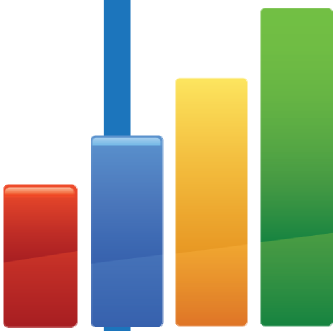
گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی



آمار و مدل‌سازی

فصل ۷

فصل هفتم: شاخص‌های پراکندگی

۱- هرگاه دامنه‌ی تغییرات داده‌های آماری $2a, b, c+3, 5$ برابر صفر باشد، حاصل $\sqrt{abc}$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۲- اگر میانگین و ضریب تغییرات نمرات یک دانش‌آموز به‌ترتیب برابر ۱۶ و ۰/۴ باشند، انحراف معیار نمرات این دانش‌آموز برابر است با:

۱) ۶/۴　　۲) ۴/۶　　۳) ۰/۴　　۴) ۴

۳- واریانس داده‌های آماری ۵۱، ۴۶، ۴۱، ۳۶، ۳۱ چقدر است؟

۱) ۶۰　　۲) ۵۰　　۳) ۱۵　　۴) ۵

۴- اگر ضریب تغییرات داده‌های آماری $x_1, x_2, \dots, x_{10}, 12$ برابر صفر باشد، میانه‌ی داده‌های آماری $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ کدام است؟

۱) ۱۰　　۲) ۱۱　　۳) ۱۲　　۴) ۱۳

۵- اگر واریانس داده‌های آماری $17, 20, 25, 11$ برابر k باشد، واریانس داده‌های آماری $52, 61, 76, 34$ برابر است با:

۱) $9k+1$　　۲) $9k$　　۳) $3k+1$　　۴) $3k$

۶- نمرات دانش‌آموزی به‌ترتیب صعودی به‌صورت $a-1, a, 10, 10, 15, 16, b, b+2$ است. اگر دامنه‌ی تغییرات داده‌ها برابر ۱۳ باشد، به‌ازای چه مقداری از b، میانگین داده‌ها نیز برابر ۱۳ خواهد شد؟

۱) ۱۰　　۲) ۹　　۳) ۱۸　　۴) ۷

۷- در ۶۰ داده‌ی آماری مجموع تمام داده‌ها برابر ۱۸۰ و مجموع مجذورات این داده‌ها برابر ۶۷۵ می‌باشد. ضریب تغییرات کدام است؟

۱) ۰/۴　　۲) ۱　　۳) ۰/۷۵　　۴) ۰/۵

۸- انحراف معیار نمرات دانش‌آموزان دو کلاس ۱۵ و ۱۰ نفره به‌ترتیب ۲ و ۳ می‌باشد. اگر میانگین نمرات دو کلاس برابر باشد، انحراف معیار نمرات کل دانش‌آموزان دو کلاس چقدر است؟

۱) $\sqrt{6}$　　۲) ۵/۷۶　　۳) ۶　　۴) ۲/۴

۹- ضریب تغییرات داده‌های ۵، ۵، ۲، ۲، ۲، ۲ چند برابر ضریب تغییرات داده‌های ۵، ۵، ۵، ۵، ۲، ۲ است؟

۱) $\frac{2}{5}$　　۲) $\frac{3}{4}$　　۳) ۱　　۴) $\frac{4}{3}$

۱۰- اگر ضریب تغییرات داده‌ها ۳ برابر انحراف معیار داده‌ها باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$　　۲) ۳　　۳) $\frac{1}{3}$　　۴) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۱۱- واریانس داده‌های آماری $x-1, x+3$ و $x+4$ برابر است با:

۱) $\frac{10}{3}$　　۲) $\frac{11}{3}$　　۳) $\frac{13}{3}$　　۴) $\frac{14}{3}$

۱۲- اگر میانگین و واریانس داده‌های آماری $x-4, y+9, 2z-12$ برابر صفر باشد، میانگین داده‌های آماری x, y, z برابر است با:

