تست دوره‌ای ترکیبیات:

۱- چند رابطه هم ارزی می‌توان روی مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ تعریف کرد به طوری که $[a]=\{a,b,c,d\}$ باشد؟

۱) ۵　　۲) ۴　　۳) ۳　　۴) ۶

۲- تعداد اعداد طبیعی سه رقمی که نسبت به ۲۵۰ اول باشند کدام است؟

۱) ۴۰۰　　۲) ۳۶۰　　۳) ۲۷۰　　۴) ۱۸۰

۳- چند رابطه بازتابی می‌توان در مجموعه $A=\{۵,۶,۷,۸\}$ تعریف کرد که خاصیت پاد تقارنی نداشته باشند؟

۱) ۳۳۶۷　　۲) ۳۲۹۷　　۳) ۳۷۴۲　　۴) ۳۰۷۲

۴- تعداد جوابهای طبیعی معادله $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}=9$ باشرط $x_2<13$ کدام است ؟

۱) ۳　　۲) ۶

۳) ۱۲　　۴) ۱۰

۵- ماتریس مجاورت نظیر رابطه مفروض R که روی مجموعه $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ تعریف شده است به صورت مقابل می‌باشد تعداد دسته‌های هم ارزی که رابطه R روی مجموعه A ایجاد می‌کند کدام است ؟

$$\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\\ f\\ g \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1 \end{bmatrix}\end{array}$$

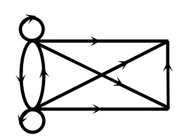
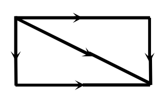
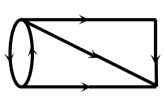
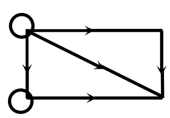
۱) ۲　　۲) ۳

۳) ۴　　۴) ۵

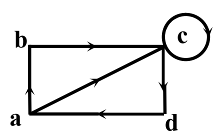
۶- با ارقام ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ چند عدد شش رقمی متمایز می‌توان ساخت ؟

۱) ۶۰　　۲) ۹۰　　۳) ۴۸۰　　۴) ۷۲۰

۷- رابطه‌ی متناظر با کدام گراف زیر روی مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ ترایایی است ولی پادتقارنی نیست؟

۱) 　　۲) 　　۳) 　　۴) 

۸- اگر M ماتریس متناظر با گراف مقابل باشد ، ماتریس $M^{(2)}$ چند درایه‌ی صفر دارد؟



۱) ۹　　۲) ۷

۳) ۱۰　　۴) ۱۲

۹- چند دسته سه تایی از ۶ نوع گل مختلف می‌توان ساخت ؟ (تکرار مجاز است)

۱) ۲۸　　۲) ۳۵　　۳) ۴۲　　۴) ۵۶

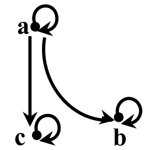
۱۰- هفت کبوتر به چند طریق می‌توانند در چهار لانه متمایز قرار گیرند ، به طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

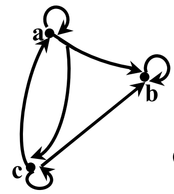
۱) ۲۱　　۲) ۱۵　　۳) ۳۵　　۴) ۲۰

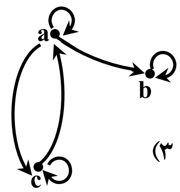
۱۱- تعداد روابط هم ارزی ۱۷ عضوی که روی مجموعه ۷ عضوی A می‌توان نوشت کدام است؟

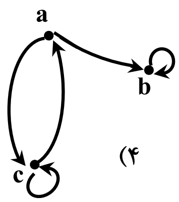
۱) ۱۵۰　　۲) ۱۷۵　　۳) ۲۱۰　　۴) ۱۰۵

۱۲- اگر $M(R)=\begin{bmatrix} \circ & ۱ & ۱ \\ \circ & ۱ & \circ \\ ۱ & \circ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت متناظر با رابطه R باشد گراف متناظر با رابطه ROR کدام است؟

۱) 

۲) 

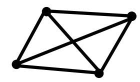
۳) 

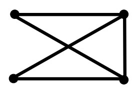
۴) 

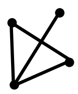
۱۳- با ارقام ۰ و۱و ۲ و۳ و۴ و۵ و۶ و بدون تکرار ارقام چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که شامل رقم ۴ باشد و یکان آن ۶ نباشد ؟

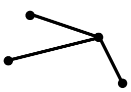
۱) ۳۱۲   ۲) ۱۸۰   ۳) ۲۱۲   ۴) ۲۸۰

۱۴- ماتریس $\begin{bmatrix} \circ & ۱ & ۱ & \circ \\ ۱ & \circ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & \circ & ۱ \\ \circ & ۱ & ۱ & \circ \end{bmatrix}$ متناظر با کدام گراف است ؟

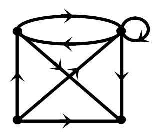
۱) 

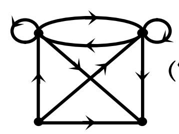
۲) 

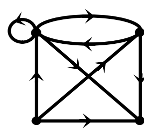
۳) 

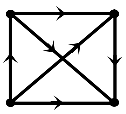
۴) 

۱۵- رابطه‌ی متناظر با کدام گراف زیر روی مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ ترایایی است ولی پادمتقارن نیست؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۶- رابطه R تعریف شده روی مجموعه ۶ عضوی A دارای خاصیت تقارنی و پاد تقارنی است. اگر این رابطه بازتابی نباشد، حداکثر دارای چند عضو خواهد بود؟

۱) صفر   ۲) ۵   ۳) ۶۳   ۴) ۳۲

۱۷ - ماتریسهای صفر و یک $A=\begin{bmatrix} ۱ & \circ & ۱ & ۱ \\ \circ & ۱ & ۱ & \circ \\ ۱ & ۱ & \circ & \circ \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۱ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & ۱ & ۱ & \circ \\ \circ & ۱ & \circ & \circ \end{bmatrix}$ مفروضند.تعداد ماتریسهای صفر و یک C ، که در رابطه $A >> C >> B$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۸   ۳) ۱۶   ۴) ۱۲۸

۱۸- به چند طریق می‌توان ۱۰ گلوله یکسان را در سه جعبه متمایز قرار داد بطوریکه هیچ جعبه‌ای خالی نماند؟

۱) ۳۶   ۲) ۴۵   ۳) ۵۵   ۴) ۶۶

۱۹- تعداد ۲۶ نقطه را داخل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۵ در نظر می‌گیریم در اینصورت حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کوچکتر از x است. x کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۵   ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) ۲

۲۰- اگر $A \subset B$ باشد حاصل $(A\Delta B')\cup(B\Delta A')$ کدام است؟

۱) $B\cup A'$ ۲) $A\cup B$ ۳) $B-A'$ ۴) $B\cap A'$

۲۱- چه تعداد تابع یک به یک و پوشا روی مجموعه $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ می‌توان نوشت که $f(2)=4$ و $f(3)\neq 1$ و $f(6)\neq 3$ باشد؟

۱) ۷۸ ۲) ۱۱۴ ۳) ۱۱۸ ۴) ۹۶

۲۲- رابطه R به صورت $aRb \Leftrightarrow (a,b)=1$ (نماد (a,b) نماد ب م م a و b است)در مجموعه $A=\{1,2,3,4,5\}$ تعریف شده است اگر $M=[m_{ij}]_{5\times 5}$ ماتریس مجاورت متناظر با آن باشد حاصل $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} m_{ij}$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۰

۲۳- اگر R_1 و R_2 دو رابطه در مجموعه A باشند و داشته باشیم $R_1\cup R_2 = A\times A$ و $R_1\cap R_2=\phi$ آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر R_1 تقارنی باشد آنگاه R_2 تقارنی است.
۲) اگر R_1 پادتقارنی باشد آنگاه R_2 پادتقارنی است.
۳) اگر R_1 متعدی باشد آنگاه R_2 متعدی است.
۴)هر سه گزینه ۱ و ۲ و ۳ صحیح است.

۲۴- حاصل جمع چهار عدد طبیعی d,c,b,a حداکثر برابر ۱۲ است تعداد طرق ممکن برای انتخاب این چهار عدد کدام است؟

۱) $\binom{12}{4}$ ۲) $\binom{13}{5}$ ۳) $\binom{12}{5}$ ۴) $\binom{13}{4}$

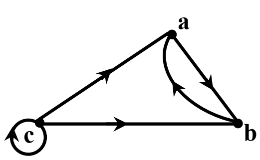
۲۵- چند رابطه می‌توان در مجموعه $A=\{1,2,3\}$ نوشت که بازتابی نباشد اما پادتقارنی باشد و زوج مرتب $(2,3)$ را نداشته باشد؟

۱) ۶۳ ۲) ۱۲۶ ۳) ۸۴ ۴) ۱۴۸

۲۶- چند عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۳۰۰ وجود دارد که بر هیچیک از اعداد ۲و۳و۵و۶و۸و۱۰ بخش پذیر نباشد؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۸۰

۲۷- اگر M ماتریس متناظر با گراف مقابل باشد، ماتریس $M\wedge M^T$ چند درایه‌ی صفر دارد؟



۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۸- یازده کبوتر را به چند طریق می‌توان در چهار لانه متمایز قرار داد به طوریکه در هیچ لانه‌ای کمتر از ۲ کبوتر قرار نگیرند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

۲۹- کم ترین تعداد افرادی که حداقل دو نفر از آنها در یک فصل از سال و دریک روز هفته متولد شده‌اند، کدام است ؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۸ ۳) ۲۹ ۴) ۳۰

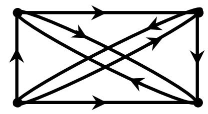
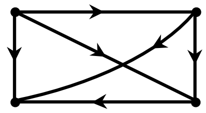
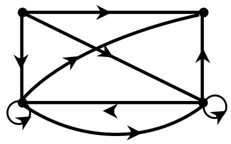
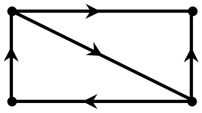
۳۰- اگر A و B دو مجموعه‌ی غیر تهی باشند و $A\times B\subset B\times A$ آنگاه کدام مجموعه ناتهی است؟

۱) $A-B$ ۲) $A\Delta B$ ۳) $A\times B$ ۴)هر سه گزینه ۱ و ۲ و ۳

۳۱- اگر $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ و رابطه R روی مجموعه‌ی A^2 به صورت $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow a-d=c-b$ تعریف شده باشد ، با فرض آنکه R یک رابطه‌ی هم ارزی است دسته‌ی هم ارزی $(1,3)$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۳۶

