a|^۲+|b|^۲+۲|a||b|\cos\theta$$

از طرفی $|a||b|\cos\theta$ برابر $a.b$ می‌باشد، پس رابطه‌ی بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$|a+b|^۲=|a|^۲+|b|^۲+۲a.b$$

به همین ترتیب می‌توان نوشت: $|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲a.b$، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}|a+b|^۲=|a|^۲+|b|^۲+۲a.b\\|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲a.b\end{array}\right\}\Rightarrow|a+b|^۲-|a-b|^۲=۴a.b\qquad(۱)$$

از فرض تست نتیجه می‌گیریم $|a+b|=۶$ و $|a-b|=۴$. پس از رابطه‌ی (۱) داریم:

$$|a+b|^۲-|a-b|^۲=۴a.b\Rightarrow۶^۲-۴^۲=۴a.b\Rightarrow a.b=۵$$

* توجه: بد نیست که دو رابطه‌ی زیر را در خاطر داشته باشیم:

۱) $|a+b|^۲+|a-b|^۲=۲(|a|^۲+|b|^۲)$ ۲) $|a+b|^۲-|a-b|^۲=۴a.b$

(A) **۶۸- گزینه‌ی (۳)** حاصل‌ضرب داخلی دو بردار a و b را به کمک رابطه‌ی $a.b=xx'+yy'+zz'$ به‌دست می‌آوریم:

$$a.b=-۴m-۳+m+۱=-۳m-۲\xrightarrow{a.b=۱}-۳m-۲=۱\Rightarrow m=-۱$$

(B) **۶۹- گزینه‌ی (۳)** **راه‌حل اول،** اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و b منفرجه باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها منفی است. در این تست ابتدا مختصات بردارهای a و b را به‌دست می‌آوریم.

$$a+b=(x-3, x, 1)$$
$$a-b=(x+1, 4, x-1)$$

از جمع دو رابطه $\Rightarrow 2a=(2x-2, x+4, x)\Rightarrow a=(x-1, \frac{x+4}{2}, \frac{x}{2})$

از تفاضل دو رابطه $\Rightarrow 2b=(-4, x-4, 2-x)\Rightarrow b=(-2, \frac{x-4}{2}, \frac{2-x}{2})$

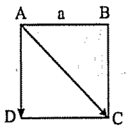
زاویه‌ی بین a و b منفرجه $\Rightarrow a.b<0\Rightarrow -2x+2+\frac{x^2-16}{4}+\frac{2x-x^2}{4}<0$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را در ۴ ضرب می‌کنیم}} -8x+8+x^2-16+2x-x^2<0\Rightarrow -6x-8<0\Rightarrow -6x<8\Rightarrow x>-\frac{4}{3}$$

راه‌حل دوم، از منفرجه بودن زاویه‌ی بین دو بردار a و b می‌توان نتیجه گرفت که $|a+b|<|a-b|$ لذا،

$$\sqrt{(x-3)^2+x^2+1}<\sqrt{(x+1)^2+16+(x-1)^2}\xrightarrow{\text{توان ۲}}(x-3)^2+x^2+1<(x+1)^2+16+(x-1)^2\Rightarrow -\frac{4}{3}<x$$

(A) **۷۰- گزینه‌ی (۲)** در مربع $ABCD$، نقاط A و C دو سر قطر هستند. پس اگر a ضلع مربع باشد، اندازه AC برابر $a\sqrt{2}$ است.



$$AC=\sqrt{(2-2)^2+(-2-1)^2+(3+1)^2}=\sqrt{9+16}=5\Rightarrow \sqrt{2}\,a=5\Rightarrow a=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

از طرفی، در مربع قطر نیمساز است، پس زاویه‌ی بین $\overline{AC}$ و $\overline{AD}$ برابر ۴۵ درجه می‌باشد.

$$\overline{AC}.\overline{AD}=|\overline{AC}||\overline{AD}|\cos 45^\circ=(5)(\frac{5}{\sqrt{2}})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{25}{2}$$

(B) **۷۱- گزینه‌ی (۲)** بردارهای j و k بردارهای واحد محورهای y و z هستند. چون $j=(0,1,0)$ و $k=(0,0,1)$، پس $a.j$ برابر عرض بردار a و $b.k$ برابر ارتفاع بردار b می‌باشد.

$$a=(1, m, 2)\Rightarrow a.j=m\xrightarrow{a.j=2} m=2\Rightarrow a=(1, 2, 2)$$
$$b=(-2, 1, n)\Rightarrow b.k=n\xrightarrow{b.k=-2} n=-2\Rightarrow b=(-2, 1, -2)$$

اندازه‌ی دو بردار a و b برابر و مساوی ۳ می‌باشد، بنابراین $a+b$ و مضارب غیرصفر آن در راستای نیمساز زاویه‌ی بین a و b هستند، زیرا $a+b$ قطر یک لوزی است که دو بردار هم اندازه‌ی a و b دو ضلع آن لوزی هستند.

$$a+b=(1, 2, 2)+(-2, 1, -2)=(-1, 3, 0)$$

(C) **۷۲- گزینه‌ی (۳)** فرض کنید $M(x, y, z)$ نقطه‌ای از فضا است.

$$\overline{AM}=M-A=(x-1, y+1, z-2)\ ,\ \overline{BM}=M-B=(x-3, y-1, z+2)$$
$$\overline{AM}.\overline{BM}=3\Rightarrow (x-1)(x-3)+(y+1)(y-1)+(z-2)(z+2)=3\Rightarrow x^2-4x+3+y^2-1+z^2-4=3$$
$$\Rightarrow x^2-4x+y^2+z^2=5 \quad (1)$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی M از نقطه‌ی $(2,0,0)$ برابر $\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}$ است. بنابراین از رابطه‌ی (۱) باید عبارت فوق را به‌دست آوریم. به همین علت رابطه‌ی (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}+y^2+z^2=4+5=9\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}=3$$

پس فاصله‌ی M از نقطه $(2,0,0)$ برابر ۳ می‌باشد.

(A) **۷۳- گزینه‌ی (۳)** اگر بردارهای a و b دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع باشند، آن‌گاه بردارهای $a+b$ و $a-b$ دو قطر آن خواهند بود.

$$a+b=4i+2j-2k \quad , \quad a-b=2i+4j+2k$$

فرض کنید θ زاویه‌ی بین بردارهای $a+b$ و $a-b$ است. داریم:

$$\cos\theta=\frac{(a+b).(a-b)}{|a+b||a-b|}=\frac{8+8-4}{\sqrt{16+4+4}\sqrt{4+16+4}}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$$

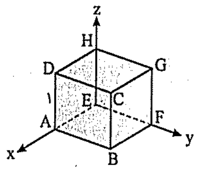
(A) **۷۴- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار a و b باشد، آن‌گاه $\cos\theta=\frac{a.b}{|a||b|}$. ابتدا از فرض $a.b=7$ استفاده می‌کنیم و m را به‌دست می‌آوریم:

$$a.b=7\Rightarrow 3m-2m+6m=7\Rightarrow m=1$$

بنابراین $a=(1,2,3)$ و $b=(3,-1,2)$ در نتیجه $|a|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$ و $|b|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$، بنابراین داریم:

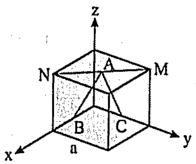
$$\cos\theta=\frac{a.b}{|a||b|}=\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

(C) **۷۵- گزینه‌ی (۲)** محورهای مختصات را در راستای سه یال مکعب در نظر می‌گیریم. در این‌صورت رأس E مبدأ مختصات خواهد بود. با توجه به شکل، مختصات همه رئوس مکعب از جمله چند نقطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.



$$\left.\begin{array}{l}A(1,0,0)\\ G(0,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{AG}=G-A=(-1,1,1)$$
$$\left.\begin{array}{l}H(0,0,1)\\ B(1,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{HB}=B-H=(1,1,-1)$$
$$\overline{AG}.\overline{HB}=(-1,1,1).(1,1,-1)=-1+1-1=-1$$

(B) **۷۶- گزینه‌ی (۴)** فرض کنید اندازه‌ی یال مکعب برابر a است. نقطه‌ی A وسط قطر MN قرار دارد. مختصات سه نقطه‌ی A، B و C را در این دستگاه به‌دست می‌آوریم. چون A وسط MN است، داریم:



$$\begin{array}{l}M(0,a,a)\\ N(a,0,a)\end{array}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=\frac{M+N}{2}=(\frac{a}{2},\frac{a}{2},a)\\ B(\frac{a}{2},0,0)\\ C(0,\frac{a}{2},0)\end{array}\right.$$

برای به‌دست آوردن کسینوس زاویه‌ی BAC به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{l}\overline{AB}=(0,-\frac{a}{2},-a)\\ \overline{AC}=(-\frac{a}{2},0,-a)\end{array}\Rightarrow\cos B\hat{A}C=\frac{\overline{AB}.\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|}=\frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}}=\frac{a^2}{\frac{5}{4}a^2}=\frac{4}{5}$$

(B) **۷۷- گزینه‌ی (۱)** حاصل‌ضرب داخلی دو بردار a و b صفر است، بنابراین دو بردار a و b بر هم عمودند یعنی زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر ۹۰ درجه است، بنابراین داریم:

$$|3a+2b|=\sqrt{|3a|^2+|2b|^2+\underbrace{2|3a||2b|\cos 90^\circ}_{0}}=\sqrt{|3a|^2+|2b|^2}$$
$$|3a-2b|=\sqrt{|3a|^2+|2b|^2-\underbrace{2|3a||2b|\cos 90^\circ}_{0}}=\sqrt{|3a|^2+|2b|^2}$$

بنابراین بردارهای $3a+2b$ و $3a-2b$ هم‌اندازه هستند.

$$|3a+2b|=|3a-2b|\Rightarrow\sqrt{4^2+m^2+(-1)^2}=\sqrt{(2m)^2+2^2+1^2}\Rightarrow 16+m^2+1=4m^2+4+1\Rightarrow 3m^2=12\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$$

نکته به طور کلی، اگر $a\perp b$ (یعنی $a.b=0$)، آن‌گاه بردارهای $ma+nb$ و $ma-nb$ هم‌اندازه هستند.

(B) **۷۸- گزینه‌ی (۴)** حاصل‌ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم صفر است.

$$(2a+b)\perp a\Rightarrow a.(2a+b)=0\Rightarrow 2a.a+a.b=0\Rightarrow 2|a|^2+|a||b|\cos 120^\circ=0$$
$$\Rightarrow 2|a|^2+|a||b|(-\frac{1}{2})=0\Rightarrow 2|a|=\frac{1}{2}|b|\Rightarrow\frac{|a|}{|b|}=\frac{1}{4}$$

(A) **۷۹- گزینه‌ی (۲)** می‌دانیم ضرب داخلی روی جمع بردارها خاصیت پخش‌پذیری دارد.

$$(a+2b).(3a+b)=3a.a+a.b+6a.b+2b.b=3|a|^2+7a.b+2|b|^2=3(4)+7(4)+2(9)=12+28+18=58$$

۸۰- گزینه‌ی (۱) از $a.b=0$ نتیجه می‌گیریم $a\perp b$، و از آن‌جاکه $|a|=|b|=2$ پس $a+b$ و $a-b$ قطرهای یک مربع و در نتیجه هم‌اندازه هستند، یعنی $|a+b|=|a-b|$، پس $|a+b|-|a-b|=0$.