۱) صفر　　۲) $\frac{1}{3}$　　۳) ۱　　۴) ۳

۱۳- انحراف معیار داده‌های آماری $19, 22, 19, 20$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۴- اختلاف از میانگین شش داده‌ی آماری به‌صورت $5, 2, 0, 0, -3, -4$ می‌باشد. واریانس این داده‌ها چقدر است؟

۱) $\sqrt{2}$　　۲) ۳　　۳) $\sqrt{5}$　　۴) ۹

۱۵- میانگین n داده‌ی آماری برابر ۸ و انحراف معیار آن‌ها برابر ۴ است. اگر این داده‌ها را دو برابر کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید برابر است با:

۱) ۰/۵　　۲) ۱/۲۵　　۳) ۲/۵　　۴) ۳/۴

۱۶- در جدول فراوانی مقابل، واریانس داده‌ها کدام است؟

x_i	۲	۴	۶	۸
f_i	۱	۲	۹	۴

۱) ۲/۵　　۲) ۲/۲۵
۳) ۱/۷۵　　۴) ۱/۵

۱۷- ضریب تغییرات داده‌های ۱۴,۱۳,۱۳,۱۱,۱۱,۱۱,۱۰ کدام است؟ ($1/4 \simeq \sqrt{2}$)

۱) $\frac{7}{58}$ ۲) $\frac{5}{21}$ ۳) $\frac{7}{60}$ ۴) $\frac{5}{28}$

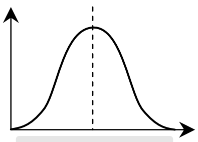
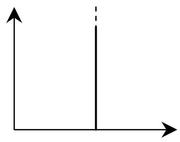
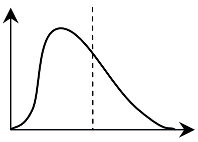
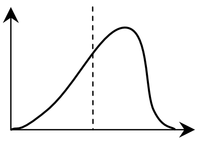
۱۸- جذر انحراف معیار نمرات درس آمار n دانش‌آموز برابر ۲ و $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 336$ است. تعداد این دانش‌آموزان برابر است با:

۱) ۲۷ ۲) ۲۵ ۳) ۲۳ ۴) ۲۱

۱۹- تعداد شش داده‌ی آماری با میانگین ۱۴ و واریانس ۴ مفروض است. اگر دو داده‌ی ۱۲ و ۱۶ به این داده‌ها افزوده شود، واریانس هشت داده‌ی جدید کدام است؟

۱) ۳/۸ ۲) ۴ ۳) ۴/۲ ۴) ۴/۵

۲۰- اگر واریانس داده‌ها صفر باشد، نمودار چند بر فراوانی این داده ها به کدام گزینه شبیه‌تر است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۲۱- ضریب تغییرات داده‌های ۵، ۵، ۲، ۲، ۲ چند برابر ضریب تغییرات داده‌های ۵، ۵، ۵، ۲، ۲ است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۲- اگر میانگین داده‌های آماری $1-2x$ و $11+3y$ و $1+4z$ برابر ۵ باشد و انحراف معیار این داده‌ها برابر صفر باشد، واریانس داده‌های x و y و z کدام است؟

۱) $\frac{37}{9}$ ۲) $\frac{38}{9}$ ۳) $\frac{115}{27}$ ۴) $\frac{113}{27}$

۲۳- داده‌های آماری ۱۲,۴,۲۳,۷,۱۴,۱۰,۱۹,۱۱,۱۳ را با نمودار جعبه‌ای نشان می‌دهیم. واریانس داده‌های داخل جعبه کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۴- اگر بخواهیم ضریب تغییرات تعدادی داده را نصف کنیم، باید ....

۱) تمام داده‌ها را دو برابر کنیم.
۲) تمام داده‌ها را نصف کنیم.
۳) تمام داده‌ها را با نصف میانگین آن‌ها جمع کنیم.
۴) تمام داده‌ها را با مقدار میانگین آن‌ها جمع کنیم.