۳۲- رابطه‌ی متناظر با کدام گراف زیر روی مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ ترایایی نیست ولی پادمتقارن است ؟

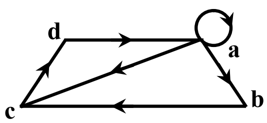
۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

۳۳- ۱۵۲ کبوتر حداکثر در چند لانه کبوتر قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از سه کبوتر قرار داشته باشد؟

۱) ۴۸ ۲) ۴۹ ۳) ۵۰ ۴) ۵۱

۳۴- اگر n عدد طبیعی و A_n بازه‌ی $((-1)^n n , 3n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=1}^{5} A_n$ تعلق دارد؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

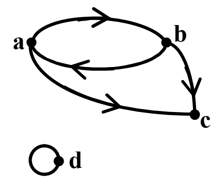


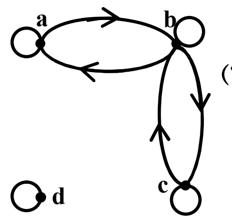
۳۵- اگر M ماتریس متناظر با گراف مقابل باشد، ماتریس $M^{(2)}$ چند درایه‌ی صفر دارد؟

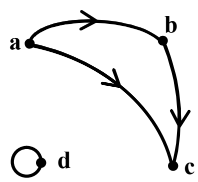
۱) ۷ ۲) ۸

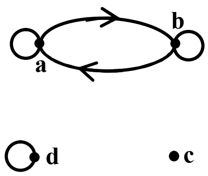
۳) ۹ ۴) ۱۰

۳۶- رابطه متناظر با کدام گراف زیر روی مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ هم ترایایی و هم تقارنی است؟

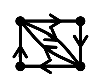
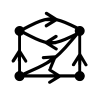
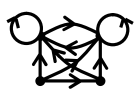
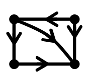
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۷- رابطه متناظر با کدام گراف زیر روی مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ ترایایی است، ولی پاد متقارن نیست؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

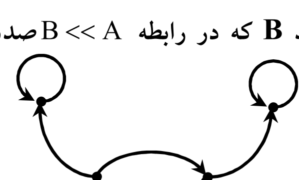
۳۸- چند رابطه هم ارزی روی مجموعه $A=\{1,2,3,4,5\}$ می‌توان تعریف کرد به طوری که $2R3$, $4\in[5]$, $1\notin[4]$ باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۹- چند رابطه هم‌ارزی می‌توان در مجموعه $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ تعریف کرد به‌طوری که $[1]=\{1,2,3\}$ و $5R6$ برقرار باشد؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۴۰- اگر ماتریس مجاورت گراف شکل مقابل را A بنامیم تعداد ماتریسهای صفر و یک مانند B که در رابطه $B << A$ صدق می‌کند چندتاست؟



۱) ۳۲ ۲) ۶۴

۳) ۱۲۸ ۴) ۲۵۶

۴۱- بازتابی بودن رابطه ROR چه نوع شرطی برای بازتابی بودن رابطه R است؟

۱) لازم ۲) کافی ۳) هم لازم و هم کافی ۴) نه لازم و نه کافی

۴۲- چند عدد طبیعی کوچکتر از ۲۰۱ وجود دارد که نسبت به ۴۵ و ۲۰ اول باشند؟

۱) ۴۲ ۲) ۸۰ ۳) ۵۴ ۴) ۶۴

۴۳- در بسط $(a+b+c+d)^{7}$ چند جمله وجود دارد که فاقد حرف a باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۱۵

۴۴- به چند طریق می‌توان ۶ جایزه متمایز را بین سه نفر تقسیم کرد به شرطی که به نفر اول حداقل یک جایزه برسد؟

۱) ۴۸۶ ۲) ۲۴۳ ۳) ۶۶۵ ۴) ۱۴۵۸

۴۵- چند عدد سه رقمی وجود دارد که مجموع ارقامشان برابر با ۱۱ باشد؟

۱) ۶۶ ۲) ۶۳ ۳) ۶۱ ۴) ۵۸

۴۶- با ارقام ۰ و ۱ و۲ چند عدد ۶ رقمی زوج می توان نوشت ؟

۱) ۷۲۹ ۲) ۱۶۲ ۳) ۴۸۶ ۴) ۳۲۴

۴۷- با ارقام ۰و۲و۳و۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می توان نوشت ؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۴۸- با حروف کلمه SHOP و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که حتماً شامل حرف S باشد ؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۴۹- تعداد اعداد ۳ رقمی فرد فاقد رقم ۵ کدام است؟

۱) ۲۸۸ ۲) ۲۵۶ ۳) ۱۹۲ ۴) ۱۴۴

۵۰- چند ماتریس ۲×۳ با درایه‌های ۰ و ۱ می‌توان نوشت؟

۱) ۶ ۲) ۳۶ ۳) ۶۴ ۴) ۴۸

۵۱- با ارقام ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ , ۰ چه تعداد عدد ۳ رقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۳۲

۵۲- با ارقام ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۲ ، ۱ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت هرگاه بر۵ بخش‌پذیر بوده و از۳۰۰۰۰ نیز بزرگتر باشد؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۵۳- چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۵ وجود دارد که در آنها رقم ۳ حداقل یکبار ظاهر شود؟

۱) ۱۷۳۲ ۲) ۸۶۶ ۳) ۲۱۰۱ ۴) ۱۸۰۲

۵۴- با حروف کلمه «ایرانیان» چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت ؟

۱) ۱۶۸۰ ۲) ۳۳۶۰ ۳) ۴۰۳۲۰ ۴) ۶۷۲۰

۵۵- اگر بخواهیم ۴ دانش آموز کلاس اول و ۳ دانش آموز کلاس دوم را در یک ردیف کنار هم بنشانیم در چند حالت دانش آموزان کلاس دوم کنار هم هستند ؟

۱) !۵ !۳ ۲) !۴ !۳ ۳) !۴ !۴ ۴) !۵ !۴

۵۶- ۴ دانش‌آموز کلاس اول و ۵ دانش‌آموز کلاس دوم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند، هرگاه دانش‌آموزان کلاس اول یک در میان باشند؟

۱) $۴!\times۵!$ ۲) $۴!\times۵!\times۲$ ۳) $۴!\times۵!\times۳$ ۴) $۴!\times۵!\times۳!$

۵۷- در یک شرکت ۶ نفری به چند طریق می‌توان از بین کارکنان شرکت یک رئیس، یک حسابدار و یک منشی انتخاب کرد هرگاه هر فرد فقط یک شغل بتواند اختیار کند؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۷۲

۵۸- ۱۰ نقطه متمایز بر روی محیط یک دایره قرار گرفته اند تعداد چهار ضلعی‌هایی که رئوس آنها بر این ده نقطه قرار دارد چه تعداد از مثلث هایی که رئوس آنها بر این ۱۰ نقطه قرار دارد بیشتر است ؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۱۰ ۴) ۹۰

۵۹- حاصل $\binom{n+۲}{۳}+\binom{n+۱}{۲}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۰}$ کدام است ؟

۱) $\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$ ۲) $\frac{(n+۳)(n+۲)(n+۱)}{۶}$ ۳) $\frac{(n+۳)(n+۲)(n+۱)}{۳}$ ۴) $\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$

۶۰- مجموع جواب‌های معادله‌ی $\binom{۲x}{۳}=\binom{۲x}{x+۱}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۶۱- اگر $P(n,۲)-C(n,۲)=۳۶$ باشد حاصل $C(n,۳)$ چیست ؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۰۸

۶۲- اگر تعداد زیر مجموعه های ۷ عضوی یک مجموعه باتعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی آن برابر باشند، تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی آن مجموعه کدام است ؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۱۰ ۳) ۴۵ ۴) ۵۵

۶۳- می خواهیم از یک کلاس ۱۰ نفری شامل A , B چهار نفر برای شرکت در یک مسابقه ورزشی انتخاب کنیم بـه طوریکـه شخص A حتماً انتخاب نشود ولی شخص B حتماً انتخاب شده باشد . این عمل به چند طریق امکان پذیر است ؟

۱) ۱۸۶ ۲) ۲۸ ۳) ۵۶ ۴) ۸۴

۶۴- کدام گزینه نادرست است؟ $(۰<k<n)$

۱) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ ۲) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+۱}=\binom{n+۱}{k+۱}$

۳) $\binom{۱۰۰}{۰}+\binom{۱۰۰}{۲}+\cdots+\binom{۱۰۰}{۱۰۰}=۲^{۵۰}$ ۴) $\binom{۵۰}{۱}+\binom{۵۰}{۳}+\cdots+\binom{۵۰}{۴۹}=۲^{۴۹}$

۶۵- اگر $A=\binom{n+۱}{K+۱}$, $\binom{n}{K}=B$ حاصل $\binom{n}{K+۱}$ برابر است با :

۱) $A+B$ ۲) $A-B$ ۳) $nA-B$ ۴) $A+nB$

۶۶- با ۱۰ نقطه‌که فقط ۵ تای مشخص از آنها روی یک خط راست هستند ، چند مثلث می‌توان ساخت؟

۱) ۷۵ ۲) ۹۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۱۰

۶۷- از بین ۵ مهره قرمز و ۴ مهره سفید می‌خواهیم ۳ مهره انتخاب کنیم. در چند حالت ۲ مهره از یک رنگ و مهره دیگر به رنگی متفاوت می‌باشد؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

پاسخ تست دوره‌ای ترکیبیات

۱- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم هر رابطه هم ارزی که روی مجموعه مفروض A تعریف شود، مجموعه A را به کلاسهای هم ارزی افراز می‌کند و یک تناظر یک به یک ما بین رابطه‌های هم ارزی و افرازهای متناظر آنها وجود دارد بنابراین تعداد رابطه‌های هم ارزی به تعداد افرازهای ایجاد شده بستگی دارد با توجه به اینکه کلاس هم ارزی عضو مفروض a شامل چهار عضو می‌باشد پس افرازهای ممکن به صورت زیر می‌باشند:

$\{\{a,b,c,d\},\{e,f,g\}\}$ $\quad$ $\{\{a,b,c,d\},\{e,f\},\{g\}\}$

$\{\{a,b,c,d\},\{e,g\},\{f\}\}$ $\quad$ $\{\{a,b,c,d\},\{f,g\},\{e\}\}$

$\{\{a,b,c,d\},\{e\},\{g\},\{f\}\}$

بنابراین ۵ رابطه هم ارزی روی مجموعه A می‌توان تعریف کرد.