۸۱- گزینه‌ی (۴) فرض کنید زاویه‌ی بین بردارهای a و b برابر θ است. در این صورت

$$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\theta \xrightarrow{a.b=|a||b|\cos\theta} |a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2a.b$$
$$\xrightarrow[|a|=|b|=1]{|a+b|=\sqrt{3}} 3=1+1+2a.b \Rightarrow a.b=\frac{1}{2}$$

چون ضرب داخلی روی جمع و تفریق بردارها خاصیت پخش‌پذیری دارد، نتیجه می‌گیریم:

$$(3a-4b).(2a+5b)=6a.a+15a.b-8a.b-20b.b \xrightarrow[b.b=|b|^2]{a.a=|a|^2} (3a-4b).(2a+5b)=6|a|^2-20|b|^2+7a.b$$
$$=6-20+\frac{7}{2}=\frac{-21}{2}$$

۸۲- گزینه‌ی (۳) حاصل‌ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم صفر است، پس داریم:

$$(3a-2b)\perp(a+4b)\Rightarrow(3a-2b).(a+4b)=0$$
$$\Rightarrow 3a.a+12a.b-2a.b-8b.b=0 \xrightarrow[b.b=|b|^2]{a.a=|a|^2} 3|a|^2+10a.b-8|b|^2=0 \quad (1)$$

چون $|a|=2|b|$، با جای‌گذاری آن در رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$3(2|b|)^2+10a.b-8|b|^2=0\Rightarrow 10a.b=-4|b|^2$$

اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار a و b باشد، آن‌گاه $a.b=|a||b|\cos\theta$، پس داریم:

$$10a.b=-4|b|^2\Rightarrow 10|a||b|\cos\theta=-4|b|^2 \xrightarrow{|a|=2|b|} 20|b|^2\cos\theta=-4|b|^2\Rightarrow\cos\theta=-\frac{1}{5}$$

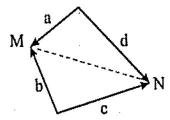
۸۳- گزینه‌ی (۳)

$$|a+b+c|^2=(a+b+c).(a+b+c)=|a|^2+|b|^2+|c|^2+\underbrace{2a.b}_{0}+\underbrace{2a.c}_{0}+\underbrace{2b.c}_{0}=4+9+36=49 \Rightarrow |a+b+c|=7$$

۸۴- گزینه‌ی (۱)

$$a+b+c=o \Rightarrow (a+b+c).(a+b+c)=0\Rightarrow|a|^2+|b|^2+|c|^2+2(a.b+a.c+b.c)=0 \Rightarrow 9+16+49+2(a.b+a.c+b.c)=0$$
$$\Rightarrow a.b+a.c+b.c=-37$$

۸۵- گزینه‌ی (۴) اگر از نقطه‌ی M به نقطه‌ی N وصل کنیم، آن‌گاه با توجه به شکل داریم:



$$\left.\begin{array}{l} a-d=\overrightarrow{NM} \\ b-c=\overrightarrow{NM}\end{array}\right\}\Rightarrow a-d=b-c\Rightarrow a+c=b+d$$
$$\Rightarrow(a+c).(a+c)=(b+d).(b+d)\Rightarrow\underbrace{|a|^2}_{1}+\underbrace{|c|^2}_{9}+2a.c=\underbrace{|b|^2}_{4}+\underbrace{|d|^2}_{16}+2b.d$$
$$\Rightarrow 10+2a.c=20+2b.d\Rightarrow 2a.c-2b.d=10\Rightarrow a.c-b.d=5$$

۸۶- گزینه‌ی (۲) **راه‌حل اول،** ابتدا مقدار $|a+2b-3c|^2$ را به‌دست می‌آوریم و سپس از حاصل آن جذر می‌گیریم:

$$|a+2b-3c|^2=(a+2b-3c).(a+2b-3c)=|a|^2+4|b|^2+9|c|^2+4a.b-6a.c-12b.c$$

چون بردارهای a ، b و c دو به دو بر هم عمودند، پس $a.b=b.c=a.c=0$ و داریم:

$$|a+2b-3c|^2=|a|^2+4|b|^2+9|c|^2 \xrightarrow{|a|=|b|=|c|=1} |a+2b-3c|^2=14\Rightarrow|a+2b-3c|=\sqrt{14}$$

راه‌حل دوم، در این قسمت فرض می‌کنیم بردارهای a ، b و c در حالت خاص بردارهای i، j و k هستند. در این صورت باید اندازه‌ی بردار $i+2j-3k$ را به‌دست آورد که برابر $\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ است.

۸۷- گزینه‌ی (۳) می‌دانیم $|a-2b+c|^2$ برابر $(a-2b+c).(a-2b+c)$ است. پس:

$$|a-2b+c|^2=(a-2b+c).(a-2b+c)=|a|^2+4|b|^2+|c|^2-4a.b+2a.c-4b.c \quad (1)$$

توجه کنید زاویه‌ی بین a و c قائمه است، پس $a.c=0$. از طرفی، زاویه‌ی بین b و a برابر 60° می‌باشد، پس $a.b=|a||b|\cos 60^\circ$ و زاویه‌ی بین b و c برابر 60° است پس $b.c=|b||c|\cos 60^\circ$ و با جای‌گذاری در رابطه‌ی (۱) داریم:

$$|a-2b+c|^2=4^2+4(4)^2+4^2-4(4)(4)(\frac{1}{2})+0-4(4)(4)(\frac{1}{2})=16+64+16-32-32=32\Rightarrow|a-2b+c|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

۸۸- گزینه‌ی (۲) می‌دانیم ضرب داخلی روی جمع بردارها خاصیت پخش‌پذیری دارد، یعنی $a.(b+c)=a.b+a.c$ داریم:

$$a.b+a.c=a.(b+c) \xrightarrow[b+c=-a]{a+b+c=o} a.b+a.c=a.(-a)=-|a|^2$$

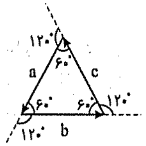
چون $a=2i-j+2k$ پس $|a|=\sqrt{4+1+4}=3$ و داریم:

$$a.b+a.c=-|a|^2=-3^2=-9$$

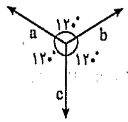
۸۹- گزینه‌ی (۳) ضرب داخلی روی جمع بردارها خاصیت پخش‌پذیری دارد. به همین دلیل داریم:

$$a+2b+c=o\Rightarrow a+b+c=-b\Rightarrow(a+b+c).(a+b+c)=(-b).(-b)$$
$$\Rightarrow\underbrace{|a|^2}_{4}+|b|^2+\underbrace{|c|^2}_{1}+2a.b+2a.c+2b.c=|b|^2\Rightarrow 2(a.b+a.c+b.c)=-5\Rightarrow a.b+a.c+b.c=\frac{-5}{2}$$

۹۰- گزینه‌ی (۲) مجموع بردارهای هم‌طول a ، b و c برابر صفر است، بنابراین بردارهای a ، b و c با هم تشکیل یک مثلث می‌دهند. از طرفی اندازه‌ی این بردارها برابر ۱ می‌باشد، پس این مثلث، متساوی‌الاضلاع است. بنابراین زاویه‌ی بین دوبه‌دوی این بردارها برابر ۱۲۰ درجه است.



در حقیقت چون بردارها از مبدأ شروع می‌شوند، شکل واقعی آن‌ها به صورت مقابل است:



حال از رابطه‌ی $a.a=|a|^2$ استفاده می‌کنیم:

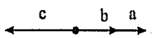
$$|2a-3b+c|^2=(2a-3b+c).(2a-3b+c)=4\underbrace{|a|^2}_{1}+9\underbrace{|b|^2}_{1}+\underbrace{|c|^2}_{1}-12\underbrace{a.b}_{|a||b|\cos 120^\circ}+4\underbrace{a.c}_{|a||c|\cos 120^\circ}-6\underbrace{b.c}_{|b||c|\cos 120^\circ}$$
$$\Rightarrow|2a-3b+c|^2=4+9+1-12(-\frac{1}{2})+4(-\frac{1}{2})-6(-\frac{1}{2})=14+6-2+3=21\Rightarrow|2a-3b+c|=\sqrt{21}$$

می‌توانستیم از این مطلب که «اگر جمع n بردار هم‌طول برابر صفر باشد، زاویه‌ی بین این n بردار برابر $(\frac{360}{n})^\circ$ است» هم در حل این مسأله استفاده کنیم.

۹۱- گزینه‌ی (۱) **راه‌حل اول،** با توجه به رابطه‌ی داده شده در صورت سؤال داریم:

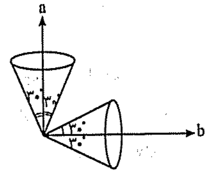
$$a+3b+2c=0\Rightarrow a+b+c=-2b-c\Rightarrow(a+b+c).(a+b+c)=(-2b-c).(-2b-c)$$
$$\Rightarrow|a|^2+|b|^2+|c|^2+2a.b+2a.c+2b.c=4|b|^2+|c|^2+4b.c$$
$$\Rightarrow 2a.b+2a.c-2b.c=3|b|^2-|a|^2\Rightarrow 2(a.b+a.c-b.c)=3(1)^2-(3)^2\Rightarrow a.b+a.c+b.c=-3$$

راه‌حل دوم، فرض کنید اندازه‌ی بردار c برابر ۳ و بردار c غیرهم‌جهت با بردارهای a و b است. در این‌صورت $a+3b+2c$ برابر صفر خواهد بود و داریم:



$$\left.\begin{array}{l} a.b=|a||b|\cos 0^\circ=3\times1\times1=3 \\ a.c=|a||c|\cos 180^\circ=3\times3\times(-1)=-9 \\ b.c=|b||c|\cos 180^\circ=1\times3\times(-1)=-3\end{array}\right\}\Rightarrow a.b+a.c-b.c=3-9+3=-3$$

Ⓒ **۹۲- گزینه‌ی (۱)** ابتدا زاویه‌ی بین دو بردار را به‌دست می‌آوریم:



$a.b=0 \Rightarrow \theta=90^\circ \rightarrow$ دو بردار بر هم عمودند

مجموعه بردارهایی که با بردار a زاویه‌ی 30° می‌سازند، مولدهای یک رویه‌ی مخروطی با محور a و زاویه‌ی رأس 60° می‌باشند. به‌طور مشابه برای بردار b نیز مولدهای یک رویه‌ی مخروطی با محور b و زاویه‌ی رأس 60° هستند. برای پیداکردنِ برداری که با هر دو بردار a و b زاویه‌ی 30° بسازد باید بردارهایی را بیابیم که روی هر دو رویه قرار دارند. به‌سادگی دیده می‌شود که $30+30=60$ و $60^\circ<90^\circ$، پس این دو سطح مخروطی یکدیگر را قطع نمی‌کنند. پس چنین برداری وجود ندارد.

Ⓑ **۹۳- گزینه‌ی (۴)** فرض کنید $a=(x, y, z)$ و $b=(\sqrt{2}, \sqrt{3}, -2)$. در این صورت با توجه به نامساوی کشی - شوارتس داریم:

$$|a.b|\le|a||b| \Rightarrow |\underbrace{\sqrt{2}x+\sqrt{3}y-2z}_{72}|\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\underbrace{\sqrt{2+3+4}}_{3} \Rightarrow \frac{72}{3}\le\sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow 24\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ برابر ۲۴ می‌باشد.

Ⓒ **۹۴- گزینه‌ی (۳)** فرض کنید $a=(2x, y, \sqrt{2}z)$ و $b=(2, 2, -\sqrt{2})$. در این صورت بنابر نامساوی کشی - شوارتس داریم:

$$|a.b|\le|a||b| \Rightarrow |4x+2y-2z|\le\sqrt{\underbrace{4x^2+y^2+2z^2}_{40}}\sqrt{\underbrace{4+4+2}_{10}} \Rightarrow |4x+2y-2z|\le 20$$

بنابراین حداکثر عبارت $4x+2y-2z$ برابر ۲۰ می‌باشد.