۲۵- اگر واریانس داده‌های $2x_1+1, 2x_2+1, \dots, 2x_n+1$ برابر ۱۶ باشد، انحراف معیار داده‌های $3x_1+\frac{1}{2}, 3x_2+\frac{1}{2}, \dots, 3x_n+\frac{1}{2}$ کدام خواهد بود؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۳

۲۶- قد و وزن تعدادی از دانش‌آموزان به‌صورت

قد (سانتی‌متر): ۱۷۶ , ۱۷۴ , ۱۸۲ , ۱۷۰ , ۱۷۸
وزن (کیلوگرم): ۷۷ , ۸۱ , ۸۰ , ۷۹ , ۸۳

می‌باشد. پراکندگی در کدام متغیر بیش‌تر است؟

۱) قد
۲) وزن
۳) دارای پراکندگی یکسان هستند.
۴) این دو متغیر را نمی‌توان با هم مقایسه کرد.

۲۷- ضریب تغییرات در یک سری داده‌ی آماری ۰/۰۶ می‌باشد. اگر هر داده‌ی مفروض را دو برابر کرده و به آن پنج واحد اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید ۰/۰۵۵ می‌شود، میانگین داده‌های اولیه کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴/۵ ۳) ۲۷/۵ ۴) ۳۰

۲۸- اگر ضریب تغییرات داده‌های $x, x, x+3$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{8}$ باشد، x کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۹- ضریب تغییرات در داده‌های آماری ۰/۰۷ محاسبه شده است. اگر به هر داده ۵ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات جدید ۰/۰۶ می‌شود. انحراف معیار داده‌ها کدام است؟

۱) ۲/۱ ۲) ۳ ۳) ۲۱ ۴) ۳۰

پاسخ‌های تشریحی فصل هفتم

۱- گزینه ۴ پاسخ است.

نکته: هرگاه دامنه‌ی تغییرات داده‌ها برابر صفر باشد، نتیجه می‌گیریم که داده‌ها با هم مساوی‌اند.

بنابراین در این تست داریم:

$$R=۰ \rightarrow ۲a=b=c+۳=۵ \rightarrow \begin{cases} a=\frac{۵}{۲} \\ b=۵ \\ c=۲ \end{cases}$$

$$\sqrt{abc}=\sqrt{\frac{۵}{۲}\times ۵\times ۲}=\sqrt{۵^۲}=۵$$

۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$$CV=\frac{\sigma}{\overline{x}} \rightarrow ۰/۴=\frac{\sigma}{۱۶} \rightarrow \sigma=۰/۴\times ۱۶=۶/۴$$

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

روش اول: ابتدا باید میانگین داده‌ها را محاسبه نمود:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n}=\frac{۳۱+۳۶+۴۱+۴۶+۵۱}{۵}=\frac{۲۰۵}{۵}=۴۱$$

$$\sigma^۲=\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\overline{x})^۲}{n}=\frac{(۳۱-۴۱)^۲+(۳۶-۴۱)^۲+(۴۱-۴۱)^۲+(۴۶-۴۱)^۲+(۵۱-۴۱)^۲}{۵}$$

$$\sigma^۲=\frac{۱۰۰+۲۵+۰+۲۵+۱۰۰}{۵}=\frac{۲۵۰}{۵}=۵۰$$

روش دوم: نکته: اگر n داده‌ی آماری با یکدیگر تشکیل تصاعد حسابی با قدرنسبت d دهند، واریانس داده‌های مزبور برابر است با:

$$\sigma^۲=d^۲(\frac{n^۲-۱}{۱۲})$$

بنابراین در این تست داریم:

$$۳۱,۳۶,۴۱,۴۶,۵۱ \rightarrow \begin{cases} n=۵ \\ d=۵ \end{cases}$$

$$\sigma^۲=۵^۲(\frac{۵^۲-۱}{۱۲})=۲۵\times\frac{۲۴}{۱۲}=۲۵\times ۲=۵۰$$

۴- گزینه ۳ پاسخ است.

نکته: هرگاه یکی از شاخص‌های پراکندگی برابر صفر باشد، نتیجه می‌شود که داده‌ها و شاخص‌های مرکزی، همگی با هم برابرند.