۲- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر عددی نسبت به ۲۵۰ اول باشد نسبت به عوامل اول آن نیز اول خواهد بود یعنی چون $۲\times ۵^۳ = ۲۵۰$ می‌باشد پس باید اعداد مطلوب فاقد ۲ و ۵ باشند حال داریم :

$$\text{اعدادی که مضرب ۲ یا ۵ هستند} = |A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B| \Rightarrow \begin{cases} |A| = \left[\frac{۹۹۹}{۲}\right]-\left[\frac{۹۹}{۲}\right] = ۴۵۰ \\ |B| = \left[\frac{۹۹۹}{۵}\right]-\left[\frac{۹۹}{۵}\right] = ۱۸۰ \\ |A\cap B| = \left[\frac{۹۹۹}{۱۰}\right]-\left[\frac{۹۹}{۱۰}\right] = ۹۰ \end{cases}$$

$$|A\cup B| = ۴۵۰+۱۸۰-۹۰$$

$$|A\cup B| = ۵۴۰$$

$$\Longrightarrow \text{تعداد مطلوب} = ۹۰۰ - ۵۴۰ = ۳۶۰$$

۳- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر رابطه بازتابی را با مجموعه A و روابط پاد تقارنی را با مجموعه B نمایش دهیم در اینصورت تعداد اعضای مجموعه $A - B = A - (A\cap B)$ مورد نظر است که داریم:

$$|A| = ۲^{n^۲-n} = ۲^{۱۲} \qquad \text{تعداد مطلوب} = |A| - |A\cap B|$$

$$|A\cap B| = ۳^{\frac{n^۲-n}{۲}} = ۳^۶ \qquad = ۲^{۱۲} - ۳^۶ = ۴۰۹۶ - ۷۲۹ = ۳۳۶۷$$

۴- گزینه ۴ پاسخ است.

با فرض $\sqrt{x_۱} = y_۱$ و $\sqrt{x_۲} = y_۲$ و $\sqrt{x_۳} = y_۳$ بدیهی است که باید $y_۱, y_۲, y_۳$ اعدای صحیح باشند پس باید تعداد جوابهای طبیعی معادله $y_۱+y_۲+y_۳ = ۹$ را با فرض $x_۲ > ۱۳$ بیابیم که خواهیم داشت:

$$x_۲ > ۱۳ \Rightarrow \sqrt{x_۲} > \sqrt{۱۳} \xrightarrow[\text{باید صحیح باشد}]{\text{چون } y_۲} y_۲ \geq ۴$$

حال برای یافتن تعداد جوابهای طبیعی معادله $y_۱+y_۲+y_۳ = ۹$ با شرط $y_۲ \geq ۴$ داریم:

$$y_۱ + (y'_۲ + ۳) + y_۳ = ۹ \qquad y_۱ + y'_۲ + y_۳ = ۶$$

$$\longrightarrow \text{تعداد جوابهای طبیعی} = \binom{۵}{۲} = ۱۰$$

۵- گزینه ۲ پاسخ است

با توجه به ماتریس مجاورت رابطه R می‌توان تشخیص داد که :

$[a]=\{a,c,e\}$ $[b]=\{b\}$ $[c]=\{a,c,e\}$

$[d]=\{d,f,g\}$ $[e]=\{a,c,e\}$ $[f]=\{d,f,g\}$ $[g]=\{d,f,g\}$

بنابراین افراز متناظر با مجموعه A که رابطه R روی آن ایجاد می‌کند به صورت $\{\{a,c,e\},\{b\},\{d,f,g\}\}$ می‌باشد یعنی تعداد دسته‌های هم ارزی برابر ۳ است.

۶- گزینه ۲ پاسخ است.

تعداد جایگشت های n شیء که n_1 تا از آنها کاملاً یکسان و n_2 تای دیگر نیز کاملاً یکسان و ... و n_k تای دیگر نیز یکسان هستند از رابطه زیر بدست می‌آید: $\dfrac{n!}{n_1!\ n_2!\ \dots\ n_k!}$

پس در این سوال داریم : $\dfrac{6!}{2!\times 2!\times 2!}=\dfrac{720}{8}=90$

۷- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم یک رابطه ترایایی است اگر و تنها اگر در گراف جهتدار متناظر با آن اگر از رأسی مانند a به رأسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد و از رأس b به رأسی مانند c یالی موجود باشد آنگاه از رأس a به رأس c نیز یک یال وجود داشته باشد در گراف گزینه‌ی (۱) این وضعیت وجود دارد پس رابطه‌ی متناظر آن ترایایی است

یک رابطه پاد متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهتدار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هر گاه از رأسی مانند a به رأس دیگری مانند b یک یال موجود باشد آنگاه از رأس b به رأس a یالی موجود نباشد . بر این اساس گراف گزینه‌ی (۱) پاد متقارن نیست . زیرا بین دو رأس سمت چپ آن دو یال در هر دو جهت داریم پس رابطه‌ی متناظر گزینه‌ی (۱) ترایایی است ولی پاد متقارن نیست ولذا جواب سوال است.

۸- گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا ماتریس M را از روی گراف رابطه می‌نویسیم . برای این کار در محل برخورد یک سطر و یک ستون ماتریس اگر یالی از رأس متناظر سطر به رأس ستون وجود داشت یک می‌گذاریم و در غیر این صورت صفر قرار می‌دهیم و سپس ماتریس $M^{(2)}$ را محاسبه می‌کنیم . برای این کار M را در خودش ضرب ماتریس می‌کنیم و به جای هر درایه‌ای که بزرگتر یا مساوی یک شد ، یک قرار می‌دهیم.

$$M=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow M^{(2)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

همانطور که مشخص است در ماتریس $M^{(2)}$ هفت درایه‌ی صفر وجوددارد.

۹- گزینه ۴ پاسخ است.

راه اول: می‌دانیم تعداد انتخاب n گل از بین k نوع گل که درآن تکرار نیز مجاز است برابر است با $\binom{n+k-1}{n}$ در اینجا $n=3$ و $k=6$ پس تعداد انتخاب گلها به صورت زیر خواهد بود:

$$\binom{3+6-1}{3}=\binom{8}{3}=\frac{8\times 7\times 6}{3!}=56$$

راه دوم : تعدادانتخاب گل نوع iام را x_i می‌نامیم . می‌دانیم $x_i \geq ۰$ باید مجموع تعداد کل x_iها برابر ۳ گردد پس باید $x_۱$ها در معادله‌ی $x_۱ + ... + x_۶ = ۳$ صدق می‌کند . تعداد جواب های صحیح نا منفی ای معادله‌ی قبل برابر تعداد انتخاب گلهاست تعداد جوابهای صحیح نا منفی معادله‌ی فوق به صورت $\binom{۳+۶-۱}{۳} = ... = ۵۶$ است.

۱۰- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر تعداد کبوتر در لانه‌ی اول را با $x_۱$ و به همین ترتیب .... تعداد کبوتر در لانه‌ی n ام را با x_n نمایش دهیم باید تعداد جوابهای طبیعی معادله‌ی زیر را به دست آوریم . زیرا باید مجموع تعداد کل کبوترها در هرلانه‌ها برابر ۷ گردد و در لانه حداقل یک کبوتر وجود داشته باشد :

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۷$$
$$x_i \geq ۱ \ ؛ \ ۱ \leq i \leq ۴$$

فرض کنیم $x_i = y_i + ۱$ در نتیجه به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۳$$
$$x_i \geq ۰$$

از طرفی می‌دانیم تعداد جوابهای صحیح نا منفی معادله‌ی $x_۱ + ... + x_k = n$ برابر $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ است بنابراین تعداد جوابهای معادله‌ی مربوط به y_i هابرابر است با : $\binom{۳+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۶}{۳} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۳!} = ۲۰$ از طرفی تعداد جوابهای معادله‌ی مربوط به x_iها برابر تعداد جوابهای معاله‌ی مربوط به y_iهاست پس جواب سوال همان ۲۰ است

راه حل دیگر:

اگر تعداد کبوتر قرارگرفته در لانه‌ی i ام را x_i بگیریم باید تعداد جوابهای طبیعی معادله‌ی $x_۱ + ... + x_۴ = ۷$ را به دست آوریم . زیرا باید $x_i \geq ۱$ از طرفی تعداد جوابهای طبیعی ای معادله‌ی $x_۱ + ... + x_k = n$ برابر $\binom{n-۱}{k-۱}$ است پس در اینجا تعداد جوابهای طبیعی برابر خواهد بود با $\binom{۷-۱}{۴-۱} = \binom{۶}{۳} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۳!} = ۲۰$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ است.

از آنجا که هر رابطه هم ارزی متناظر با یک افراز است و تعداد اعضای رابطه هم ارزی از مجموع مربعات تعداد عضوهای کلاسهای هم ارزی موجود در افراز متناظر با آن بدست می‌آید بنابراین افرازی که یک رابطه هم ارزی ۱۷ عضوی روی مجموعه ۷ عضوی پدید می‌آورد باید به شکل $\{\{--\}و\{--\}و\{---\}\}$ باشد زیرا $۱۷ = ۲^۲ + ۲^۲ + ۳^۲$ حال تعداد افرازهای مطلوب برابر است با :

$$\frac{\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!} = ۳۵ \times ۳ = ۱۰۵$$

پس تعداد روابط هم ارزی نیز برابر ۱۰۵ است.

توجه کنید که چون دو تا از کلاس‌های هم ارزی ما دو عضوی هستند، تعدادی حالت تکراری در افراز پدید می‌آید که باید حاصل را بر !۲ تقسیم کنیم.

۱۲- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم $M(ROR) = M^{(۲)}(R)$ بنابراین داریم :

$$M(ROR) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین فقط از b به a و از b به c نباید یالی موجود باشد که با گزینه ۳ تطبیق دارد.

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است.

باید ابتدا تعداد کل اعداد زوج چهار رقمی با ارقام ذکر شده را بدست آوریم سپس اعداد زوج چهار رقمی فاقد رقم ۴ را از آن کم کنیم

تعداد کل اعداد زوج چهار رقمی $۳۲۰ = ۲۰۰ + ۱۲۰ \Rightarrow$

$\underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۱} = ۱۲۰$

رقم یکان صفر

$\underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۲} = ۲۰۰$

رقم یکان ۲یا۴

تعداد اعداد زوج چهار رقمی فاقد رقم چهار $۱۰۸ = ۴۸ + ۶۰ \Rightarrow$

$\underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۱} = ۶۰$

رقم یکان صفر

$\underline{۴}\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۱} = ۴۸$

رقم یکان ۲

$۲۱۲ = ۱۰۸ - ۳۲۰$ = تعداد اعداد چهار رقمی زوج شامل رقم ۴

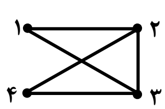
۱۴- گزینه ۲ پاسخ است.