Ⓒ **۹۵- گزینه‌ی (۲)** فرض کنید $a=(x+1, y-1, z+2)$ و $b=(2, -1, 2)$. در این صورت بنابر نامساوی کشی - شوارتس داریم:

$$|a.b|\le|a||b| \Rightarrow |2x+2-y+1+2z+4|\le\sqrt{\underbrace{(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2}_{36}}\sqrt{\underbrace{4+1+4}_{9}} \Rightarrow |2x-y+2z+7|\le 6\times 3$$

$$\Rightarrow 2x-y+2z+7\le 18 \Rightarrow 2x-y+2z\le 11$$

Ⓑ **۹۶- گزینه‌ی (۴)** اگر $a=(x, y, z)$، آن‌گاه $a.i=x$ و $a.j=y$ و $a.k=z$. پس بنابر فرض تست $x=4$، $y=-2$ و $z=4$. بنابراین $a=(4, -2, 4)$. حال بنابر نامساوی کشی - شوارتس داریم:

$$|a.b|\le|a||b| \Rightarrow |-8|\le\sqrt{\underbrace{16+4+16}_{36}}\,|b| \Rightarrow \frac{8}{6}\le|b| \Rightarrow \frac{4}{3}\le|b|$$

پس حداقل $|b|$ برابر $\frac{4}{3}$ می‌باشد.

Ⓑ **۹۷- گزینه‌ی (۳)** بنابر فرض $|OM|=4$. پس $\sqrt{a^2+b^2+\frac{c^2}{4}}=4$. حال فرض کنید $u=(a, b, \frac{c}{2})$ و $v=(1, 2, 6)$ در این صورت با توجه به نامساوی کشی - شوارتس داریم:

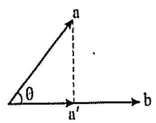
$$|u.v|\le|u||v| \Rightarrow |a+2b+3c|\le\underbrace{\sqrt{a^2+b^2+\frac{c^2}{4}}}_{4}\,\underbrace{\sqrt{1+4+36}}_{\sqrt{41}} \Rightarrow |a+2b+3c|\le 4\sqrt{41}$$

Ⓑ **۹۸- گزینه‌ی (۱)** اگر a، b و c یال‌های مکعب مستطیل باشند، آن‌گاه قطر مکعب مستطیل برابر $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ است. حال فرض کنید $u=(a, b, c)$ و $v=(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. در این صورت بنابر نامساوی کشی - شوارتس داریم:

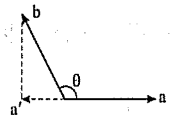
$$|u.v|\le|u||v| \Rightarrow |\underbrace{2a-\frac{1}{2}b+\frac{c}{2}}_{18}|\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{4+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} \Rightarrow 18\le\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow 6\sqrt{2}\le\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

بنابراین حداقل طول قطر مکعب مستطیل برابر $6\sqrt{2}$ می‌باشد.

Ⓐ **۹۹- گزینه‌ی (۳)** اگر a' تصویر قائم a بر امتداد بردار b باشد و زاویه‌ی بین دو بردار حاده باشد، آن‌گاه $|a'|=|a|\cos\theta$ پس $a.b=|b||a'|$ داریم:

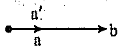


$$a.b=|b||a'| \xrightarrow[|b|=3]{|a'|=2} a.b=3\times 2=6$$



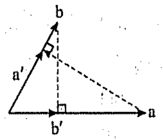
در صورتی که θ زاویه‌ای منفرجه باشد، آن‌گاه اندازه‌ی جبری تصویر قائم a بر امتداد b برابر ۲- خواهد بود، پس $a.b=-6$.

Ⓑ **۱۰۰- گزینه‌ی (۱)** توجه کنید $|a|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$ از طرفی $|a'|=\sqrt{14}$ پس دو بردار a و b با هم موازی‌اند، بنابراین نسبت مختصات آن‌ها برابر است.



$$a\parallel b \Rightarrow \frac{2}{-1}=\frac{-1}{m}=\frac{3}{n} \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ n=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow m+n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$$

Ⓑ **۱۰۱- گزینه‌ی (۱)** **راه‌حل اول:** با توجه به شکل درمی‌یابیم اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر ۶۰ درجه باشد، آن‌گاه زاویه‌ی بین دو بردار a' و b' نیز ۶۰ درجه خواهد بود. از طرفی داریم:



$$|a'|=|a|\cos 60^\circ \quad , \quad |b'|=|b|\cos 60^\circ \quad (1)$$

$$a'.b'=|a'||b'|\cos 60^\circ \xrightarrow{(1)} a'.b'=(|a|\cos 60^\circ)(|b|\cos 60^\circ)\cos 60^\circ$$

$$=(\underbrace{|a||b|\cos 60^\circ}_{a.b})\cos^2 60 \Rightarrow a'.b'=4\times(\frac{1}{2})^2=1$$

راه‌حل دوم: می‌دانیم $|a'|=\frac{|a.b|}{|b|}$ و $|b'|=\frac{|a.b|}{|a|}$. به همین دلیل داریم:

$$a'.b'=|a'||b'|\cos\theta=\frac{|a.b|}{|b|}\times\frac{|a.b|}{|a|}\times\cos\theta=\frac{|a||b|\cos\theta}{|b|}\times\frac{|a.b|}{|a|}\times\cos\theta=|a.b|\cos\theta\cos\theta=4\times(\frac{1}{2})^2=1$$

Ⓐ **۱۰۲- گزینه‌ی (۳)** می‌دانیم $a'=\frac{a.b}{|b|^2}b$. پس $|a'|=\frac{|a.b|}{|b|}$. بنابر فرض تست $|a'|=|b|$. در نتیجه $|b|=\frac{|a.b|}{|b|}$ و $|a.b|=|b|^2$ یا به عبارتی $|a.b|=b.b$.

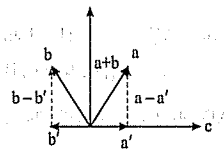
Ⓐ **۱۰۳- گزینه‌ی (۱)** می‌دانیم $a'=\frac{a.b}{|b|^2}b$. پس داریم:

$$a'=\frac{a.b}{|b|^2}b \xrightarrow{a'=4b} 4b=\frac{a.b}{|b|^2}b \Rightarrow \frac{a.b}{|b|^2}=4 \xrightarrow{|b|=2} a.b=16$$

از طرفی، ضرب داخلی روی جمع بردارها خاصیت پخش‌پذیری دارد، پس نتیجه می‌گیریم:

$$b.(a+b)=b.a+b.b=b.a+|b|^2=16+4=20$$

Ⓒ **۱۰۴- گزینه‌ی (۲)** **راه‌حل اول:** فرض کنید a' تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار c و b' تصویر قائم b بر امتداد بردار c است و $a'=-b'$. می‌دانیم $a'=\frac{a.c}{|c|^2}c$ و $b'=\frac{b.c}{|c|^2}c$ و داریم:



$$a'=-b' \Rightarrow \frac{a.c}{|c|^2}c=-\frac{b.c}{|c|^2} \Rightarrow (a.c)c+(b.c)c=0 \Rightarrow (a.c+b.c)c=0$$

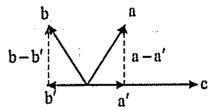
چون بردار c غیرصفر است، پس لازم است $a.c+b.c=0$. بنابراین $(a+b).c=0$، یعنی بردار a+b بر بردار c عمود می‌باشد. پس گزینه‌ای می‌تواند a+b باشد که بر بردار c عمود باشد. حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $(2, 1, -1).(2, -1, 2)=4-1-2\neq 0$، پس گزینه‌ی (۱) درست نیست.

گزینه‌ی (۲): $(1, 1, -\frac{1}{2}).(2, -1, 2)=2-1-1=0$، پس گزینه‌ی (۲) درست است.

بنابراین نیازی به بررسی گزینه‌های بعدی نیست.

از روی شکل هم عمود بودن a+b بر c به سادگی قابل نتیجه‌گیری بود.

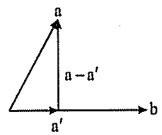


راه‌حل دوم، مطابق شکل، بردارهای $a-a'$ و $b-b'$ بر بردار c عمودند. پس جمع آن‌ها بر c عمود می‌باشد.

$$a-a'+b-b'=(a+b)-\underbrace{(a'+b')}_{0}=a+b\Rightarrow a+b\perp c$$

که در بین گزینه‌ها فقط در گزینه‌ی ۲ این شرط را داریم.

(B) ۱۰۵- گزینه‌ی «۱» اگر a' تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b باشد، آن‌گاه با توجه به شکل، بردار $a-a'$ بر بردار a' عمود خواهد بود، بنابراین ضرب داخلی بردارهای a' و $a-a'$ صفر است.



$$a-a'=(1,3,-1)-(1-m,m,1)=(m,3-m,-2)$$
$$a'.(a-a')=0\Rightarrow(1-m,m,1).(m,3-m,-2)=0\Rightarrow m-m^2+3m-m^2-2=0$$
$$\Rightarrow 2m^2-4m+2=0\Rightarrow m^2-2m+1=0\Rightarrow(m-1)^2=0\Rightarrow m=1$$

پس بردار a' دارای مختصات (۰,۱,۱) است و تصویر این بردار روی صفحه‌ی xoy بردار (۰,۱,۰) است و اندازه‌ی این بردار برابر ۱ می‌باشد.

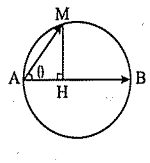
(B) ۱۰۶- گزینه‌ی «۴» با توجه به شکل، MH برابر تصویر قائم میانه‌ی $\overrightarrow{AM}$ بر $\overrightarrow{BC}$ می‌باشد و می‌دانیم اگر a' تصویر قائم a روی امتداد b باشد، آن‌گاه $|a'|=\frac{|a.b|}{|b|}$ است. داریم:

$$M=\frac{B+C}{2}=(1,2,0)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-1,1,-3)\ ,\ \overrightarrow{BC}=(2,0,-2)$$

حال باید اندازه‌ی تصویر قائم $\overrightarrow{AM}$ بر $\overrightarrow{BC}$ را پیدا کنیم:

$$|\overrightarrow{AM}'|=\frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|-2+0+6|}{\sqrt{4+0+4}}=\frac{4}{2\sqrt2}=\frac{2}{\sqrt2}=\sqrt2$$

(C) ۱۰۷- گزینه‌ی «۱» اگر M روی دایره‌ای به قطر ۴ باشد و MH عمود بر AB رسم شود، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم:

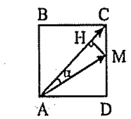


$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=|\overrightarrow{AB}|\underbrace{|\overrightarrow{AM}|\cos\theta}_{|\overrightarrow{AH}|}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AH}|=32\Rightarrow|\overrightarrow{AH}|=8$$

قطر دایره برابر ۴ است و در نتیجه غیرممکن است اندازه‌ی AH برابر ۸ باشد.

(C) ۱۰۸- گزینه‌ی «۳» فرض کنید M روی ضلع DC یا BC است. از M عمود MH را بر AC وارد می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|\underbrace{|\overrightarrow{AM}|\cos\alpha}_{|\overrightarrow{AH}|}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|$$



طبق فرض $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=\frac12|\overrightarrow{AC}|^2$ ، پس داریم:

$$|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|=\frac12|\overrightarrow{AC}|^2\Rightarrow|\overrightarrow{AH}|=\frac12|\overrightarrow{AC}|$$

بنابراین H وسط قطر AC می‌باشد، پس M باید یا نقطه‌ی D یا نقطه‌ی B باشد، تا H تصویر B و D روی AC باشد، بنابراین دو نقطه‌ی B و D جواب این تست هستند.