بنابراین در این تست داریم:

$$CV=۰ \rightarrow x_۱=x_۲=...=x_{۱۰}=۱۲=\overline{x}=\tilde{x}=\hat{x}$$

پس میانگین، میانه و مد، هر سه برابر ۱۲ است.

۵- گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: اگر واریانس داده‌های آماری $x_۱,x_۲,...,x_n$ برابر $\sigma^۲$ باشد، آن‌گاه واریانس داده‌های آماری $ax_۱+b,ax_۲+b,...,ax_n+b$ برابر است با: $a^۲\sigma^۲$

اما در این سؤال با کمی دقت ملاحظه می‌شود که همه‌ی داده‌ها ابتدا سه برابر و سپس با یک جمع شده‌اند، پس داریم:

$$۱۷,۲۰,۲۵,۱۱ \xrightarrow[b=۱]{a=۳} ۵۲,۶۱,۷۶,۳۴$$

واریانس جدید : $۳^۲\times k=۹k$

۶- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a-۱, a, ۱۰, ۱۰, ۱۵, ۱۶, b, b+۲$$

$$R = x_{max} - x_{min} \to ۱۳ = b+۲-(a-۱) \to ۱۳ = b-a+۳ \to b-a = ۱۰$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \to ۱۳ = \frac{a-۱+a+۱۰+۱۰+۱۵+۱۶+b+b+۲}{۸} \to ۲a+۲b+۵۲ = ۱۰۴ \to ۲(a+b) = ۵۲ \to a+b = ۲۶$$

$$\begin{cases} b-a = ۱۰ \\ a+b = ۲۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{از جمع طرفین}} ۲b = ۳۶ \to b = ۱۸$$

۷- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\text{واریانس}\ \sigma^۲ = \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲}{n} - \bar{x}^۲ = \frac{۶۷۵}{۶۰} - (\frac{۱۸۰}{۶۰})^۲ = ۱۱/۲۵ - ۳^۲ = ۱۱/۲۵ - ۹ = ۲/۲۵ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۲/۲۵} = ۱/۵$$

$$\Rightarrow \text{ضریب تغییرات}\ CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱/۵}{۳} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$$

۸- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم بنابر تعریف واریانس $\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n}$ می‌باشد. از طرفی چون میانگین نمرات دو کلاس برابر می‌باشد، میانگین کل نمرات نیز همان مقدار خواهد بود (با توجه به مفهوم میانگین). حال می‌توانیم مجموع مجذور انحرافات از میانگین را برای کل نمرات محاسبه و بر تعداد آن‌ها (۲۵ نمره) تقسیم کنیم، یعنی:

$$\text{کلاس اول}\ \sigma_۱^۲ = \frac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + \cdots + (x_{۱۵} - \bar{x})^۲}{۱۵} = ۲^۲ \Rightarrow (x_۱ - \bar{x})^۲ + \cdots + (x_{۱۵} - \bar{x})^۲ = ۴ \times ۱۵ = ۶۰$$

$$\text{کلاس دوم}\ \sigma_۲^۲ = \frac{(y_۱ - \bar{y})^۲ + \cdots + (y_{۱۰} - \bar{y})^۲}{۱۰} = ۳^۲ \Rightarrow (y_۱ - \bar{y})^۲ + \cdots + (y_{۱۰} - \bar{y})^۲ = ۹ \times ۱۰ = ۹۰$$

$$\Rightarrow \text{واریانس کل نمرات}\ \sigma^۲ = \frac{۶۰+۹۰}{۲۵} = \frac{۱۵۰}{۲۵} = ۶ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۶}$$

۹- گزینه ۴ پاسخ است.

$$y_i = ۷ - x_i \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_y = \sigma_x \\ \bar{y} = ۷ - \bar{x} \end{array} \right. , \quad \bar{x} = \frac{۴\times۲+۲\times۵}{۶} = ۳ \Rightarrow \bar{y} = ۴ \Rightarrow \frac{CV_x}{CV_y} = \frac{\frac{\sigma_x}{\bar{x}}}{\frac{\sigma_y}{\bar{y}}} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{۴}{۳}$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\text{طبق فرض}: CV = ۳\sigma$$

$$\text{طبق فرمول}: CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \to ۳\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} \to ۳ = \frac{۱}{\bar{x}} \to \bar{x} = \frac{۱}{۳}$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ است.