چون ماتریس ۴×۴ است نتیجه می‌شود مرتبه‌ی گراف ۴ است چهار رأس گراف را با شماره‌های ۱ تا ۴ مشخص می‌کنیم .

سطرهای ماتریس را از بالا به سمت پائین متناظر رأس ۱ تا ۴ به ترتیب می‌گیریم:

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{matrix} \\ \begin{matrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{matrix} & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

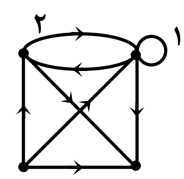
برای رسم گراف چهار رأس می‌گذاریم و از روی ماتریس رئوس را که در محل سطر و ستون آنها یک داریم به هم وصل می‌کنیم:



مثلاً چون در سطر اول و ستون دوم یک داریم رأس ۱ را به رأس ۲ وصل می‌کنیم

ولی چون در سطر اول و ستون چهارم صفر داریم رأس ۱ را به رأس ۴ وصل نمی‌کنیم.

۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.



- در گراف گزینه (۱) از رأس ۱ به ۲ و از رأس ۲ به رأس ۱ یال وجود دارد پس برای آن‌که این رابطه ترایایی باشد، باید رأس یک دارای طوقه باشد ولی چون این رأس دارای طوقه نیست پس رابطه‌ی متناظر آن ترایایی نیست. پس گزینه (۱) درست نیست.

- در گراف (۳) به‌دلیل مشابه‌ای رابطه‌ی متناظر ترایایی نیست پس گزینه (۳) درست نیست!

- در گراف گزینه (۴) چون بین هر دو رأس که یالی وجود دارد، یال برعکس یعنی یالی بین همان دو رأس ولی در جهت مخالف وجود ندارد، مشخص می‌شود که رابطه‌ی متناظر آن پادتقارنی است. پس گزینه (۴) درست نیست!

- بنابراین گزینه (۲) درست است.

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر ماتریس مجاورت نظیر رابطه مورد نظر را در نظر بگیریم تمامی درایه‌های غیر قطر اصلی آن باید برابر صفر باشند زیرا به دلیل وجود خاصیت تقارنی هر دو درایه متقارن نسبت به قطر اصلی باید یکسان باشند و به دلیل وجود خاصیت پاد تقارنی هیچ دو درایه متقارن نسبت به قطر اصلی نباید هر دو برابر ۱ باشند پس تمامی درایه‌های خارج از قطر اصلی الزاماً باید صفر باشند. از ۶ درایه باقیمانده روی قطر اصلی حداکثر ۵ درایه می‌توانند برابر ۱ باشند زیرا رابطه خاصیت بازتابی ندارد. پس حداکثر تعداد اعضای رابطه برابر ۵ است.

۱۷-گزینه ۲ پاسخ است.

توجه کنید که در مکانهایی که A و B هر دو یک هستند C نیز باید برابر یک و در مکانهایی که هر دو برابر صفر هستند C نیز باید برابر صفر باشد ، اما در مکانهایی که، A برابر یک و B برابر صفر باشد ، C آزادی عمل دارد که یک یا صفر باشد.

بنابراین ماتریس C الزاماً باید بدین شکل باشد تا در رابطه داده شده صدق کند:

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & & \square\ \square\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ & 1\square & 0 & 0\end{bmatrix}$$

مکانهای مشخص شده با مربع به معنی آزادی عمل C در مقدار دهی صفر یا یک به آن مکانها است .

هر مکان مربع شکل را با ۲ حالت می‌توان پر نمود بنابراین $2\times2\times2$ حالت برای C وجود دارد .

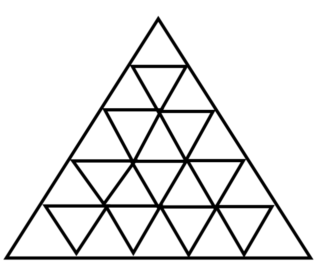
۱۸- گزینه ۱ پاسخ است.

فرض کنید تعداد گلوله‌های قرار گرفته در جعبه اول برابر x_1، و تعداد گلوله‌های قرار گرفته در جعبه دوم برابر x_2، و تعداد گلوله‌های قرار گرفته در جعبه سوم برابر x_3 باشد. مطلوب مساله تعداد دسته جوابهای معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=10$ است. با فرض $1\le x_1, 1\le x_2, 1\le x_3$ (چون هیچ جعبه‌ای نباید خالی بماند) با انجام تغییر متغیر داریم:

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1 - 1 \to x_1 = x_1 + 1 \\ x_2 = x_2 - 1 \to x_2 = x_2 + 1 \\ x_{3=} = x_3 - 1 \to x_3 = x_3 + 1 \end{array} \xrightarrow{\qquad\qquad} \begin{array}{l} X_1+1+X_2+1+X_3+1=10 \\ 0\le X_1\ ,\ 0\le X_2\ ,\ 0\le X_3 \end{array}$$

بنابراین باید تعداد دسته جوابهای $X_1+X_2+X_3=7$ را با شرط $0\le X_1, 0\le X_2, 0\le X_3$ بیابیم که طبق فرمول،برابر است با $\binom{7+3-1}{7}$ که با ساده سازی به عدد ۳۶ می‌رسیم.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.



اگر مطابق شکل ، طول هر ضلع را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنیم ۲۵ مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۱ پدید می‌آید که بزرگترین طول موجود در یک مثلث قائم الزاویه به ضلع a برابر a می‌باشد.

پس اگر ۲۵ نقطه از این نقاط در این ۲۵ مثلث قرار گیرند.

نقطه بیست و ششم بنا به اصل لانه کبوتری در داخل یکی از همین مثلثها یا روی مرز مشترک آنها قرار می‌گیرد که در اینصورت حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها کمتر از ۱ خواهد بود.

۲۰- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم $A \Delta B$ به معنای تفاضل متقارن دو مجموعه A و B است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

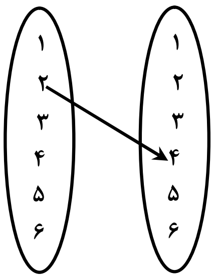
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

به راحتی می‌توان اثبات کرد که $(A \Delta B)' = A' \Delta B = A \Delta B'$ بنابراین داریم:

$$(A \Delta B') \cup (B \Delta A') = (A \Delta B)' \cup (B \Delta A)' = (A \Delta B)' \cup (A \Delta B)' = (A \Delta B)'$$
$$= ((A - B) \cup (B - A))' = ((A - B) \cup \phi)' = (A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup B$$

توجه شود که چون $B \subset A$ است پس $B - A = \phi$

۲۱- گزینه ۱ پاسخ است.



$۱۲۰ = !۵ =$ تعداد توابع یک به یک و پوشا به طوری که $f(۲) = ۴$ باشد.

حال دو مجموعه A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \{f | f(۲) = ۴ \ , \ f(۳) = ۱\}$$
$$B = \{f | f(۲) = ۴ \ , \ f(۶) = ۳\}$$

$$\text{تعداد مطلوب} = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = ۵! - ۴! - ۴! + ۳! = ۱۲۰ - ۲۴ - ۲۴ + ۶ = ۷۸$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر متمم رابطه مطلوب را در نظر بگیریم شامل زوجهای مرتبی خواهد بود که b,a نسبت به هم اول نیستند بنابراین داریم:

$$R' = \{(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۲,۴),(۴,۲)\}$$

چون $n(A \times A) = ۲۵$ بنابراین $n(R) = ۲۵ - ۶ = ۱۹$ خواهد بود از طرفی مشخص می‌شود که در ماتریس مجاورت نظیر رابطه R نیز ۱۹ درایه ۱ وجود خواهد داشت و بنابراین حاصل $\sum_{i=۱}^{۵}\sum_{i=۱}^{۵} m_{ij}$ که برابر مجموع تمامی درایه‌های ماتریس مجاورت نظیر رابطه R می‌باشد برابر ۱۹ خواهد بود.

$$\sum_{i=۱}^{۵}\sum_{j=۱}^{۵} m_{ij} = \underset{M = [m_{ij}]}{\text{مجموع تمامی درایه‌های ماتریس}} = ۱۹ \times ۱ + ۶ \times ۰ = ۱۹$$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر رابطه $R_۱$ تقارنی باشد آنگاه داریم: $\forall (x,y) \in R_۲ \Leftrightarrow (x,y) \notin R_۱ \Leftrightarrow (y,x) \notin R_۱ \Leftrightarrow (y,x) \in R_۲$

بنابراین $R_۲$ نیز تقارنی است.

برای نمایش نادرستی گزینه‌های ۲ و ۳ مثال نقض می‌آوریم.

اگر $A = \{a,b\}$ و $R_۱ = \{(a,a)\}$ و $R_۲ = \{(a,b),(b,a)(b,b)\}$ آنگاه شرایط مسئله برقرار است و $R_۱$ هم پادتقارنی و هم متعدی است اما $R_۲$ نه پادتقارنی و نه متعدی است.

۲۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$a + b + c + d \le ۱۲ \qquad \Rightarrow a + b + c + d + t = ۱۳$$

$$\Rightarrow \ \text{تعداد جوابهای طبیعی} = \binom{۱۲}{۴}$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ است.

کافیست تعداد روابط پادتقارنی وفاقدزوج مرتب (۳ و ۲) را محاسبه کرده وتعدادروابط بازتابی و پادتقارنی و فاقد زوج مرتب (۳و۲) را از آن کم کنیم تا تعداد مطلوب بدست آید.

$$\text{تعداد مطلوب} = ۳^{\frac{n^۲-n}{۲}-۱} \times ۲^n \times ۲ - ۳^{\frac{n^۲-n}{۲}-۱} \times ۲ = ۳^۲ \times ۲^۴ - ۳^۲ \times ۲ = ۳^۲ \times (۲^۴ - ۲) = ۹ \times ۱۴ = ۱۲۶$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ است.