در حالتی که M روی ضلع‌های AD و AB باشد $\alpha=45^\circ$ و داریم:

$$|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AC}|\frac{\sqrt2}{2}=\frac12|\overrightarrow{AC}|^2\Leftrightarrow\sqrt2|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{AC}|$$

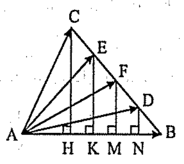
بنابراین در این حالت هم باید M در نقاط D یا B باشد.

(C) ۱۰۹- گزینه‌ی «۲» برداری که با محورهای مختصات زوایای حاده مساوی می‌سازد دارای مختصات برابر است بردار $b=(x,x,x)$ با محورها زوایای حاده مساوی می‌سازد $(x>0)$ در ضمن تصویر بردار a بر روی b یا مضارب بردار b یکی است زیرا راستای بردار b در این‌جا اهمیت دارد نه اندازه‌ی آن پس بردار ساده‌تر $b=(1,1,1)$ را انتخاب می‌کنیم.

$$a'=\frac{a.b}{b.b}b=\frac{1+2+3}{1+1+1}(1,1,1)=(2,2,2)$$

(B) ۱۱۰- گزینه‌ی «۴» می‌دانیم اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار a و b باشد، آن‌گاه $a.b=|a||b|\cos\theta$ و $|b|\cos\theta$ برابر اندازه‌ی تصویر قائم b روی امتداد بردار a است، بنابراین a.b معادل حاصل‌ضرب اندازه‌ی بردار a در اندازه‌ی تصویر بردار b روی بردار a است.

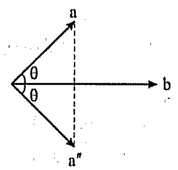
در شکل داده شده، از نقاط C ، E ، F و D بر AB عمود می‌کنیم. با توجه به آن‌چه که گفته شد، داریم:



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|.(\text{اندازه‌ی تصویر قائم } \overrightarrow{AC} \text{ بر } \overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AH}|$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}|.(\text{اندازه‌ی تصویر قائم } \overrightarrow{AE} \text{ بر } \overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AK}|$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AB}|.(\text{اندازه‌ی تصویر قائم } \overrightarrow{AF} \text{ بر } \overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|.(\text{اندازه‌ی تصویر قائم } \overrightarrow{AD} \text{ بر } \overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AN}|$$

با توجه به شکل و مقادیر به‌دست آمده، حاصل $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AN}|$ از بقیه بزرگ‌تر است.

(B) ۱۱۱- گزینه‌ی «۳» اگر a'' قرینه a نسبت به بردار b باشد، آن‌گاه اولاً $|a''|=|a|$ و ثانیاً زاویه بین a و b برابر زاویه‌ی بین a'' و b خواهد بود، پس زاویه‌ی بین a و a'' برابر 2θ می‌باشد. ابتدا زاویه‌ی θ را به‌دست می‌آوریم.



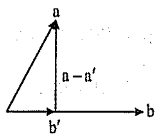
$$\cos\theta=\frac{a.b}{|a||b|}=\frac{2-1+0}{\sqrt9\sqrt2}=\frac{1}{3\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{6}$$
$$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1\Rightarrow\cos2\theta=2\left(\frac{\sqrt2}{6}\right)^2-1=\frac19-1=\frac{-8}{9}$$
$$a.a''=|a||a''|\cos2\theta=|a|^2\cos2\theta=9\times\frac{-8}{9}=-8$$

توجه کنید که از رابطه‌ی مثلثاتی $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$، رابطه‌ی $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$ را می‌توان نتیجه گرفت.

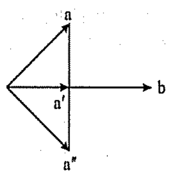
(A) ۱۱۲- گزینه‌ی «۳» می‌دانیم بردارهای a و a'' همواره هم‌اندازه هستند، بنابراین داریم:

$$|a''|=|a|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt6$$

(A) ۱۱۳- گزینه‌ی «۴» می‌دانیم اگر a' تصویر قائم a بر امتداد بردار b باشد، آن‌گاه $a'=\frac{a.b}{|b|^2}b$. پس بردار $a-a'$ مساوی بردار $a-\frac{a.b}{|b|^2}b$ است و با توجه به شکل بردار $a-a'$ بر بردار b عمود است.



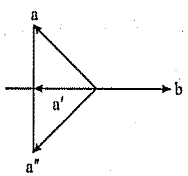
(B) ۱۱۴- گزینه‌ی «۴» اگر a' تصویر قائم a بر امتداد بردار b و a'' قرینه‌ی a نسبت به امتداد بردار b باشد، آن‌گاه $a'=\frac{a+a''}{2}$ و داریم:



$$a'=\frac{a+a''}{2}\Rightarrow a'=\frac{(2i-j+k)+(i+j+2k)}{2}=\frac32i+\frac32k$$

مسلماً بردار a' با بردار b موازی است، بنابراین بردار جهت b می‌تواند بردار جهت a' باشد.

$$e_b=e_{a'}=\frac{a'}{|a'|}=\frac{\frac32i+\frac32k}{\sqrt{\frac94+\frac94}}=\frac{\frac32i+\frac32k}{\frac32\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}i+\frac{\sqrt2}{2}k$$



نکته: البته دقت کنید که اگر زاویه‌ی بین a و b منفرجه باشد، آن‌گاه $e_b=-e_{a'}$. اما چون جواب به‌دست آمده در گزینه‌ها بود، ما دیگر این حالت را بررسی نکردیم.

(A) ۱۱۵- گزینه‌ی «۲» ابتدا ضرب خارجی بردارهای b و c را به‌دست می‌آوریم. فرض کنیم $d=b\times c$ و اندازه‌ی تصویر قائم بردار a را روی امتداد بردار d تعیین می‌کنیم. می‌دانیم اگر a' تصویر a روی d باشد، آن‌گاه اندازه‌ی بردار a' برابر $\frac{|a.d|}{|d|}$ می‌باشد.

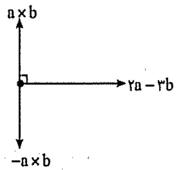
$$d=b\times c=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=(2,-1,-1)\ ,\ |a'|=\frac{|a.d|}{|d|}=\frac{|2-2+1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{1}{\sqrt6}=\frac{\sqrt6}{6}$$

B **۱۱۶- گزینه‌ی (۳)** برای محاسبه‌ی $(a\times b)\times c$، ابتدا بردار $a\times b$ و سپس بردار $(a\times b)\times c$ را محاسبه می‌کنیم.

$$a\times b=\begin{bmatrix}۲&-۱&۱\\۱&۰&-۲\end{bmatrix}=(۲,۵,۱)\ ,\ (a\times b)\times c=\begin{bmatrix}۲&۵&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=(۴,-۱,-۳)$$

بنابراین تصویر بردار $(a\times b)\times c$ روی محور yها برابر ۱- است.

A **۱۱۷- گزینه‌ی (۲)** بردار $a\times b$ بر بردارهای a، b و همچنین بر هر ترکیب خطی از دو بردار a و b عمود است، پس بردار $a\times b$ بر بردار $۲a-۳b$ عمود است. بنابراین قرینه‌ی $a\times b$ نسبت به آن بردار، $-(a\times b)$ می‌باشد.



$$a\times b=\begin{bmatrix}۲&-۱&۳\\۳&۰&-۴\end{bmatrix}=(۴,۱۷,۳)\Rightarrow-(a\times b)=(-۴,-۱۷,-۳)$$

B **۱۱۸- گزینه‌ی (۲)** برداری که بر دو بردار a و b عمود می‌باشد، بردار $a\times b$ و مضارب غیرصفر آن است. بنابراین بردار c موازی بردار $a\times b$ می‌باشد.

$$a\times b=\begin{bmatrix}-۱&۱&۲\\-۲&۳&۶\end{bmatrix}=(۰,۲,-۱)$$

چون بردار c موازی $a\times b$ است، پس c مضربی از $a\times b$ است، بنابراین داریم:

$$c=m(a\times b)=(۰,۲m,-m)\xrightarrow{|c|=۵}\sqrt{۴m^۲+m^۲}=۵\Rightarrow ۵m^۲=۲۵\Rightarrow m=\pm\sqrt{۵}$$

پس $c=(۰,۲\sqrt{۵},-\sqrt{۵})$ یا $c=(۰,-۲\sqrt{۵},\sqrt{۵})$. در حالت اول، مجموع مؤلفه‌های بردار c برابر $\sqrt{۵}$ و در حالت دوم، مجموع مؤلفه‌های بردار c برابر $-\sqrt{۵}$ است که عدد $\sqrt{۵}$ در گزینه‌ی (۲) وجود دارد.

A **۱۱۹- گزینه‌ی (۱)** بردار $a\times b$ و مضارب غیرصفر آن نه تنها بر a و b بلکه بر هر ترکیب خطی از a و b عمود است. بنابراین مضارب غیرصفر $a\times b$ بر بردارهای $۱۳a-۱۲b$ و $۷a+۱۹b$ عمود است.

$$a\times b=\begin{bmatrix}۲&-۱&۱\\-۱&۲&۱\end{bmatrix}=(-۳,-۳,۳)$$

بردار $(-۳,-۳,۳)$ در گزینه‌ها وجود ندارد ولی بردار $-\frac{۲}{۳}(a\times b)=(۲,۲,-۲)$ در گزینه‌ی (۱) آمده است.

A **۱۲۰- گزینه‌ی (۴)** حاصل‌ضرب خارجی بردارهای b و c بر دو بردار b و c عمود است. پس بردار a موازی بردار $b\times c$ می‌باشد.

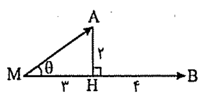
$$b\times c=\begin{bmatrix}۱&۲&-۱\\۱&-۵&۲\end{bmatrix}=(-۱,-۳,-۷)$$

چون بردار a با بردار $b\times c$ موازی است، پس مؤلفه‌های دو بردار متناسب می‌باشند.

$$a\parallel(b\times c)\Rightarrow\frac{m+۱}{-۱}=\frac{-۱}{-۳}=\frac{n}{-۷}\Rightarrow\begin{cases}\frac{m+۱}{-۱}=\frac{-۱}{-۳}\Rightarrow m+۱=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow m=-\frac{۴}{۳}\\[2mm]\frac{-۱}{-۳}=\frac{n}{-۷}\Rightarrow n=-\frac{۷}{۳}\end{cases}$$

$$۲m+n=-\frac{۸}{۳}-\frac{۷}{۳}=-\frac{۱۵}{۳}=-۵$$

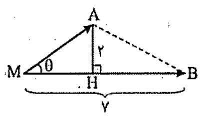
B **۱۲۱- گزینه‌ی (۲)** **راه‌حل اول:** می‌دانیم اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار $\overline{MA}$ و $\overline{MB}$ باشد، آن‌گاه $|\overline{MA}\times\overline{MB}|=|\overline{MA}||\overline{MB}|\sin\theta$، بنابراین با توجه به شکل داریم:



$$\text{در مثلث } MAH:\sin\theta=\frac{AH}{MA}\xrightarrow{MA=\sqrt{۳^۲+۲^۲}=\sqrt{۱۳}}\sin\theta=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

$$|\overline{MA}\times\overline{MB}|=|\overline{MA}||\overline{MB}|=\sqrt{۱۳}\times۷\times\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}=۱۴$$