روش اول: ابتدا میانگین داده‌ها را حساب نموده، سپس از فرمول واریانس بهره می‌گیریم:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{x+۴+x-۱+x+۳}{۳} = \frac{۳x+۶}{۳} = \frac{۳(x+۲)}{۳} = x+۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{[x+۴-(x+۲)]^۲ + [x-۱-(x+۲)]^۲ + [x+۳-(x+۲)]^۲}{۳} \to \sigma^۲ = \frac{۴+۹+۱}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$$

روش دوم: نکته: اگر همه‌ی داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع یا تفریق شود، واریانس داده‌ها هیچ تغییری نمی‌کند. لذا در این تست، ابتدا مقدار x را از داده‌های مفروض، حذف نموده و سپس میانگین و به‌دنبال آن واریانس داده‌ها را محاسبه می‌نماییم:

$$x+۴, x-۱, x+۳ \xrightarrow{\text{حذف مقدار}\ x} ۴, -۱, ۳$$

$$\bar{x} = \frac{۴-۱+۳}{۳} = \frac{۶}{۳} \to \bar{x} = ۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{(۴-۲)^۲ + (-۱-۲)^۲ + (۳-۲)^۲}{۳} = \frac{۴+۹+۱}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ است.

نکته‌ی مهم: هرگاه یکی از شاخص‌های پراکندگی برابر صفر باشد، آن‌گاه:

الف) داده‌های آماری همگی با یکدیگر و با شاخص‌های مرکزی برابرند:

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = \bar{x} = \tilde{x} = \hat{x}$$

ب) سایر شاخص‌های پراکندگی نیز برابر صفر می‌باشند.

بنابراین در این تست، چون واریانس یکی از شاخص‌های پراکندگی است، پس طبق «الف» داریم:

$$x - 4 = y + 9 = 2z - 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -9 \\ z = 6 \end{cases}$$

میانگین مقادیر حاصل: $\dfrac{x+y+z}{3} = \dfrac{4-9+6}{3} = \dfrac{1}{3}$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ است.

میانگین $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{19+22+19+20}{4} = \dfrac{80}{4} = 20$

واریانس $\sigma^2 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{2(19-20)^2 + (22-20)^2 + (20-20)^2}{4} = \dfrac{2\times1+4}{4} = \dfrac{6}{4}$

انحراف معیار $\sigma = \sqrt{\dfrac{6}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر میانگین داده‌ها را از هر داده‌ای کسر نماییم $(x_i - \bar{x})$، اختلاف از میانگین هر داده به‌دست می‌آید؛ لذا در این تست داریم:

$$x_1 - \bar{x} = 5 \ , \ x_2 - \bar{x} = 2 \ , \ x_3 - \bar{x} = 0 \ , \ x_4 - \bar{x} = 0 \ , \ x_5 - \bar{x} = -3 \ , \ x_6 - \bar{x} = -4$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{5^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2 + (-3)^2 + (-4)^2}{6} = \frac{25+4+9+16}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ است.

روش اول: نکته: اگر همه‌ی داده‌های آماری در عدد a ضرب شوند، میانگین داده‌ها a برابر و انحراف معیار داده‌ها $|a|$ برابر می‌گردد.

لذا در این تست، ابتدا میانگین و انحراف معیار جدید را یافته، سپس ضریب تغییرات داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \bar{x}' = a\bar{x} = 2\times 8 = 16 \\ \sigma' = |a|\sigma = 2\times 4 = 8 \end{cases}$$

$$CV' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0/5$$

روش دوم: نکته: اگر همه‌ی داده‌های آماری در عدد مثبتی ضرب شود، ضریب تغییرات داده‌ها ثابت باقی می‌ماند.