وقتی عددی طبیعی بر ۲ و ۳ و ۵ بخش پذیر نباشد حتماً بر ۶ و ۸ و ۱۰ نیز بخش پذیر نخواهد بود بنابراین کافیست تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۳۰۰ را بیابیم که بر ۲ و ۳ و ۵ بخش پذیر نباشند که در اینصورت خواهیم داشت:

C: مضارب ۵ B: مضارب ۳ A: مضارب ۲

$$\text{تعداد مطلوب} = |S| - |A \cup B \cup C| = |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$
$$= ۳۰۰ - \left[\frac{۳۰۰}{۲}\right] - \left[\frac{۳۰۰}{۳}\right] - \left[\frac{۳۰۰}{۵}\right] + \left[\frac{۳۰۰}{۶}\right] + \left[\frac{۳۰۰}{۱۰}\right] + \left[\frac{۳۰۰}{۱۵}\right] - \left[\frac{۳۰۰}{۳۰}\right]$$
$$= ۳۰۰ - ۱۵۰ - ۱۰۰ - ۶۰ + ۵۰ + ۳۰ + ۲۰ - ۱۰ = ۸۰$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ است.

ماتریس M را با توجه به گراف داده شده می‌نویسیم . در هر سطر زیر رأس متناظر آن سطر به آنها یال داریم یک قرار می‌دهیم :

بنابراین ماتریس $M \wedge M^T$ دارای ۶ درایه صفر است.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ M = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array} , \quad M^T = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow M \wedge M^T = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۷۰ و ۷۴ تمرین ۱۲ کتاب

تعداد کبوتر در لانه‌ی اول را $x_۱$ و به همین ترتیب . . . تعداد کبوتر در لانه‌ی چهارم را $x_۴$ می‌گیریم :

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۱ \\ x_i \geq ۲ \ , \ ۱ \leq i \leq ۴ \end{cases}$$

باید تعداد جوابهای صحیح نا منفی معادله‌ی فوق را بیابیم . ابتدا تغییر متغیر $x_i = ۲ + y_i$ می‌دهیم و به معادله‌ی زیر می‌رسیم

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ = ۳$$
$$y_i \geq ۰ \ , \ ۱ \leq i \leq ۴$$

حال باید تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله‌ی مربوط به y_iها را به دست آوریم:

$$\text{تعداد جواب} \binom{۳+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۶}{۳} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۳!} = ۲۰$$

راه حل دیگر:

ابتدا در هر لانه ۲ کبوتر قرار می‌دهیم و سپس تعداد انواع قرار دادن کبوتر باقیمانده را $(۱۱ - ۴ \times ۲ = ۳)$ در چهار لانه به دست می‌آوریم:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۳ \Rightarrow \text{تعداد جواب} \binom{۳+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۶}{۳} = ۲۰$$

$$x_i \geq ۰ \ , \ ۱ \leq i \leq ۴$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ است.

روز هفته – تعداد فصل = تعداد فصل × تعداد روز هفته = ۷×۴ = ۲۸

در کل ۲۸ فصل – روز متفاوت داریم . فروردین – شنبه ، . . . . ، زمستان – جمعه

بنابراین اگر ۲۹ نفر داشته باشیم بنابر اصل لانه کبوتر حداقل در یک فصل – روز ۲ نفر متولد شده‌اند.

۳۰- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۵۹ و ۶۱ تمرین ۴ کتاب

می‌دانیم اگر $A\times B\subset B\times A$ آنگاه برای هر $x\in A$ و $y\in B$ چون $(x,y)\in A\times B$ نتیجه می‌شود که $(x,y)\in B\times A$ و لذا $x\in B$ و $y\in A$ پس $A\subset B$ و $B\subset A$.

بنابراین $A=B$ که نتیجه می‌شود $A-B=\phi$ و $A\Delta B=\phi$ پس فقط $A\times B$ به دلیل ناتهی بودن A و B ناتهی می‌شود و گزینه‌ی ۳ درست است.

۳۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow a-d=c-b\Leftrightarrow a+b=c+d$

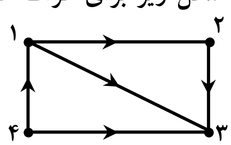
با توجه به تساوی آخر معلوم می‌شود که زوجهای مرتبی با هم رابطه دارند که مجموع مؤلفه اول و دوم آنها با هم برابر باشد.

پس زوج مرتب (۳ و ۱) با زوجهای مرتبی رابطه دارد که موجوع مؤلفه‌ی اول و دوم آنها برابر ۱+۳ = ۴ باشد این زوجها به صورت زیرند: (۱ و ۳) و (۲ و ۲) و (۳ و ۱) که تعداد آنها برابر ۳ است.

۳۲- گزینه ۴ پاسخ است.

گزینه (۴) درست است . زیرا چون در گراف‌های متناظر گزینه‌های ۲ و ۴ دو رأس که بین آنها در هر دو جهت یال وجود داشته باشد، موجود نیست رابطه‌ی متناظر با ان ، پاد تقارنی هستند ولی به همین دلیل چون در گرافهای متناظر گرزینه‌های ۱ و ۳ در رئوس وجود دارد که بین انها ۲ یال در رو جهت متفاوت وجود دارد رابطه‌های متناظر این دو پاد تقارنی نیستند.

از طرف دیگر رابطه‌ی متناظر گزینه (۴) ترایایی نیست زیرا با توجه به شماره‌گذاری رئوس در شکل زیر برای گراف گزینه (۴) می‌توان به سادگی دید که از رأس ۱ به رأس ۳ یک یال داریم و از رأس ۳ به رأس ۴ نزدیک یال داریم ولی از رأس ۱ به رأس ۴ یالی نداریم: ۱R۴, ۳R۴ , ۱R۳



بنابراین دیده می‌شود که رابطه متناظر گراف گزینه (۴) ترایایی نیست و پادمتقارن است.

۳۳- گزینه ۳ پاسخ است.

تعداد لانه‌ها را n می‌گیریم . برای آنکه حداقل در یک لانه بیش از سه کبوتر قرار گیرید باید تعداد کبوترها از ۳ برابر تعداد لانه‌ها اکیداً بزرگتر باشد:

$$۱۵۲>۳n\Rightarrow n<\frac{۱۵۲}{۳}\Rightarrow n<۵۰/۶۶\Rightarrow n\le ۵۰\Rightarrow n \text{ حداکثر } =۵۰$$

۳۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$A_1=(-1,3)\ ,\ A_2=(2,6)\ ,\ A_3=(-3,9)\ ,\ A_4=(4,12)\ ,\ A_5=(-5,15)$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{5}A_n=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5=A_5=(-5,15)$$

در تساوی آخر از این قضیه استفاده کرده‌ایم که اگر $A\subset B$ آنگاه $A\cup B=B$.

اکنون در فاصله $(-5,15)$ اعداد صحیح $-4,-3,\dots,14$ قراردارد که تعداد آنها برابر است با $14-(-4)+1=19$

۳۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$$M=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ماتریس $\mathbf{m}$ را می‌نویسیم : برای این کار پس از مشخص کردن حروف سطرهای ماتریس ، حروف ستونهای ماتریس را مشابه سطرهای متناظر آنها می‌گذاریم مثلاً اگر سطر اول را با $\mathbf{a}$ مشخص می‌کنیم. سپس در سطر مقابل یک حرف زیر هر راسی که آن حرف به آن یال دارد یک قرار می‌دهیم و بقیه درایه‌ها را صفر می‌گذاریم. اکنون ماتریس $\mathbf{M}^{(2)}$را مشخص می‌کنیم برای این کار باید $\mathbf{M}$ را در خودش ضرب بولی می‌کنیم : برای به توان رساندن بولی یک ماتریس می‌توان از روش زیر که سریعتر است استفاده کرد:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

برای یافتن سطرهای $\mathbf{M}^{(2)}$با توجه به سطرهای $\mathbf{M}$ سطرهای $\mathbf{M}$ را مانند زیر با هم جمع می‌کنیم :

سطر اول $\mathbf{M}$ = $(1,1,1,0) \Rightarrow$ سطر اول $\mathbf{M}^{(2)}$ = سطر اول $\mathbf{M}$ $\overset{\circ}{+}$ سطر دوم $\mathbf{M}$ $\overset{\circ}{+}$ سطر سوم $\mathbf{M}$ = $(1,1,1,1)$

سطر دوم $\mathbf{M}$ = $(0,0,1,0) \Rightarrow$ سطر دوم $\mathbf{M}^{(2)}$ = سطر سوم $\mathbf{M}$ = $(0,0,0,1)$

سطر سوم $\mathbf{M}$ = $(0,0,0,1) \Rightarrow$ سطر سوم $\mathbf{M}^{(2)}$ = سطر چهارم $\mathbf{M}$ = $(1,0,0,0)$

سطر چهارم $\mathbf{M}$ = $(1,0,0,0) \Rightarrow$ سطر چهارم $\mathbf{M}^{(2)}$ = سطر اول $\mathbf{M}$ = $(1,1,1,0)$

۳۶- گزینه ۴ پاسخ است.

گزینه‌ی (۴) درست است. زیرا رابطه متناظر با گراف گزینه‌ی (۴) متقارن است. دلیل این امر آن است که به غیر از طوقه‌ها هر یالی که دارد، یالی در جهت عکس آن نیز دارد. در واقع به غیر از طوقه‌ها تنها دو یال $\mathbf{ab}$ و $\mathbf{ba}$ را دارد که جهت‌های آنها عکس هم می‌باشد. همین طور رابطه‌ی متناظر با گراف گزینه‌ی (۴) ترایایی است. دلیل این امر آن است که در این گراف اگر از رأسی مانند $\mathbf{a}$ به رأسی دیگر مانند $\mathbf{b}$ یک یال موجود باشد و از رأس $\mathbf{b}$ به رأسی از گراف یالی موجود باشد آنگاه از رأس $\mathbf{a}$ به رأس آخر نیز یک یال وجود دارد.توجه کنید رابطه‌ی متناظر گزینه‌ی (۱) نه متقارن است و نه ترایایی و رابطه‌ی متناظر گراف گزینه‌ی (۲) متقارن است ولی ترایایی نیست. رابطه‌ی متناظر گراف گزینه‌ی (۳) متقارن نیست ولی ترایایی است.

۳۷- گزینه ۳ پاسخ است.

یک رابطه پاد متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از رأسی مانند $\mathbf{a}$ به رأسی دیگر مانند $\mathbf{b}$ یک یال موجود باشد آنگاه از رأس $\mathbf{b}$ به رأس $\mathbf{a}$ یالی موجود نباشد. این وضعیت فقط در گراف گزینه ۴ برقرار است پس رابطه‌ی متناظر گراف پادمتقارن است و لذا جواب تست نیست.