راه‌حل دوم: می‌دانیم $|\overline{MA}\times\overline{MB}|$ دو برابر مساحت مثلث ایجادشده توسط این دو بردار است (یعنی مثلث MAB در شکل)، پس ابتدا مساحت این مثلث را محاسبه می‌کنیم:



$$S_{MAB}=\frac{۱}{۲}\times|MB|\times|AH|=\frac{۱}{۲}\times۷\times۲=۷$$

در نتیجه می‌توان نوشت: $|\overline{MA}\times\overline{MB}|=۲S_{MAB}=۱۴$

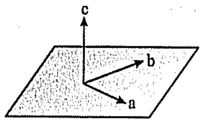
B **۱۲۲- گزینه‌ی (۲)** بردار e_a بردار واحد a است، پس اندازه‌ی بردار e_a برابر ۱ می‌باشد. به همین ترتیب $|e_b|=۱$ و $|e_{a\times b}|=۱$. در نتیجه اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار فرض شود، می‌توان نوشت:

$$e_{a\times b}=e_a\times e_b\Rightarrow|e_{a\times b}|=|e_a\times e_b|\Rightarrow۱=\underbrace{|e_a|}_{۱}\underbrace{|e_b|}_{۱}\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=۱$$

حالا می‌توان اندازه بردار e_a+e_b را تعیین کرد. برای این کار به $\cos\theta$ احتیاج داریم. چون $\sin\theta=۱$، پس $\theta=۹۰^\circ$. در نتیجه $\cos\theta=۰$ و داریم:

$$|e_a+e_b|=\sqrt{|e_a|^۲+|e_b|^۲+۲|e_a||e_b|\cos\theta}=\sqrt{۱+۱+۰}=\sqrt{۲}$$

C **۱۲۳- گزینه‌ی (۲)** با توجه به فرض تست، بردار c بر صفحه‌ی دو بردار a و b عمود است. از طرفی $a\times b$ نیز بر همین صفحه عمود است، بنابراین بردارهای c و $a\times b$ موازی‌اند، پس زاویه‌ی بین بردارهای c و $a\times b$ مساوی صفر یا ۱۸۰ درجه است که در هر دو صورت قدرمطلق کسینوس این زاویه‌ها برابر ۱ می‌باشد. از طرفی، اگر α زاویه‌ی بین بردارهای a و b باشد، آن‌گاه $|a\times b|=|a||b|\sin\alpha$ و داریم:



$$|c.(a\times b)|=|c||a\times b|\underbrace{|\cos\theta|}_{۱}=|c||a||b|\sin\alpha=۳\times۴\times۳\sin ۳۰^\circ=۱۸$$

B **۱۲۴- گزینه‌ی (۲)** ابتدا ضرب خارجی بردارهای $۲a+b$ و $a+۲b$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned}&(۲a+b)\times(a+۲b)=\begin{bmatrix}۱&۴&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}=(۰,۳,-۶)\\&(۲a+b)\times(a+۲b)=\overbrace{۲a\times a}^{۰}+۴a\times b+\overbrace{b\times a}^{-a\times b}+\overbrace{۲b\times b}^{۰}=۳a\times b\end{aligned}\right\}\Rightarrow ۳a\times b=۳j-۶k\Rightarrow a\times b=j-۲k\Rightarrow|a\times b|=\sqrt{۵}$$

B **۱۲۵- گزینه‌ی (۲)** می‌دانیم ضرب داخلی روی جمع بردارها خاصیت پخش‌پذیری دارد. به همین دلیل، ابتدا طرف راست تساوی داده شده را ساده می‌کنیم. توجه داشته باشید که بردار $a\times b$ هم بر a و هم بر b عمود است، پس $a.(a\times b)=۰\ ,\ b.(a\times b)=۰$. داریم:

$$۲a.(a\times b+b)-b.(a\times۲b+a)=\underbrace{۲a.(a\times b)}_{۰}+۲a.b-\underbrace{b.(a\times۲b)}_{۰}-b.a=a.b$$

پس تساوی داده شده به صورت زیر درمی‌آید:

$$|a\times b|=a.b\Rightarrow\frac{|a\times b|}{a.b}=\frac{|a||b|\sin\theta}{|a||b|\cos\theta}=۱\Rightarrow\tan\theta=۱\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

B **۱۲۶- گزینه‌ی (۲)** ابتدا با داشتن طول بردارهای a، b و $۲a-۳b$، زاویه‌ی بین دو بردار a و b (زاویه‌ی θ) را به‌دست می‌آوریم:

$$|۲a-۳b|^۲=|۲a|^۲+|۳b|^۲-۲|۲a||۳b|\cos\theta\Rightarrow(۲\sqrt{۱۳})^۲=۴(۴)^۲+۹(۲)^۲-۱۲(۴)(۲)\cos\theta$$

$$\Rightarrow ۵۲=۶۴+۳۶-۹۶\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۶۰^\circ\Rightarrow|a\times b|=|a||b|\sin\theta=(۴)(۲)\sin ۶۰^\circ=۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۴\sqrt{۳}$$

B **۱۲۷- گزینه‌ی (۳)**

$$|a\times(a+b)|=۱۸\Rightarrow|\underbrace{a\times a}_{۰}+a\times b|=۱۸\Rightarrow|a\times b|=۱۸\Rightarrow|a||b|\sin\theta=۱۸\Rightarrow ۶\times۵\sin\theta=۱۸\Rightarrow\sin\theta=\frac{۳}{۵}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\theta}=\pm\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\pm\frac{۴}{۵}$$

چون θ در ناحیه‌ی اول قرار دارد، پس $\cos\theta$ مثبت است بنابراین $\cos\theta=\frac{۴}{۵}$ و داریم:

$$a.(a+b)=a.a+a.b=|a|^۲+|a||b|\cos\theta=۶^۲+۶\times۵\times\frac{۴}{۵}=۳۶+۲۴=۶۰$$

(B) **۱۲۸- گزینه‌ی ۱** می‌دانیم اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار a و b باشد، آن‌گاه $|a.b|=|a||b||\cos\theta|$ و $|a\times b|=|a||b|\sin\theta$. بنابراین داریم:

$$|(a.b)(a\times b)|=9\Rightarrow|a.b||a\times b|=9\Rightarrow|a||b||\cos\theta||a||b|\sin\theta=9$$

$$\Rightarrow|a|^2|b|^2|\cos\theta\sin\theta|=9\xrightarrow{\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta}|a|^2|b|^2\left|\frac{\sin 2\theta}{2}\right|=9\xrightarrow[|b|=\sqrt{3}]{|a|=2\sqrt{3}}36\left|\frac{\sin 2\theta}{2}\right|=9\Rightarrow|\sin 2\theta|=\frac{1}{2}$$

از رابطه‌ی فوق به دو جواب زیر می‌رسیم:

$$\sin 2\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\theta=30^\circ\Rightarrow\theta=15^\circ \quad , \quad \sin 2\theta=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2\theta=150^\circ\Rightarrow\theta=75^\circ$$

که در بین گزینه‌ها زاویه‌ی 75° وجود دارد.

(C) **۱۲۹- گزینه‌ی ۳** می‌دانیم $e_a=\frac{a}{|a|}$، بنابراین $e_a.b$ مساوی $\frac{a}{|a|}.b$، یعنی $\frac{a.b}{|a|}$ است، بنابراین داریم:

$$|2e_a+b|=|a\times b|\Rightarrow\sqrt{|2e_a|^2+|b|^2+\underbrace{2|2e_a||b|\cos\theta}_{2e_a.b}}=|a\times b|$$

$$\xrightarrow{e_a.b=\frac{a.b}{|a|}}4+3+4e_a.b=|a\times b|^2\Rightarrow 7+\frac{4a.b}{|a|}=|a\times b|^2\xrightarrow{|a|=2}7+2a.b=|a\times b|^2$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی $|a\times b|^2+(a.b)^2=|a|^2|b|^2$ به تساوی $|a\times b|^2+(a.b)^2=12$ می‌رسیم، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}7+2a.b=|a\times b|^2\\|a\times b|^2+(a.b)^2=12\end{cases}\Rightarrow 7+2a.b=12-(a.b)^2\Rightarrow(a.b)^2+2a.b-5=0$$

در تست، مجموع مقادیر a.b خواسته شده است، پس باید مجموع ریشه‌های معادله‌ی فوق را به‌دست آوریم:

$$\text{مجموع مقادیر } a.b=S=-\frac{b}{a}=-2$$

(C) **۱۳۰- گزینه‌ی ۱** بردار $a\times b$ بر صفحه‌ی شامل بردارهای a و b عمود است، پس بردار $a\times b$ بر بردار $a-b$ عمود است، بنابراین زاویه‌ی بین بردارهای $a\times b$ و $a-b$ برابر ۹۰ درجه است.

$$|(a-b)\times(a\times b)|=|a-b||a\times b|\sin 90^\circ=\sqrt{|a|^2+|b|^2-2|a||b|\cos\frac{\pi}{6}}\,|a||b|\sin\frac{\pi}{6}\sin 90^\circ$$

$$=\sqrt{4+3-4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}\,(2\sqrt{3}\times\frac{1}{2})=\sqrt{7-6}\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

(A) **۱۳۱- گزینه‌ی ۴** ضرب خارجی روی جمع و تفریق بردارها خاصیت پخش‌پذیری دارد. به همین دلیل داریم:

$$(V+2W)\times(3V-W)=3V\times V-V\times W+6W\times V-2W\times W$$

همچنین می‌دانیم ضرب خارجی هر بردار در خودش برابر صفر است، پس $W\times W=V\times V=0$. نتیجه می‌گیریم:

$$(V+2W)\times(3V-W)=-V\times W+6W\times V \quad (1)$$

از طرفی ضرب خارجی خاصیت جابه‌جایی ندارد ولی $W\times V=-V\times W$. پس رابطه‌ی (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(V+2W)\times(3V-W)=W\times V+6W\times V=7W\times V$$

در نتیجه:

$$|(V+2W)\times(3V-W)|=|7W\times V|=7|W\times V|=7\times 2=14$$

(B) **۱۳۲- گزینه‌ی ۳** ضرب خارجی روی جمع و تفریق بردارهای خاصیت پخش‌پذیری دارد. بنابراین داریم:

$$|2a\times(a-\frac{b}{2})|=8\Rightarrow|\underbrace{2a\times a}_{0}-a\times b|=8\Rightarrow|a\times b|=8$$

حال از رابطه‌ی $|a\times b|^2+(a.b)^2=|a|^2|b|^2$ استفاده و مقدار a.b را تعیین می‌کنیم.

$$|a\times b|^2+(a.b)^2=|a|^2|b|^2\Rightarrow 8^2+(a.b)^2=3^2\times 4^2\Rightarrow(a.b)^2=144-64=80\Rightarrow a.b=\pm 4\sqrt{5}$$

از آن‌جایی که زاویه‌ی بین بردارهای a و b منفرجه است، نتیجه می‌گیریم a.b منفی است، پس جواب $-4\sqrt{5}$ درست است.

$$2b.(a+b)=2b.a+2b.b=2b.a+2|b|^2=2(-4\sqrt{5})+2(3)^2=18-8\sqrt{5}$$

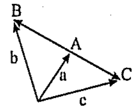
(B) **۱۳۳- گزینه‌ی ۱** ضرب داخلی و ضرب خارجی روی جمع و تفریق بردارها خاصیت پخش‌پذیری دارد. چون دو بردار واحد a و b بر هم عمودند، پس $a.b=0$ و داریم:

$$|(3a+2b)\times(2a-b)|=|6\underbrace{a\times a}_{0}-3\underbrace{a\times b}_{-b\times a}+4b\times a-2\underbrace{b\times b}_{0}|=|7b\times a|=7|b||a|\sin 90^\circ=7$$

$$(3a+2b).(2a-b)=6a.a-3a.b+4a.b-2b.b=6\underbrace{|a|^2}_{1}+\underbrace{a.b}_{0}-2\underbrace{|b|^2}_{1}=4$$

$$|(3a+2b)\times(2a-b)|+(3a+2b).(2a-b)=7+4=11$$

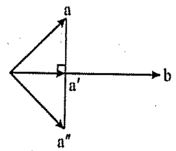
(C) **۱۳۴- گزینه‌ی ۱** نقاط A ، B و C انتهای بردارهای a ، b و c هستند. به همین دلیل مطابق شکل $b-a=\overline{AB}$ و $c-a=\overline{AC}$. از طرفی، می‌دانیم حاصل‌ضرب خارجی دو بردار موازی برابر بردار صفر است. داریم:



$$\overline{AB}\parallel\overline{AC}\Rightarrow\overline{AB}\times\overline{AC}=0\Rightarrow(b-a)\times(c-a)=0$$

$$\Rightarrow b\times c-b\times a-a\times c+\underbrace{a\times a}_{0}=0\Rightarrow -b\times a=a\times c-b\times c\xrightarrow{-b\times a=a\times b}a\times b=a\times c-b\times c$$

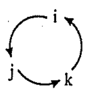
(C) **۱۳۵- گزینه‌ی ۱** می‌دانیم بردار a' با بردار b موازی است و حاصل‌ضرب خارجی دو بردار a' و b مساوی صفر است، پس داریم:



$$a\times b+a''\times b=\underbrace{(a+a'')}_{2a'}\times b=2a'\times b=0$$

ازآن‌جایی‌که حاصل $a\times b+a''\times b$ برابر صفر شد، بنابراین حاصل‌ضرب داخلی $(a\times b+a''\times b).(a\times a')$ برابر صفر می‌باشد.