بنابراین در این تست، کافیست ضریب تغییرات همان داده‌های اولیه را بیابیم، چون ضریب تغییرات داده‌های جدید نیز با آن برابر است، پس:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0/5$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ است.

ابتدا میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

x_i	۲	۴	۶	۸
f_i	۱	۲	۹	۴

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1\times2+2\times4+9\times6+4\times8}{1+2+9+4} = \frac{2(1+4+27+16)}{16} = \frac{48}{8} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{1(2-6)^2 + 2(4-6)^2 + 9(6-6)^2 + 4(8-6)^2}{1+2+9+4} \rightarrow \sigma^2 = \frac{16+2\times4+9\times0+4\times4}{16} = \frac{40}{16} = \frac{20}{8} = 2/5$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\text{میانگین}: \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۱۰+۱۱+۱۱+۱۳+۱۳+۱۴}{۶} = \frac{۷۲}{۶} \rightarrow \bar{x} = ۱۲$$

$$\text{واریانس}: \sigma^۲ = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^۲}{n} = \frac{(۱۰-۱۲)^۲ + (۱۱-۱۲)^۲ + (۱۱-۱۲)^۲ + (۱۳-۱۲)^۲ + (۱۳-۱۲)^۲ + (۱۴-۱۲)^۲}{۶}$$

$$\rightarrow \sigma^۲ = \frac{۴+۱+۱+۱+۱+۴}{۶} = \frac{۱۲}{۶} = ۲ \xrightarrow{\text{انحراف معیار}} \sigma = \sqrt{۲} = ۱/۴ = \frac{۱۴}{۱۰} = \frac{۷}{۵}$$

$$\text{ضریب تغییرات}: CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{۷}{۵}}{۱۲} = \frac{۷}{۶۰}$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\text{طبق فرض}: \sqrt{\sigma} = ۲ \xrightarrow{\text{انحراف معیار}} \sigma = ۴ \xrightarrow{\text{واریانس}} \sigma^۲ = ۱۶$$

$$\text{فرمول}: \sigma^۲ = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^۲}{n} \rightarrow ۱۶ = \frac{۳۳۶}{n} \rightarrow n = \frac{۳۳۶}{۱۶} \rightarrow n = ۲۱$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به صورت سؤال، واریانس شش داده‌ی $x_۱, x_۲, \dots, x_۶$ برابر ۴ است، پس:

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲}{n} \rightarrow ۴ = \frac{\sum_{i=۱}^{۶}(x_i - \bar{x})^۲}{۶} \rightarrow \sum_{i=۱}^{۶}(x_i - \bar{x})^۲ = ۲۴$$

حال اگر دو داده‌ی جدید را $x_۷ = ۱۲$ و $x_۸ = ۱۶$ فرض کنیم، واریانس هشت داده‌ی جدید عبارت است از:

$$\sigma'^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۸}(x_i - \bar{x})^۲}{۸} = \frac{\sum_{i=۱}^{۶}(x_i - ۱۴)^۲ + (۱۲-۱۴)^۲ + (۱۶-۱۴)^۲}{۸} = \frac{۲۴+۴+۴}{۸} = \frac{۳۲}{۸} \rightarrow \sigma'^۲ = ۴$$

توجه کنید که با اضافه کردن دو داده‌ی ۱۲ و ۱۶ میانگین تغییری نمی‌کند.

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=۱}^{۶} x_i + ۱۲ + ۱۶}{۸} = \frac{۶ \times ۱۴ + ۲۸}{۸} = \frac{۱۴(۶+۲)}{۸} = ۱۴ = \bar{x}$$

دقت کنید اگر میانگین تغییر می‌کرد، این راه غلط بود.