یک رابطه ترایایی است اگر و تنها اگر در گراف جهت‌دار متناظر با آن اگر از رأسی مانند $\mathbf{a}$ به رأسی دیگر مانند $\mathbf{b}$ یک یال موجود باشد و از رأس $\mathbf{b}$ به رأسی مانند $\mathbf{c}$ یالی موجود باشد آنگاه از رأس $\mathbf{a}$ به رأس $\mathbf{c}$ نیز یک یال موجود باشد.

چنین وضعیتی فقط در گراف گزینه ۳ برقرار است. پس رابطه متناظر این گراف ترایایی است. بنابراین جواب تست است.

توجه کنید که در گراف گزینه ۱ و ۲ به خاطر وجود دو یال بین دو رأس در جهات مختلف و عدم وجود طوقه در رئوس این دو یال خاصیت بالا برقرار نیست و رابطه‌های متناظر این گراف‌ها ترایایی نیستند.

۳۸- گزینه ۲ پاسخ است.

چون $۲R۳$ پس باید ۲و۳ داخل یک کلاس هم ارزی قرار داشته باشند و چون $۴\in[۵]$ است پس ۴ و ۵ نیز باید داخل یک کلاس هم‌ارزی قرار داشته باشند و چون $۱\notin[۴]$ پس عدد ۱ نمی‌تواند در داخل کلاس شامل ۴ و ۵ باشد پس حالات ممکن برای افراز مجموعه A به‌صورت زیر خواهند بود:

$\{\{۲,۳\},\{۴,۵\},\{۱\}\}$

$\{\{۱,۲,۳\},\{۴,۵\}\}$

$\{\{۲,۳,۴,۵\},\{۱\}\}$

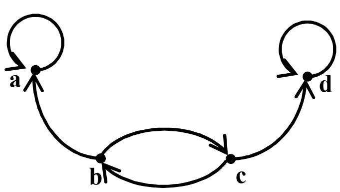
از آنجا که مابین تعداد روابط هم ارزی و تعداد افرازها یک تناظر یک به یک وجود دارد پس ۳ رابطه هم ارزی روی مجموعه A می‌توان تعریف کرد.

۳۹- گزینه ۴ پاسخ است.

افرازهای ممکن با توجه به اطلاعات موجود در مسئله عبارتند از: $\{\{۱,۲,۳\},\{۴,۵,۶\}\}$ و $\{\{۱,۲,۳\},\{۴\},\{۵,۶\}\}$ و بنابراین دو رابطه هم‌ارزی نیز می‌توان تعریف کرد.

توجه شود که چون $۵R۶$ بنابراین باید مقادیر ۵ و ۶ حتماً در یک کلاس هم‌ارزی قرار داشته باشند.

۴۰- گزینه ۲ پاسخ است.



اگر رئوس گراف را d,c,b,a بنامیم خواهیم داشت:

$$A=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ b & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ c & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ d & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}$$

بنابراین ماتریس B باید به صورت زیر باشد:

$$B=\begin{bmatrix} \bigcirc & ۰ & ۰ & ۰ \\ \bigcirc & ۰ & \bigcirc & ۰ \\ ۰ & \bigcirc & ۰ & \bigcirc \\ ۰ & ۰ & ۰ & \bigcirc \end{bmatrix}$$

پس چون هریک از درایه‌هایی که به صورت $\bigcirc$ نمایش داده شده‌اند می‌توانند برابر ۰ یا ۱ باشند در مجموع $۲^۶=۶۴$ ماتریس صفر و یک مانند B وجود دارد.

۴۱- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر رابطه R رابطه‌ای بازتابی باشد آن‌گاه رابطه ROR نیز بازتابی خواهد بود (تمرین کتاب درسی) اما عکس این مطلب برقرار نیست یعنی ممکن است رابطه ROR بازتابی باشد ولی رابطه R بازتابی نباشد.

نکته: اگر گزاره شرطی $P\Rightarrow q$ برقرار باشد آن‌گاه P شرط کافی برای q و q شرط لازم برای P می‌باشد.

۴۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$۲۰=۲^۲\times۵$ $\qquad$ $۴۵=۳^۲\times۵$

$$\begin{cases} A: \text{مضارب ۲} \\ B: \text{مضارب ۳} \\ C: \text{مضارب ۵} \end{cases}$$

$$\text{تعداد مطلوب}=|S|-|A\cup B\cup C|$$

$$=|S|-\left(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\right)$$

$$=۲۰۰-\left[\frac{۲۰۰}{۲}\right]-\left[\frac{۲۰۰}{۳}\right]-\left[\frac{۲۰۰}{۵}\right]+\left[\frac{۲۰۰}{۶}\right]+\left[\frac{۲۰۰}{۱۰}\right]+\left[\frac{۲۰۰}{۱۵}\right]-\left[\frac{۲۰۰}{۳۰}\right]$$

$$=۲۰۰-۱۰۰-۶۶-۴۰+۳۳+۲۰+۱۳-۶=۵۴$$

۴۳- گزینه ۲ پاسخ است.

تمامی جملات بسط به‌صورت کلی $ka^{\alpha_1}b^{\alpha_2}c^{\alpha_3}d^{\alpha_4}$ می‌باشند که باید $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$ باشد یعنی مجموع توان‌های حروف در تمامی جملات برابر ۷ است. حال چون می‌خواهیم جملات فاقد حرف a را بیابیم باید $\alpha_1=0$ باشد پس $\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$ و تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر $36=\binom{9}{2}=\binom{7+3-1}{3-1}$ می‌باشد.

۴۴- گزینه ۳ پاسخ است.

تعداد راه های توزیع ۶ جایزه متمایز بین سه نفر طبق اصل ضرب برابر 3^6 خواهد بود زیرا جایزه اول به ۳ طریق ، جایزه دوم به ۳ طریق و ... و جایزه ششم نیز به ۳ طریق قابل توزیع هستند حال باید حالاتی که به نفر اول هیچ جایزه‌ای نمی رسد را از تعداد کل حالات کم کنیم یعنی داریم: $665=64-729=2^6-3^6=$ تعداد مطلوب

توجه شود که تعداد حالاتی که به نفر اول هیچ جایزه‌ای نمی رسد برابر 2^6 است زیرا جوایز موجود بین دو نفر تقسیم می‌شوند.

۴۵- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر اعداد مطلوب را به شکل $\overline{xyz}$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$x+y+z=11 \qquad 1\le x\le 9,\ 0\le y\le 9,\ 0\le z\le 9$$

$$x'+1+y+11 \Rightarrow x'+y+z=10 \qquad 0\le x'\le 8,\ 0\le y\le 9,\ 0\le z\le 9$$

$$A=\{x'\ge 9\} \qquad B=\{y\ge 10\} \qquad C=\{z\ge 10\}$$

$$=|S|-|A\cup B\cup C|=|S|-\left(|A|+|B|+|C|+|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|\right)$$

$$=\binom{12}{2}-\binom{3}{2}-\binom{2}{2}-\binom{2}{2}+0+0+0-0=66-3-1-1=61$$

۴۶- گزینه ۴ صحیح است .

رقم یکان یا صفر یا ۲ می باشد در رقم سمت چپ هم که صفر نمی‌تواند باشد پس تعداد حالات هر رقم عبارتست از:

$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{3}\ \boxed{2}$

$2^2\times 3^4=4\times 81=324$

۴۷- گزینه ۳ صحیح است.

صفر ⟵ باشد

$\underline{3}\times\underline{2}\times\underline{1}\times\underline{1}$

۵ ⟵ باشد

$\underline{2}\times\underline{2}\times\underline{1}\times\underline{1}$

$6+4=10$

۴۸- گزینه ۲ صحیح است.

از بین حروف H , O , P باید دو حرف با در نظر گرفتن اولویت، در نظر گرفت: $3\times 2=6$

۴۹- گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به شرایط مساله، می‌توانیم تکرار داشته باشیم پس $\boxed{4}\ \boxed{9}\ \boxed{8}=9\times 8\times 4=288$

فرد غیر ۵

جز صفر و ۵

جز ۵

۵۰- گزینه ۳ صحیح است.

۶ درایه داریم که هرکدام ۲ حالت دارند .

۵۱- گزینه ۲ صحیح است.

* اگر تکرار ارقام مجاز نباشد

$$\left.\begin{matrix} \underline{٤} \times \underline{٤} \times \underline{١} & \text{(رقم یکان ۵ باشد)} & = ١٦ \\ \underline{٥} \times \underline{٤} \times \underline{١} & \text{(رقم یکان صفر باشد)} & = ٢٠ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ٢٠ + ١٦ = ٣٦$$

اگر تکرار ارقام مجاز باشد $\underline{٢} \times \underline{٦} \times \underline{٥}$ یعنی ۶۰ عدد است.

۵۲- گزینه ۲ صحیح است .

$\boxed{٢}\ \boxed{٣}\ \boxed{٢}\ \boxed{١}\ \boxed{١}$ حاصل $= ٢ \times ٣ \times ٢ = ١٢$

۳ یا ۴ فقط ۵

۵۳- گزینه ۱ صحیح است .

کافی است اعداد فاقد ۳ را از کل اعداد کم کنیم : $۴\times۵\times۵\times۵\times۵ - ۳\times۴\times۴\times۴\times۴ = ۱۷۳۲$

۵۴- گزینه ۱ صحیح است .

چون ۳ حرف «الف» ۲ حرف «ی» و ۲ حرف «ن» داریم لذا تعداد کلمات ۸ حرفی نوشته شده با حروف آن $\frac{۸!}{۳!\times۲!\times۲!}$ می باشد .

$$\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۲۴} = ۱۶۸۰$$

در حقیقت !۳ موجود در مخرج، به خاطر جابجایی ۳ حرف «الف» با یکدیگر است که حالت جدیدی به وجود نمی‌آورد و !۲ های موجود در مخرج نیز به جهت جابجایی‌های ۲ حرف «ی» با هم و ۲ حرف «ن» با هم است.

۵۵- گزینه ۱ صحیح است .