(A) **۱۳۶- گزینه‌ی ۱** با توجه به تبدیل دوری مقابل، می‌دانیم $i\times j=k$ و $i=k\times j$ و $j=i\times k$، به همین دلیل داریم:



$$2i.(\underbrace{j\times k}_{i})-mj.(\underbrace{k\times 2i}_{2j})+k.(\underbrace{2j\times i}_{-2k})=5$$

$$2i.i-2mj.j-2kk=5\Rightarrow 2\underbrace{|i|^2}_{1}-2m\underbrace{|j|^2}_{1}-2\underbrace{|k|^2}_{1}=5\Rightarrow 2-2m-2=5\Rightarrow m=-\frac{5}{2}=-2/5$$

(B) **۱۳۷- گزینه‌ی ۴** اگر حاصل‌ضرب خارجی دو بردار غیرصفر برابر بردار صفر باشد، آن‌گاه دو بردار موازی‌اند. به عبارتی، اگر $a\times b=0$، آن‌گاه $a\parallel b$.

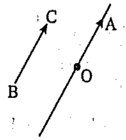
$$a\times b=a\times c\Rightarrow a\times b-a\times c=0\Rightarrow a\times(b-c)=0\Rightarrow a\parallel b-c$$

بنابراین مؤلفه‌های a و $b-c$ باید متناسب باشند. پس:

$$\left.\begin{array}{l}a=(1,-1,2)\\b-c=(2-n,2,m+3)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2-n}=\frac{-1}{2}=\frac{2}{m+3}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2-n}=-\frac{1}{2}\Rightarrow n=4\\-\frac{1}{2}=\frac{2}{m+3}\Rightarrow m=-7\end{cases}$$

پس $2m+n$ برابر $2(-7)+4=-10$ می‌باشد.

(C) **۱۳۸- گزینه‌ی ۳** می‌دانیم ضرب خارجی روی جمع و تفریق بردارها خاصیت پخش‌پذیری دارد، پس نتیجه می‌گیریم:



$$\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OA}\times\overline{OC}\Rightarrow\overline{OA}\times\overline{OB}-\overline{OA}\times\overline{OC}=0\Rightarrow\overline{OA}\times(\overline{OB}-\overline{OC})=0\Rightarrow\overline{OA}\times\overline{CB}=0$$

بنابراین $\overline{OA}$ و $\overline{BC}$ موازی هستند. پس A روی خطی قرار دارد که از مبدأ O می‌گذرد و با $\overline{BC}$ موازی است. مختصات $\overline{BC}$ برابر $(0,0,1)$ است، بنابراین خط فوق موازی بردار k یعنی موازی محور zها می‌باشد و چون این خط از مبدأ می‌گذرد پس مکان هندسی نقطه‌ی A همان محور zها می‌باشد.

(B) **۱۳۹- گزینه‌ی ۱** توجه کنید مجموع بردارهای a ، b و c صفر است.

$$a+b+c=(1,2,-1)+(2,-3,0)+(-3,1,1)=(0,0,0)$$

$$a+b+c=0\Rightarrow(a+b+c)\times b=0\times b=0\Rightarrow a\times b+b\times b+c\times b=0\Rightarrow a\times b=-c\times b=b\times c \quad (1)$$

$$a+b+c=0\Rightarrow(a+b+c)\times c=0\times c=0\Rightarrow a\times c+b\times c+c\times c=0\Rightarrow a\times c=-b\times c\Rightarrow c\times a=b\times c \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\,\text{و}\,(2)}a\times b=b\times c=c\times a$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است، زیرا طبق رابطه‌ی بالا $a\times c$ مساوی $b\times a$ است.

Ⓑ **۱۴۰- گزینه‌ی ۴** **راه‌حل اول؛** برای محاسبه‌ی $a\times b$، طرفین فرض $3a+2b+c=0$ را در b ضرب خارجی می‌کنیم:

$$3a+2b+c=0 \xrightarrow{\text{در } b \text{ ضرب خارجی می‌کنیم}} (3a+2b+c)\times b=0\times b \Rightarrow 3a\times b+2\underbrace{b\times b}_{0}+c\times b=0$$

$$\Rightarrow 3a\times b=-c\times b \Rightarrow a\times b=\frac{b\times c}{3}$$

راه‌حل دوم؛ از آن‌جایی که $3a+2b+c=0$، می‌توان نتیجه گرفت که

$$3a\times 2b=2b\times c=c\times 3a \Rightarrow 6(a\times b)=2(b\times c) \Rightarrow a\times b=\frac{b\times c}{3}$$

Ⓑ **۱۴۱- گزینه‌ی ۱** ابتدا مختصات تصویر نقاط A، B و C را روی صفحه‌ی xoz به‌دست می‌آوریم. برای به‌دست آوردن تصویر یک نقطه روی صفحه‌ی xoz کافی است عرض نقطه را صفر قرار دهیم.

$$A(3,2,3) \xrightarrow{\text{تصویر روی } xoz} A'(3,0,3)$$

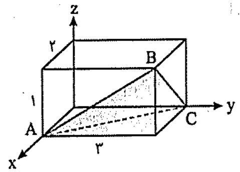
$$B(1,0,0) \xrightarrow{\text{تصویر روی } xoz} B'(1,0,0)$$

$$C(1,1,1) \xrightarrow{\text{تصویر روی } xoz} C'(1,0,1)$$

برای محاسبه‌ی مساحت مثلث $A'B'C'$ از رابطه‌ی $\frac{1}{2}|\overrightarrow{A'B'}\times\overrightarrow{A'C'}|$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{matrix}\overrightarrow{A'B'}=(-2,0,-3)\\ \overrightarrow{A'C'}=(-2,0,-2)\end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'}\times\overrightarrow{A'C'}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -3\\ -2 & 0 & -2\end{bmatrix}=(0,2,0) \Rightarrow S_{A'B'C'}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{A'B'}\times\overrightarrow{A'C'}|=\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$$

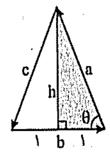
Ⓒ **۱۴۲- گزینه‌ی ۲** محورهای مختصات را مطابق شکل در راستای یال‌های مکعب مستطیل قرار می‌دهیم. به این ترتیب در شکل، مختصات رئوس مثلث ABC به صورت $A(2,0,0)$ ، $B(2,3,1)$ و $C(0,3,0)$ می‌باشد و مساحت مثلث ABC را از رابطه‌ی $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ به‌دست می‌آوریم.



$$\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(0,3,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,3,0)\end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}=(-3,-2,6)$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{9+4+36}=\frac{7}{2}$$

Ⓒ **۱۴۳- گزینه‌ی ۳** **راه‌حل اول؛** مجموع بردارهای a ، b و c برابر صفر است، پس این بردارها مطابق شکل تشکیل مثلث متساوی‌الساقین می‌دهند. اگر ارتفاع (h) را رسم کنیم، آن‌گاه خواهیم داشت:



$$h=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8} \Rightarrow \sin\theta=\frac{h}{|a|}=\frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta=3\times 2\times\frac{\sqrt{8}}{3}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$$

راه‌حل دوم؛ به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌توان $\cos\theta$ و سپس $\sin\theta$ را به‌دست آورد.

$$\cos\theta=\frac{1}{3} \Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\pm\frac{\sqrt{8}}{3} \xrightarrow{\text{چون } \theta \text{ حاده است}} \sin\theta=\frac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow |a\times b|=|a||b|\sin\theta=2\times 3\times\frac{\sqrt{8}}{3}=4\sqrt{2}$$

راه‌حل سوم؛ $|a\times b|$ دو برابر مساحت مثلث است. چون $h=2\sqrt{2}$، پس:

$$|a\times b|=2S=2\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

Ⓑ **۱۴۴- گزینه‌ی ۴** مساحت مثلثی که اضلاع آن بردارهای $6a+b$ و $4a-b$ می‌باشند، برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}|(6a+b)\times(4a-b)|=\frac{1}{2}|\underbrace{24a\times a}_{0}-6\underbrace{a\times b}_{-b\times a}+4b\times a-\underbrace{b\times b}_{0}|=\frac{1}{2}|10b\times a|=5|b\times a|=5\underbrace{|b|}_{1}\underbrace{|a|}_{1}\sin\theta=5\sin\theta$$

طبق فرض تست، مساحت این مثلث برابر ۳ می‌باشد. پس $5\sin\theta=3$ یعنی $\sin\theta=\frac{3}{5}$، بنابراین داریم:

$$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta} \xrightarrow{\theta \text{ حاده است}} \cos\theta=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5} \Rightarrow a.b=\underbrace{|a|}_{1}\underbrace{|b|}_{1}\cos\theta=\frac{4}{5}$$

Ⓑ **۱۴۵- گزینه‌ی ۱** اگر a' تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b باشد، آن‌گاه $|a'|=\frac{|a.b|}{|b|}$. بنابر فرض تست $|a'|=2$، داریم:

$$|a'|=\frac{|a.b|}{|b|} \Rightarrow 2=\frac{|a||b||\cos\theta|}{|b|} \Rightarrow 2=|a||\cos\theta| \xrightarrow{|a|=3} |\cos\theta|=\frac{2}{3} \Rightarrow \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

مساحت مثلث با اضلاع $a+2b$ و $a-b$ برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}|(a+2b)\times(a-b)|=\frac{1}{2}|\underbrace{a\times a}_{0}-\underbrace{a\times b}_{-b\times a}+2b\times a-2\underbrace{b\times b}_{0}|=\frac{1}{2}|3b\times a| \Rightarrow S=\frac{3}{2}|b||a|\sin\theta=\frac{3}{2}\times 4\times 3\times\frac{\sqrt{5}}{3}=6\sqrt{5}=3\sqrt{20}$$

Ⓑ **۱۴۶- گزینه‌ی ۲** ابتدا با داشتن طول بردار $2a-b$، زاویه‌ی بین دو بردار a و b را به‌دست می‌آوریم.

$$|2a-b|^2=|2a|^2+|b|^2-2|2a||b|\cos\theta \Rightarrow \cancel{6^2}=4\times 3^2+\cancel{6^2}-4(3)(6)\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=60^\circ$$

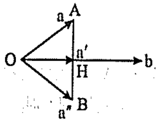
مساحت مثلث با اضلاع $a-b$ و $a+3b$ برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}|(a-b)\times(a+3b)|=\frac{1}{2}|\underbrace{a\times a}_{0}+3a\times b-\underbrace{b\times a}_{-a\times b}-3\underbrace{b\times b}_{0}|=\frac{1}{2}|4a\times b| \Rightarrow S=2|a||b|\sin\theta=2(3)(6)(\sin 60^\circ)=36\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$$

Ⓒ **۱۴۷- گزینه‌ی ۳** می‌دانیم $e_{a'}=\frac{a'}{|a'|}$ و $|a'|=\frac{|a.b|}{|b|}$. بنابراین $\frac{|a.b|}{|b|}e_{a'}$ مساوی $|a'|\times\frac{a'}{|a'|}$ یعنی a' است. با توجه به فرض تست داریم:

$$\overbrace{\frac{|a.b|}{|b|}e_{a'}}^{a'}\times(a-a')=a'\times(a-a')=a'\times a-\underbrace{a'\times a'}_{0}=a'\times a$$

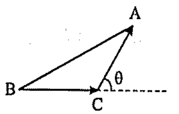
بنابراین $a'\times a=(1,2,-2)$، در نتیجه $|a'\times a|=\sqrt{1+4+4}=3$.