راه حل در حالت کلی:

$$۱۴ = \frac{\sum_{۱}^{۶} x_i}{۶} \Rightarrow \sum_{۱}^{۶} x_i = ۱۴ \times ۶ = ۸۴$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{۱}^{n} x_i^۲}{n} - (\bar{x})^۲ \Rightarrow ۴ = \frac{\sum_{۱}^{۶} x_i^۲}{۶} - (۱۴)^۲ \Rightarrow \sum_{۱}^{۶} x_i^۲ = ۶ \times ۲۰۰ = ۱۲۰۰$$

$$\sigma^۲_{\text{جدید}} = \frac{\sum_{۱}^{۸} x_i^۲}{۸} - \left(\frac{\sum_{۱}^{۸} x_i}{۸}\right)^۲ = \frac{۱۲۰۰ + ۱۲^۲ + ۱۶^۲}{۸} - \left(\frac{۸۴+۱۲+۱۶}{۸}\right)^۲ = ۲۰۰ - ۱۹۶ = ۴$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر واریانس داده‌ها صفر باشد، تمام داده‌ها برابر خواهند بود، بنابراین در نمودار به تعداد داده‌ها، فراوانی برای یک داده که همان میانگین، میانه و مد است، خواهیم داشت و در بقیه‌ی نقاط نمودار، فراوانی صفر است.

۲۱- گزینه ۴ پاسخ است.

بین داده‌های سری اول و سری دوم، ارتباط زیر وجود دارد:

$$y_i = ۷ - x_i \Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_y = \sigma_x \\ \bar{y} = ۷ - \bar{x} \end{vmatrix} \quad , \quad \bar{x} = \frac{۴\times۲+۲\times۵}{۶} = ۳ \Rightarrow \bar{y} = ۴ \Rightarrow \frac{CV_x}{CV_y} = \frac{\frac{\sigma_x}{\bar{x}}}{\frac{\sigma_y}{\bar{y}}} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{۴}{۳}$$

نکته: می‌دانیم اگر میانگین و انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ به‌ترتیب برابر $\bar{x}$ و σ باشد، میانگین و انحراف معیار داده‌های $ax_1+b\ ,\ ax_2+b\ ,\ \dots\ ,\ ax_n+b$ به‌ترتیب $a\bar{x}+b$ و $\sigma|a|$ است.

۲۲- گزینه ۲ پاسخ است.

چون انحراف معیار داده‌های $۲x-۱$ و $۳y+۱۱$ و $۴z+۱$ برابر صفر است پس داده‌های فوق همگی با هم برابرند و چون میانگین آن‌ها برابر ۵ است پس همه داده‌ها برابر ۵ هستند یعنی داریم:

$$\begin{cases} ۲x-۱=۵ & \Rightarrow x=۳ \\ ۳y+۱۱=۵ & \Rightarrow y=-۲ \\ ۴z+۱=۵ & \Rightarrow z=۱ \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{۳-۲+۱}{۳} = \frac{۲}{۳} \qquad \delta^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{۳}(x_i-\bar{x})^۲}{n}$$

$$\delta^۲ = \frac{(۳-\frac{۲}{۳})^۲ + (-۲-\frac{۲}{۳})^۲ + (۱-\frac{۲}{۳})^۲}{۳} = \frac{(\frac{۷}{۳})^۲ + (\frac{-۸}{۳})^۲ + (\frac{۱}{۳})^۲}{۳} = \frac{۱۱۴}{۲۷} = \frac{۳۸}{۹}$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ است.

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم: ۴,۷,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۹,۲۳

چون چارک اول ۱۰ و چارک سوم ۱۵ است، واریانس داده‌های ۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴ را حساب می‌کنیم که چون دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۱ می‌سازند برابر است با:

$$\frac{۵^۲-۱}{۱۲} = ۲$$

نکته : واریانس n داده‌ی آماری با قدرنسبت d برابر است با : $d^۲\frac{n^۲-۱}{۱۲}$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ است.

فرمول محاسبه‌ی ضریب تغییرات به‌صورت زیر است:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}$$

اگر داده‌ها در عددی مثبت ضرب شوند، ضریب تغییرات فرق نخواهد کرد.

اگر داده‌ها را با عددی جمع کنیم، واریانس و انحراف معیار تغییری نمی‌کند و میانگین با آن عدد جمع می‌شود.

بنابراین اگر بخواهیم ضریب تغییرات نصف شود، کافی است داده‌ها را با مقدار میانگین جمع کنیم.

$$\Rightarrow CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{\sigma}{\bar{x}+\bar{x}} = \frac{\sigma}{۲\bar{x}} = \frac{۱}{۲}CV_{\text{قدیم}}$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ است.