اگر دانش آموزان کلاس دوم را کنار هم قرار دهیم این امر به !۳ حالت صورت می گیرد حال کلاس دومی‌ها را به هم می‌چسبانیم و به عنوان یک نفر در نظر می‌گیریم تا همیشه کنار هم باشند (از این روش، در سؤالاتی که خواسته شده چند نفر یا چند شیء حتماً کنار هم باشند، استفاده کنید.) این دسته در کنار اولها یک گروه ۵ نفری تشکیل می‌دهد که به !۵ حالت با یکدیگر جابجا می شوند مطابق اصل ضرب داریم : $n(A) = ۳!\times۵!$

۵۶- گزینه‌ی ۳ صحیح است.

$$\left.\begin{matrix} \text{DA DA DA DAD} & ٤!\times٥! \\ \text{AD AD AD AD D} & ٤!\times٥! \\ \text{D DA DA DA DA} & ٤!\times٥! \end{matrix}\right\} \Rightarrow ٣\times٤!\times٥!$$

۵۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$\binom{۶}{۳}\times۳!$$

۵۸- گزینه ۴ صحیح است .

چون در انتخاب مثلث ها و چهار ضلعی ها اولویت در انتخاب رئوس مهم نمی باشد لذا مساله یک مساله ترکیب است:

$$\binom{۱۰}{۴} - \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۴!۶!} - \frac{۱۰!}{۳!\,۷!} = \frac{۱۰\times۹\times۸\times۷}{۴\times۳\times۲\times۱} - \frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱} = ۲۱۰ - ۱۲۰ = ۹۰$$

۵۹- گزینه ۲ صحیح است .

می دانیم : $\binom{n}{k}+\binom{n}{K+1}=\binom{n+1}{K+1}$ **پس:**

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{1}\Rightarrow\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{2}\Rightarrow\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{3}=\binom{n+3}{3}$$

حاصل نهایی$=\dfrac{(n+3)!}{3!\times n!}=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$

۶۰-گزینه ۳ پاسخ است.

برای برقراری معادله‌ی داده شده باید یکی از دو حالت $3=x+1$ یا $x+1+3=2x$ برقرار باشد. در نتیجه $x=2$ یا $x=4$.

نکته: همواره داریم: $\binom{n}{K}=\binom{n}{n-K}$ در نتیجه برای برقراری تساوی $\binom{n}{K}=\binom{n}{r}$ باید یکی از دو تساوی $K=r$ یا $K+r=n$ برقرار باشد.

۶۱- گزینه ۲ صحیح است.

$$n(n-1)-\frac{n(n-1)}{2}=36$$

$$\frac{n(n-1)}{2}=36 \qquad n(n-1)=72=9\times8$$

$$n=9\ \Rightarrow\ C(9,3)=\frac{9!}{6!\times3!}=\frac{9\times8\times7}{3\times2}=84$$

۶۲- گزینه ۴ صحیح است.

$$\binom{n}{7}=\binom{n}{4}\ \Rightarrow\ 4+7=n$$

$$n=11\ \Rightarrow\ \binom{11}{2}=\frac{11!}{2!\times9!}=\frac{11\times10}{2}=55$$

۶۳- گزینه ۳ صحیح است. چون A انتخاب نمی‌شود و B انتخاب می‌شود، پس باید از بین ۸ نفر دیگر، ۳ نفر انتخاب کنیم.

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\times5!}=\frac{8\times7\times6}{6}=56$$

۶۴- گزینه ۳ صحیح است

۶۵- گزینه‌ی ۲ صحیح است.

می‌دانیم: $\binom{n}{K}+\binom{n}{K+1}=\binom{n+1}{K+1}$ **پس:** $\binom{n}{K+1}=\binom{n+1}{K+1}-\binom{n}{K}$

۶۶- گزینه ۴ صحیح است.

کافی است ۳ نقطه همزمان از بین ۵ نقطه انتخاب نشوند

$$\binom{10}{3}-\binom{5}{3}=\frac{10!}{3!\,7!}-\frac{5!}{3!\,2!}=120-10=110$$

۶۷- گزینه ۲ صحیح است.

$$\underbrace{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}_{\text{۲مهره}}+\underbrace{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}_{\text{۲ مهره سفید}}=10\times4+5\times6=70$$

آزمون مجموعه، ضرب دکارتی، رابطه:

۱- متمم مجموعه‌ی $(A-B)-B'$ نسبت به مجموعه‌ی جهانی کدام گزینه است؟

۱) A ۲) B ۳) $\varnothing$ ۴) U

۲- اگر $A_n=(-\frac{n}{۲},\frac{n}{n+۲})$ باشد، $(A_۲\cup A_۴)-A_۵$ کدام گزینه است؟

۱) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳})$ ۲) $(\frac{۲}{۳},\frac{۵}{۷})$ ۳) $(-\frac{۵}{۲},\frac{۵}{۷})$ ۴) $\varnothing$

۳- اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، مجموعه‌ی $[A\cap(A\cup B)]\cap[(A-B)'\cap(A\cap B)]'$ کدام گزینه است؟

۱) $\varnothing$ ۲) U ۳) $A-B$ ۴) $A\cap B$

۴- اگر A و B دو مجموعه مفروض باشند در این صورت حاصل $(A\cup B)-(A-B)$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $B-A$

۵- اگر A و B مجموعه‌های دلخواهی باشند حاصل $[((A-B')\cup B)\cup((B-A')\cup A)]\cap((A\cap B)\cup A)$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

۶- اگر $A\,\Delta\,B=\varnothing$ باشد، حاصل عبارت $(A\,\Delta\,A')-B$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) A ۲) A' ۳) $B-A$ ۴) M

۷- مجموعه‌ی $(B-A)'\cap(A\cup B)\cap B'$ برابر کدام است؟

۱) $B'-A'$ ۲) B' ۳) A ۴) $\varnothing$

۸- اگر مجموعه‌ی A به‌صورت $A=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ تعریف شده باشد، مجموعه‌ی $p(A)-A$ دارای چند زیرمجموعه است؟ ($p(A)$ مجموعه‌ی توانی مجموعه‌ی A است.)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۹- حاصل عبارت $(A\Delta(B-A))-(A\Delta(A-B))$ برابر کدام گزینه است؟

۱) B ۲) A ۳) $A\Delta B$ ۴) $A\cup B$

۱۰- متمم مجموعه‌ی $A-[(A\,\Delta\,B)-(A-B)]$ کدام است؟

۱) $B'\cap A$ ۲) $B\cap A'$ ۳) $A'\cup B$ ۴) $A\cup B'$

۱۱- هرگاه $A_n=(-n-۲,۲n)$ باشد، در این صورت تعداد عضوهای صحیح مجموعه‌ی $\bigcup_{i=۱}^{۵}A_i$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۱۲- اگر $A\subseteq B$ باشد، متمم مجموعه‌ی $(A\Delta B')-(A\cap B)$ نسبت به مجموعه‌ی جهانی کدام گزینه است؟

۱) B' ۲) B ۳) A ۴) A'

۱۳- اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، حاصل $(A'\Delta B)\cap(A\cup B)$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $A\cap B$ ۳) $A-B$ ۴) $B-A$

۱۴- اگر $a=\{۱,\{۱\}\}$ باشد، $P(A)-A$ چند زیرمجموعه‌ی سره دارد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۵- اگر $A\,\Delta\,(B-A)=B$ آن‌گاه:

۱) $A\subseteq B$ ۲) $B\subseteq A$ ۳) $A=\varnothing$ ۴) $B=U$

۱۶- اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند و $A\times B=B\times A$ باشد، آن‌گاه حاصل $A\Delta B$ کدام گزینه است؟

۱) $\varnothing$ ۲) U ۳) A ۴) A'

۱۷- اگر مجموعه‌ی A دارای ۵ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۸ عضو و $A \cup B$ دارای ۱۰ عضو باشند، مجموعه‌ی $(A-B)\times(B-A)$ چند عضو دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۸- مجموعه‌های $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{a,b,m,n\}$ مفروضند. تعداد عضوهای مجموعه‌ی $A^۲ - A\times B$ از تعداد عضوهای مجموعه‌ی $B^۲ - B\times A$ چقدر بیش‌تر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۹- اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۴\}$ باشد، تعداد اعضای مجموعه‌ی $(A\times B)\cap(B\times A)$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۰- اگر A و B دو مجموعه‌ی ناتهی و $A \neq B$ باشد و $(A-B)\times B = A\times(B-A)$ باشد، حاصل $A'\Delta B'$ کدام گزینه است؟

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) A ۴) B

۲۱- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A\cap B=\{۴,۵\}$ و مجموعه‌ی $A\times B - B^۲$ دارای ۲۰ عضو باشد، مجموعه‌ی $B\times A - A^۲$ دارای چند عضو است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۲۲- اگر $S=\left\{(x,y) \middle| x^۲-x-۲\le y\le ۰\right\}$ باشد، مجموعه‌ی $S\cap(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})$ چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

۲۳- چند ماتریس مجاورت مانند X به طوری که $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \ll X \ll \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یافت می‌شود ؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۱ ۴) ۴

۲۴- کدام گزینه همواره درست است؟ (M ماتریس نظیر رابطه دلخواه می‌باشد)

۱) $M << M \wedge M^T$ ۲) $M\wedge M^T << M$ ۳) $M\wedge M^T << I$ ۴) $M << M^T$

۲۵- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و R رابطه بخشپذیری در A باشد، یعنی برای هر x,y در $A: xRy \Leftrightarrow x|y$ آنگاه ماتریس این رابطه دارای چند عدد ۱ است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۰ ۳) ۷ ۴) ۱۸

۲۶- اگر $M(R)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد ، ماتریس $\overline{R^{-۱}}$ کدامست ؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۲۷- اگر $M(R_۱)=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $M(R_۲)=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد ، حاصل $M(R_۱\Delta R_۲)$ کدامست ؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۲۸- اگر ماتریس متناظر با رابطه R به صورت $M(R)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ داده شده باشد، رابطه ROR چند عضوی است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

۲۹- رابطـه $R=\{(۱,۱),(۲,۱),(۱,۳),(۳,۲)\}$ در مجموعــه $A=\{۱,۲,۳\}$ تعریــف شــده اســت. تعــداد اعضــای رابطــه ROR چندتاست؟

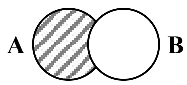
۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۴

۳۰- اگر رابطه $R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۳,۳),(۳,۴)\}$ روی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ تعریف شده باشد $M(ROR), M(R)$ چند درایه برابر دارند ؟

۱) ۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۳

پاسخ تشریحی:

۱- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\left((A-B)-B'\right)' = \left((A-B)\cap B\right)' \xlongequal{(A-B)\cap B=\varnothing} (\varnothing)' = U$$

۲- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} A_{2} = (-1, \frac{2}{4}) \\ A_{4} = (-2, \frac{2}{3}) \end{array}\right\} \to A_{2}\cup A_{4} = (-2, \frac{2}{3})$$

$$A_{5} = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{7}) \Rightarrow (A_{2}\cup A_{4}) - A_{5} = \varnothing$$

دقت کنید که: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n$

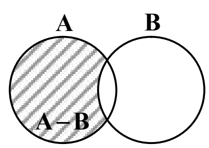
۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$A\cap(A\cup B) = A$ قانون جذب

$(A-B)'\cap(A\cap B) = A\cap B$

$A\cap(A\cap B)' = A\cap(A'\cup B') \overset{\text{شبه جذب}}{=} A\cap B' = A-B$

۴- گزینه ۲ پاسخ است.