با توجه به شکل مقابل، مساحت مثلث بناشده روی a و a"، دو برابر مساحت مثلث بناشده روی a و a' می‌باشد.

$$S_{OAB}=2S_{OAH}=2\times\frac{1}{2}|a\times a'|=3$$

Ⓒ **۱۴۸- گزینه‌ی ۳** می‌دانیم $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ دو برابر مساحت مثلث ABC است. از طرفی، $|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}|$ نیز دو برابر مساحت مثلث ABC است. بنابراین $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}|$.



$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}|=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}|}{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}}=1 \quad (1)$$

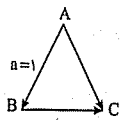
با توجه به شکل، اگر θ زاویه‌ی بین بردارهای $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CA}$ باشد، آن‌گاه زاویه‌ی C مکمل θ است. از رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم $\tan\theta=1$، پس $\theta=45^\circ$. بنابراین $\hat{C}=180-45=135^\circ$.

Ⓑ **۱۴۹- گزینه‌ی ۳** مساحت مثلث ساخته‌شده توسط دو بردار a و b برابر $\frac{1}{2}|a\times b|$ می‌باشد. ابتدا $|a\times b|$ را به‌دست می‌آوریم.

$$a.b=|a||b|\cos\theta \Rightarrow \frac{18}{5}=3\times 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{5}\ ,\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta=3\times 2\times\frac{4}{5}=\frac{24}{5}\ ,\ S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{1}{2}|a\times b|=\frac{1}{2}\times\frac{24}{5}=\frac{12}{5}$$

Ⓑ **۱۵۰- گزینه‌ی ۲** با توجه به رابطه‌ی $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ می‌توان نتیجه گرفت:



$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}\times(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|$$

$$=|\underbrace{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}+\underbrace{\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BC}}_{0}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=|3\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}| \quad (1)$$

می‌دانیم $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|$ مساوی دو برابر مساحت مثلث ABC است. از طرفی مثلث ABC ، مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \xrightarrow{a=1} S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{\text{از}(1)} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=3|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}|=3(2S_{ABC})=6S_{ABC}=6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(A) **۱۵۱- گزینه‌ی (۱)** مساحت هر مثلث مساوی نصف اندازه‌ی حاصل‌ضرب خارجی دو ضلع آن می‌باشد. داریم:

$$S=\frac{1}{2}|(a-2b)\times(3a+2b)|=\frac{1}{2}|\underbrace{3a\times a}_{0}+2a\times b-\underbrace{6b\times a}_{-6a\times b}-\underbrace{4b\times b}_{0}|=\frac{1}{2}|8a\times b|=4|a\times b|=4|a||b|\sin\theta=4(3)(4)\sin 30^\circ=48\times\frac{1}{2}=24$$

(A) **۱۵۲- گزینه‌ی (۲)** فرض کنید a و b دو بردار یکه هستند و $|a+b|=\sqrt{3}$. اگر θ زاویه‌ی بین این دو بردار باشد، داریم:

$$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\theta \xrightarrow{|a|=|b|=1} 3=1+1+2\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$$

مساحت متوازی‌الاضلاعی که a و b دو ضلع آن هستند، برابر $|a\times b|$ می‌باشد.

$$S=|a\times b|=\underbrace{|a|}_{1}\underbrace{|b|}_{1}\sin\theta=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$: مساحت متوازی‌الاضلاع

(B) **۱۵۳- گزینه‌ی (۲)** می‌دانیم اگر a و b دو بردار باشند، آن‌گاه $a+b$ و $a-b$ قطرهای متوازی‌الاضلاعی هستند که a و b دو ضلع آن می‌باشند. چون $|a+b|=|a-b|$، پس این متوازی‌الاضلاع دارای قطرهای برابر و بنابراین مستطیل است. در نتیجه a عمود بر b می‌باشد.

$$|a+b|=|a-b|\Rightarrow a\perp b\Rightarrow a.b=0\Rightarrow 2m-2-m=0\Rightarrow m=2$$

پس $a=(1,2,-2)$ و $b=(4,-1,1)$ و داریم:

$$a\times b=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&-1&1\end{bmatrix}=(0,-9,-9)\quad,\quad S=|a\times b|=\sqrt{9^2+9^2}=9\sqrt{2}$$:مساحت متوازی‌الاضلاع

(B) **۱۵۴- گزینه‌ی (۴)** ابتدا حاصل‌ضرب خارجی بردارهای a و $a\times k$ را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید $a.k=-4$ و $|a|=\sqrt{21}$ است.

$$a\times(a\times k)=(a.k)a-(a.a)k=-4a-|a|^2k=-4(1,2,-4)-(0,0,21)=(-4,-8,-5)$$

$$S=|a\times(a\times k)|=|(-4,-8,-5)|=\sqrt{16+64+25}=\sqrt{105}$$

(B) **۱۵۵- گزینه‌ی (۱)** مساحت متوازی‌الاضلاعی که بردارهای $a+b$ و $5a-2b$ قطرهای آن هستند، مساوی نصف اندازه‌ی ضرب خارجی آن‌ها می‌باشد. ابتدا از فرض $(3a+2b).(a-b)=1$ کسینوس زاویه‌ی θ، یا همان زاویه‌ی بین دو بردار a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$(3a+2b).(a-b)=1\Rightarrow 3a.a-3a.b+2b.a-2b.b=1$$

$$\Rightarrow 3|a|^2-a.b-2|b|^2=1\xrightarrow{|a|=|b|=1} 3-\underbrace{|a|}_{1}\underbrace{|b|}_{1}\cos\theta-2=1\Rightarrow\cos\theta=0\Rightarrow\theta=90^\circ$$

$$S=\frac{1}{2}|(a+b)\times(5a-2b)|=\frac{1}{2}|\underbrace{5a\times a}_{0}-2\underbrace{a\times b}_{-b\times a}+5b\times a-2\underbrace{b\times b}_{0}|=\frac{7}{2}|b\times a|$$: مساحت متوازی‌الاضلاع

$$=\frac{7}{2}\underbrace{|b|}_{1}\underbrace{|a|}_{1}\sin\theta=\frac{7}{2}\sin 90^\circ=\frac{7}{2}=3/5$$

(B) **۱۵۶- گزینه‌ی (۱)** اگر b' تصویر قائم بردار b روی امتداد بردار a باشد، آن‌گاه $|b'|=\frac{|a.b|}{|a|}$ و چون $|b'|=2$، پس $\frac{|a.b|}{|a|}=2$ و داریم:

$$\frac{|a.b|}{|a|}=2\Rightarrow\frac{\cancel{|a|}|b||\cos\theta|}{\cancel{|a|}}=2\Rightarrow|b||\cos\theta|=2\xrightarrow{|b|=3}|\cos\theta|=\frac{2}{3}\quad,\quad\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار $2a+b$ و $3a-2b$ ساخته می‌شود، برابر اندازه‌ی حاصل‌ضرب خارجی این دو بردار است.

$$S=|(2a+b)\times(3a-2b)|=|6\underbrace{a\times a}_{0}-4\underbrace{a\times b}_{-b\times a}+3b\times a-2\underbrace{b\times b}_{0}|=7|b\times a|=7|b||a|\sin\theta=7(4)(3)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=28\sqrt{5}$$

(B) **۱۵۷- گزینه‌ی (۱)** ابتدا بردارهای $a\times k$ و $a\times i$ را به‌دست می‌آوریم. چون این دو بردار قطرهای متوازی‌الاضلاع هستند، پس مساحت متوازی‌الاضلاع نصف اندازه‌ی حاصل‌ضرب خارجی آن‌ها می‌باشد.

$$a\times i=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&0&0\end{bmatrix}=(0,3,1)\quad,\quad a\times k=\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=(-1,-2,0)$$

$$(a\times i)\times(a\times k)=\begin{bmatrix}0&3&1\\-1&-2&0\end{bmatrix}=(2,-1,3)\Rightarrow S=\frac{1}{2}|(a\times i)\times(a\times k)|=\frac{1}{2}\sqrt{4+1+9}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$:مساحت متوازی‌الاضلاع

(A) **۱۵۸- گزینه‌ی (۲)** حجم متوازی‌السطوحی که با بردارهای a ، b و c ایجاد می‌شود، برابر $|a.(b\times c)|$ می‌باشد.

$$b\times c=\begin{bmatrix}2&1&2\\-1&3&1\end{bmatrix}=(-5,-4,7)\Rightarrow a.(b\times c)=(1,1,1).(-5,-4,7)=-5-4+7=-2\Rightarrow V=|a.(b\times c)|=2$$:حجم متوازی‌السطوح

(A) **۱۵۹- گزینه‌ی (۱)** اگر $a=(m,-2,1)$ ، $b=(3,1,1)$ و $c=(2,3,-1)$، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر روی این سه بردار برابر $|a.(b\times c)|$ می‌باشد.

$$b\times c=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&3&-1\end{bmatrix}=(-4,5,7)\Rightarrow a.(b\times c)=(m,-2,1).(-4,5,7)=-4m-10+7=-4m-3$$

$$V=13\Rightarrow|-4m-3|=13\Rightarrow\begin{cases}-4m-3=13\Rightarrow m=-4\\-4m-3=-13\Rightarrow m=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}\end{cases}$$:حجم متوازی السطوح

در بین گزینه‌ها $\frac{5}{2}$ وجود دارد، بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

(B) **۱۶۰- گزینه‌ی (۲)** ابتدا بردارهای $3a+2b$، $2a-b$ و $2a-3b$ را پیدا می‌کنیم که قدرمطلق ضرب مختلط آن‌ها حجم متوازی‌السطوح است.

$$c=3a+2b=3(-1,0,2)+2(0,2,-1)=(-3,4,4)\quad,\quad d=2a-b=2(-1,0,2)-(0,2,-1)=(-2,-2,5)$$

$$e=2a-3b=2(-1,0,2)-3(0,2,-1)=(-2,-6,7)$$

حالا ضرب مختلط این سه بردار را به‌دست می‌آوریم.

$$d\times e=\begin{bmatrix}-2&-2&5\\-2&-6&7\end{bmatrix}=(16,4,8)\quad,\quad c.(d\times e)=(-3,4,4).(16,4,8)=-48+16+32=0$$

بنابراین بردارهای فوق در یک صفحه هستند و متوازی‌السطوحی تشکیل نمی‌شود.