نکته: اگر داده‌ها در عدد a ضرب شوند، واریانس در $a^۲$ و انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود و اگر با عددی جمع شوند، واریانس و انحراف معیار فرقی نمی‌کنند. بنابراین:

$$\sigma^۲_{۲x+۱} = ۴\sigma^۲_x \Rightarrow ۱۶ = ۴\sigma^۲_x \Rightarrow \sigma^۲_x = ۴ \xrightarrow{\text{انحراف معیار}} \sigma_x = ۲$$

$$\sigma_{۳x+\frac{۱}{۲}} = ۳\sigma_x = ۳\times۲ = ۶$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ است.

برای مقایسه‌ی پراکندگی متغیرهایی که دارای واحدهای مختلف هستند، از ضریب تغییرات استفاده می‌شود.

$$CV_{\text{قد}}=\frac{\text{انحراف معیار قد}}{\text{میانگین قد}}=\frac{\sqrt{\frac{۰+۴+۳۶+۳۶+۴}{۵}}}{۱۷۶}=\frac{\sqrt{۱۶}}{۱۷۶}=\frac{۴}{۱۷۶}=\frac{۱}{۴۴}$$

$$CV_{\text{وزن}}=\frac{\text{انحراف معیار وزن}}{\text{میانگین وزن}}=\frac{\sqrt{\frac{۹+۱+۰+۱+۹}{۵}}}{۸۰}=\frac{\sqrt{۴}}{۸۰}=\frac{۲}{۸۰}=\frac{۱}{۴۰}$$

بنابراین ضریب تغییرات مربوط به وزن بزرگ‌تر است، بنابراین پراکندگی بیش‌تری دارد.

۲۷- گزینه ۳ پاسخ است.

زمانی که داده‌ها در عددی ضرب شوند، انحراف معیار در قدرمطلق آن عدد و میانگین در خود آن عدد ضرب می‌شوند.

اگر داده‌ها با عددی جمع شوند، انحراف معیار تغییر نکرده و میانگین با آن عدد جمع می‌شود.

$$\text{قدیم}\ CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}=۰/۰۶\Rightarrow\sigma=۰/۰۶\bar{x}$$

$$\text{جدید}\ CV=\frac{۲\sigma}{۲\bar{x}+۵}=۰/۰۵۵\Rightarrow\frac{۰/۱۲\bar{x}}{۲\bar{x}+۵}=۰/۰۵۵\Rightarrow ۰/۱۲\bar{x}=۰/۱۱\bar{x}+۰/۲۷۵\Rightarrow ۰/۰۱\bar{x}=۰/۲۷۵\Rightarrow\bar{x}=۲۷/۵$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$$x, x, x+۳$$

$$\text{میانگین}=\frac{x+x+x+۳}{۳}=x+۱$$

$$\text{واریانس}=\frac{۱^۲+۱^۲+۲^۲}{۳}=\frac{۶}{۳}=۲\Rightarrow\ \text{انحراف معیار}=\sqrt{۲}$$

$$CV=\frac{\text{انحراف معیار}}{\text{میانگین}}=\frac{\sqrt{۲}}{x+۱}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{x+۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۸}\Rightarrow x+۱=۸\Rightarrow x=۷$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} cv_{\text{قدیم}}=\frac{\sigma}{\bar{x}}=۰/۰۷\Rightarrow\sigma=۰/۰۷\bar{x} \\ cv_{\text{جدید}}=\frac{\sigma}{\bar{x}+۵}=۰/۰۶\end{array}\right\}\Rightarrow ۰/۰۷\bar{x}=۰/۰۶\bar{x}+۰/۳\Rightarrow ۰/۰۱\bar{x}=۰/۳\Rightarrow\bar{x}=۳۰$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در یکی از ضرائب تغییرات}}\frac{\sigma}{\bar{x}}=۰/۰۷\Rightarrow\frac{\sigma}{۳۰}=۰/۰۷\Rightarrow\sigma=۲/۱$$