(B) **۱۶۱- گزینه‌ی (۳)** حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $2a$ ، b و c برابر $|2a.(b\times c)|$ می‌باشد. بنابراین $|2a.(b\times c)|=12$ پس $|a.(b\times c)|=6$. از طرفی حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی بردارهای $a+b$، $b+c$ و $c+a$ مساوی قدرمطلق ضرب مختلط آن‌ها است. ابتدا ضرب مختلط این سه بردار را به‌دست می‌آوریم.

$$(a+b).[(b+c)\times(c+a)]=(a+b).[b\times c+b\times a+\underbrace{c\times c}_{0}+c\times a]$$

$$=(a+b).[b\times c+b\times a+c\times a]=a.(b\times c)+\underbrace{a.(b\times a)}_{0}+\underbrace{a.(c\times a)}_{0}+\underbrace{b.(b\times c)}_{0}+\underbrace{b.(b\times a)}_{0}+b.(c\times a)$$

$$=a.(b\times c)+b.(c\times a)=a.(b\times c)-a.(c\times b)=a.(b\times c)+a.(b\times c)=2a.(b\times c)=2\times 6=12\Rightarrow V=12$$

(B) **۱۶۲- گزینه‌ی (۴)** ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

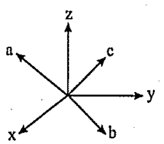
$$(b+c).[(a+b)\times(a+c)]=(b+c).[\underbrace{a\times a}_{0}+a\times c+b\times a+b\times c]=b.(a\times c)+\underbrace{b.(b\times a)}_{0}+\underbrace{b.(b\times c)}_{0}+\underbrace{c.(a\times c)}_{0}+c.(b\times a)+\underbrace{c.(b\times c)}_{0}$$

$$=b.(a\times c)+c.(b\times a)=-a.(b\times c)-a.(b\times c)=-2a.(b\times c)$$

طبق فرض تست $-2a.(b\times c)$، برابر ۴ می‌باشد، پس $a.(b\times c)=-2$.

از طرفی حجم متوازی‌السطوح ایجاد شده بر روی بردارهای a ، b و c برابر $|a.(b\times c)|$ است، پس حجم خواسته‌شده برابر ۲ می‌باشد.

(C) **۱۶۳- گزینه‌ی (۱)** نیمساز صفحه‌ی xoy در راستای بردار $b=(x,x,0)$، نیمساز صفحه‌ی yoz در راستای بردار $c=(0,x',x')$ و نیمساز صفحه‌ی xoz در راستای بردار $a=(x'',0,x'')$ قرار دارند. با توجه به اندازه‌های داده شده داریم:



$$|a|=\sqrt{x''^2+0^2+x''^2}=\sqrt{2}\,x''=3\sqrt{2}\Rightarrow x''=3$$

$$|b|=\sqrt{x^2+x^2+0^2}=\sqrt{2}\,x=\sqrt{2}\Rightarrow x=1$$

$$|c|=\sqrt{0^2+x'^2+x'^2}=\sqrt{2}\,x'=2\sqrt{2}\Rightarrow x'=2$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}a&=(3,0,3)\\b&=(1,1,0)\\c&=(0,2,2)\end{aligned}\Rightarrow a.(b\times c)=\begin{vmatrix}3&0&3\\1&1&0\\0&2&2\end{vmatrix}=3(2)+3(2)=12\Rightarrow |a.(b\times c)|=12$$ = حجم متوازی‌السطوح

Ⓑ **۱۷۷- گزینه‌ی (۳)** ابتدا بردار $(a\times b)\times c$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a\times b=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}=(2,4,1)$$

$$(a\times b)\times c=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}=(-4,3,-4)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مؤلفه‌های x و z در بردار $(a\times b)\times c$ برابر یک‌دیگرند، پس این بردار با محورهای x و z زوایای مساوی می‌سازد و برداری که با محورهای x و z زوایای مساوی می‌سازد، با صفحات yoz و xoy هم زاویه‌های برابر خواهد ساخت.

توجه: در این تست می‌توانستیم $(a\times b)\times c$ را از رابطه‌ی $(a.c)b-(b.c)a$ نیز به‌دست آوریم.

Ⓑ **۱۷۸- گزینه‌ی (۳)** از رابطه‌ی $a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c$ استفاده می‌کنیم و همچنین از آن‌جا که a بر b عمود است، داریم:

$$a\times(a\times b)=\underbrace{(a.b)}_{0}a-(a.a)b=-|a|^2 b=-3b$$

بنا بر فرض $a\times(a\times b)$، مساوی $(-2,3,-6)$ است، پس داریم:

$$-3b=(-2,3,-6)\Rightarrow b=(\frac{2}{3},-1,2)$$

Ⓑ **۱۷۹- گزینه‌ی (۲)** **راه‌حل اول،** از رابطه‌ی $a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c$ استفاده و عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$a\times(b\times c)-b\times(a\times c)-c\times(a\times b)=(a.c)b-\cancel{(a.b)c}-(b.c)a+\cancel{(b.a)c}-(c.b)a+(c.a)b$$

$$=2(a.c)b-2(b.c)a=2((a.c)b-(b.c)a)=2(a\times b)\times c$$

توجه کنید که از تساوی $(a\times b)\times c=(a.c)b-(b.c)a$ استفاده شده است.

راه‌حل دوم، می‌توانستیم با استفاده از نکته‌ی زیر نیز مسأله را حل کنیم:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$$

Ⓑ **۱۸۰- گزینه‌ی (۱)** **راه‌حل اول،** از تساوی $a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c$ استفاده و عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)=(a.c)b-\cancel{(a.b)c}+\cancel{(b.a)c}-(b.c)a=(a.c)b-(b.c)a=c\times(b\times a)$$

از طرفی می‌دانیم اگر $a+b+c=0$، آن‌گاه $a\times b=b\times c=c\times a$. بنابراین $b\times a=-b\times c$، پس داریم:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)=c\times(b\times a)=c\times(-b\times c)=-c\times(b\times c)$$

راه‌حل دوم، برای سه بردار a، b و c داریم:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$$

پس با توجه به این تساوی:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)=-c\times(a\times b)\quad(1)$$

از طرفی طبق رابطه‌ی $a+b+c=0$ داریم:

$$a\times b=b\times c=c\times a\quad(2)$$

حال از روابط (۱) و (۲):

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)=-c\times(b\times c)$$

Ⓑ **۱۸۱- گزینه‌ی (۱)** از تساوی $(a\times b)\times c=(a.c)b-(b.c)a$ استفاده می‌کنیم. داریم:

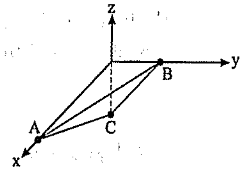
$$a.((a\times b)\times c)=a.((a.c)b-(b.c)a)=(a.c)(a.b)-(b.c)(a.a)$$

$$=(\underbrace{|a|}_{1}\underbrace{|c|}_{1}\cos 60^\circ)(\underbrace{|a|}_{1}\underbrace{|b|}_{1}\cos 60^\circ)-(\underbrace{|b|}_{1}\underbrace{|c|}_{1}\cos 60^\circ)(\underbrace{|a|^2}_{1})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

Ⓐ **۱۸۲- گزینه‌ی (۴)** بردار $a\times b$ بر صفحه‌ی شامل بردارهای a و b عمود است. بردار $a+b$ نیز در این صفحه قرار دارد، پس $a\times b$ بر $a+b$ عمود است. در نتیجه همواره داریم: $(a+b).(a\times b)=0$ و به مقدار m ربطی ندارد.

تذکر سؤال اشکال علمی دارد. حاصل‌ضرب داخلی دو بردار یک عدد است، نه یک بردار و ذکر کلمه‌ی «اندازه‌ی بردار» در صورت سؤال نادرست است.

Ⓑ **۱۸۳- گزینه‌ی (۴)** ابتدا مختصات A، B و C را به‌دست می‌آوریم سپس از فرمول $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ مساحت مثلث را محاسبه می‌کنیم. داریم:



محل برخورد صفحه با محور x ها : $A \xrightarrow{y=z=0} x+2\times0-2\times0=4\Rightarrow x=4\Rightarrow A(4,0,0)$

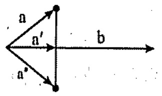
محل برخورد صفحه با محور y ها : $B \xrightarrow{x=z=0} 0+2y-2\times0=4\Rightarrow y=2\Rightarrow B=(0,2,0)$

محل برخورد صفحه با محور z ها : $C \xrightarrow{x=y=0} 0+2\times0-2z=4\Rightarrow z=-2\Rightarrow C=(0,0,-2)$

با معلوم بودن مختصات A ، B و C مساحت به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-4,2,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-4,0,-2)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-4,-8,8)\Rightarrow |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{144}=12\xrightarrow{S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|} S=6$$

Ⓐ **۱۸۴- گزینه‌ی (۱)** اگر a'' قرینه‌ی بردار a نسبت به امتداد بردار b و a' تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار b باشد، داریم:



$$a''=2a'-a=2(\frac{a.b}{|b|^2})b-a$$

حال با فرض $a=(1,-3,2)$ و $b=(1,2,0)$ داریم:

$$a''=2(\frac{1-6}{1+4})(1,2,0)-(1,-3,2)=(-2)(1,2,0)-(1,-3,2)=(-3,-1,-2)$$

روش تستی، همواره بردار قرینه و بردار اولیه، هم طول می‌باشند یعنی $|\vec{a}|=|\vec{a}''|$، پس داریم:

$$|\vec{a}''|=|\vec{a}|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$$

از میان گزینه‌ها، فقط گزینه‌ی (۱) هم‌طول با بردار $\vec{a}$ می‌باشد.

Ⓑ **۱۸۵- گزینه‌ی (۲)** از عمود بودن $a+b$ بر $a-b$ نتیجه می‌گیریم:

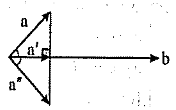
$$(a+b).(a-b)=0\Rightarrow|a|^2-|b|^2=0\Rightarrow|a|=|b|$$

$$\begin{cases}|a|=\sqrt{1+(\alpha+1)^2+4\alpha^2}\\ |b|=\sqrt{5}\end{cases}\xrightarrow{|a|=|b|}5\alpha^2+2\alpha+2=5\Rightarrow5\alpha^2+2\alpha-3=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \alpha=0/6\end{cases}$$

Ⓐ **۱۸۶- گزینه‌ی (۴)** با توجه به فرض‌های مسأله داریم: $\overrightarrow{AB}=(1,2,-2)$ و $\overrightarrow{AC}=(-4,4,-2)$. حال مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|(4,10,12)|=\frac{1}{2}\sqrt{16+100+144}=\sqrt{65}$$

Ⓑ **۱۸۷- گزینه‌ی (۳)** در شکل $\vec{a}''$ قرینه‌ی بردار $\vec{a}$ نسبت به $\vec{b}$ می‌باشد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود $\vec{a}$ نیز قرینه‌ی $\vec{a}''$ نسبت به $\vec{b}$ است. پس کافی است قرینه‌ی $\vec{a}''$ نسبت به $\vec{b}$ را از رابطه‌ی زیر به‌دست آوریم:

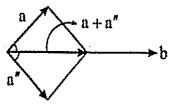


$$\vec{a}=2\vec{a}'-\vec{a}''=2(\frac{\vec{a}''.\vec{b}}{|b|^2})\vec{b}-\vec{a}''\quad(1)$$

حال با فرض $\vec{a}''=(1,-2,5)$ و $\vec{b}=(2,-1,1)$ و با استفاده از رابطه‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$\vec{a}=2(\frac{2+2+5}{4+1+1})(2,-1,1)-(1,-2,5)=3(2,-1,1)-(1,-2,5)=(5,-1,-2)$$

روش تستی، با توجه به شکل، $\vec{a}+\vec{a}''$ هم‌راستا با بردار b است پس باید مضرب $\vec{b}$ باشد و در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی (۳) این ویژگی را دارد. داریم:



$$\vec{a}+\vec{a}''=(1,-2,5)+(5,-1,-2)=(6,-3,3)=3\vec{b}$$