با استفاده از رسم نمودار ون به سادگی مشخص می‌شود که $(A\cup B)-(A-B) = B$ هم‌چنین با استفاده از قواعد جبر مجموعه‌ها نیز می‌توان حاصل عبارت مطلوب را به‌دست آورد:

$$(A\cup B)-(A-B) = (A\cup B)-(A\cap B') = (A\cup B)\cap(A\cap B')'$$
$$= (A\cup B)\cap(A'\cup B) = (A\cap A')\cup B = \varnothing\cup B = B$$

۵- گزینه ۱ پاسخ است.

طبق قوانین جبر مجموعه‌ها داریم: (قانون جذب)

$$\left.\begin{array}{l} (A-B')\cup B = (A\cap B)\cup B = B \\ (B-A')\cup A = (B\cap A)\cup A = A \\ (A\cap B)\cup A = A \end{array}\right\} \Rightarrow \left| B\cup A \right| \cap A = A$$

قانون $X\cup(X\cap A) = X$ و $X\cap(X\cup A) = X$ قوانین جذب نامیده می‌شوند.

۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$A\Delta B = \varnothing \Rightarrow (A\cup B)-(A\cap B) = \varnothing \Rightarrow A\cup B \subseteq A\cap B \Rightarrow A\cup B = A\cap B \Rightarrow A = B$$
$$\Rightarrow (A\Delta A')-B = (A\Delta A')-A = M-A = A'$$

توجه شود که $A\Delta A' = (A\cup A')-(A\cap A') = M-\varnothing = M$

۷- گزینه ۱ پاسخ است.

$$(B-A')\cap(A\cup B)\cap B' = (B\cap A')'\cap(A\cup B)\cap B' = \left[(B'\cup A)\cap(B\cup A)\right]\cap B' = \left[A\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}\right]\cap B' = A\cap B' - A'$$

۸- گزینه ۳ پاسخ است.

تمام اعضای A در $p(A)$ نیز حضور دارند:

$$\begin{cases} \varnothing\in A \;\;,\;\; \varnothing\subseteq A \to \varnothing = p(A) \\ \{\varnothing\}\in A \;\;,\;\; \{\varnothing\}\subseteq A \to \{\varnothing\}\in p(A) \\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in A \;\;,\;\; \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq A \to \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in p(A) \end{cases}$$

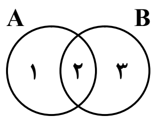
چون $|p(A)| = 8$ است، پس $|p(A)-A| = 5$ می‌باشد. لذا مجموعه‌ی $p(A)-A$ دارای 2^5 زیرمجموعه است.

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

راه حل اول:

$$A\Delta(B-A)=\big(A\cup(B-A)\big)-\big(A\cap(B-A)\big)=A\cup B$$
$$A\Delta(A-B)=\big(A\cup(A-B)\big)-\big(A\cap(A-B)\big)=A-(A-B)=A\cap B$$
$$\Rightarrow\ \big(A\Delta(B-A)\big)-\big(A\Delta(A-B)\big)=(A\cup B)-(A\cap B)=A\Delta B$$

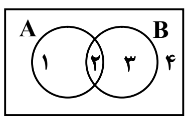
راه حل دوم: روش شماره‌گذاری؛ ابتدا افرازها را در نمودار ون شماره‌گذاری می‌کنیم. سپس عبارت‌های خواسته شده را برحسب شماره‌ها بازنویسی می‌کنیم:



$$\big(\underbrace{\underset{۱\cup۲}{A}\ \Delta\underset{۳}{(B-A)}}_{۱\cup۲\cup۳}-\underbrace{(\underset{۱\cup۲}{A}\ \Delta\underset{۱}{(A-B)})}_{۲}\big)=۱\cup۳=A\Delta B$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ است.

راه حل اول: شماره‌گذاری:



$$\big[A\Delta B-(A-B)\big]-A$$
$$=\big[۱,۳\ -\ ۱\ \big]-(۱,۲)=۳-(۱,۲)=۳=B-A$$

متمم را هم با شماره‌گذاری می‌توانستیم دربیاوریم.

$$(B-A)'=(۳)'=۱,۲,۴=A\cup B'$$

راه حل دوم:

$$x=\big[(A\Delta B)-(A-B)\big]-A=\big[\big((A-B)\cup(B-A)\big)-(A-B)\big]-A=\big[(B-A)\big]-A\ \xlongequal{(B-A)\cap A=\varnothing}\ B-A$$
$$x'=(B-A)'=(B\cap A')'=B'\cup A$$

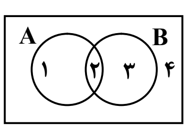
۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{cases}i=۱\Rightarrow A_۱=(-۳,۲)\\ i=۲\Rightarrow A_۲=(-۴,۴)\\ i=۳\Rightarrow A_۳=(-۵,۶)\\ i=۴\Rightarrow A_۴=(-۶,۸)\\ i=۵\Rightarrow A_۵=(-۷,۱۰)\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع بازه‌ها}}\bigcup_{i=۱}^{۵}A_i=(-۷,۱۰)$$

تعداد اعداد صحیح این بازه هم ۱۶تاست: $\{-۶,-۵,-۴,\dots,۸,۹\}$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ است.

از روش شماره‌گذاری می‌دانیم:



$$\underset{۲,۴}{(A\Delta B')}-\underset{۲}{(A\cap B)}=۴$$

حال متمم این مجموعه مطلوب است:

$$۴'=۱,۲,۳=A\cup B$$

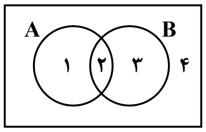
چون $A\subseteq B$ **است، پس** $A\cup B=B$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

استفاده از خواص جبر مجموعه‌ها:

$$A'\Delta B=(A'\cup B)-(A'\cap B)=(A'\cup B)\cap(A\cup B')$$
$$\Rightarrow\ (A'\Delta B)\cap(A\cup B)=(A'\cup B)\cap(A\cup B')\cap(A\cup B)=(A'\cup B)\cap[A\cup(B'\cap B)]=(A'\cup B)\cap A$$
$$=(A'\cap A)\cup(B\cap A)=\varnothing\cup(B\cap A)=(A\cap B)$$

راه‌حل دیگر: شماره‌گذاری ناحیه‌ها و بیان رابطه‌ها بر اساس شماره‌های تعیین شده:



$$(A'\Delta B)\cap(A\cup B) = \underbrace{\underbrace{(۳,۴)\Delta(۲,۳)}_{۲,۴}\cap(۱,۲,۳)}_{۲} = A\cap B$$

(در حل فوق، منظور از نماد «،» همان علامت اجتماع $(\cup)$ است.)

۱۴- گزینه ۴ پاسخ است.

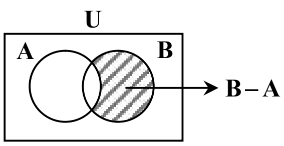
می‌دانیم $P(A)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A است. بنابراین:

$$P(A) = \{\varnothing, \{۱\}, \{\{۱\}\}, \{۱, \{۱\}\}\}$$

لذا $P(A) - A = \{\varnothing, \{\{۱\}\}, \{۱, \{۱\}\}\}$ مجموعه‌ای سه‌عضوی است که دارای ۸ زیرمجموعه و ۷ زیرمجموعه‌ی سره است.

نکته: زیرمجموعه‌های محض یا سره، همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه غیر از خود آن هستند.

۱۵- گزینه ۱ پاسخ است.



$$A\,\Delta\,(B-A) = [\,A\cup(B-A)\,] - [\,A\cap(B-A)\,]$$
$$= (A\cup B) - \varnothing = A\cup B \xrightarrow{\text{فرض سؤال}} A\cup B = B \Rightarrow A\subseteq B$$

نکته: اگر $X\cap Y = \varnothing$ باشد: $X\,\Delta\,Y = X\cup Y$ لذا:

$$A\,\Delta\,(B-A) = A\cup(B-A) = A\cup B$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر $A\times B = B\times A$ باشد و $A, B \neq \varnothing$ پس $A = B$ است.

چون وقتی تمام زوج‌های مرتب با هم برابرند، باید مؤلفه‌های اول دو مجموعه با هم برابر باشند (همین‌طور مؤلفه‌های دوم) پس اعضای تشکیل‌دهنده‌ی مؤلفه‌های اول دو مجموعه یکسانند که برای یکی از مجموعه‌ها، اعضا از A و برای دیگری از B انتخاب شده است. یعنی اعضای A و B یکسانند.

$$\rightarrow\ A\Delta B = A\Delta A = (A\cup A) - (A\cap A) = \varnothing$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| \ \rightarrow\ |A\cap B| = |A| + |B| - |A\cup B| = ۵ + ۸ - ۱۰ = ۳$$
$$|(A-B)\times(B\times A)| = |A-B|\,|B-A| = (|A| - |A\cap B|)(\,A\cap B\,) = (۵-۳)\times(۸-۳) = ۱۰$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$$|A^۲ - A\times B| = |A\times(A-B)| = |A|\,|A-B| = ۵\times۳ = ۱۵$$
$$|B^۲ - B\times A| = |B\times(B-A)| = |B|\,|B-A| = ۴\times۲ = ۸$$
$$۱۵ - ۸ = ۷$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ است.

نکته:

$$(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$$
$$|(A\times B)\cap(B\times A)| = |(A\cap B)^۲| = |A\cap B|^۲ = ۲^۲ = ۴$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$A\times B = C\times D \xrightarrow{A,B,C,D\not\subset\varnothing} A = C\ ,\ B = D$$
$$(A-B)\times B = A\times(B-A) \Rightarrow \begin{cases} A - B = A \\ B = B - A \end{cases} \Rightarrow A\cap B = \varnothing$$

می‌دانیم: $A'\Delta B' = A\,\Delta\,B$ پس: $A'\Delta B' = A\cup B$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$|A| = ۶\ ,\ |A \cap B| = ۲ \to |A - B| = ۴$

$|(A - B) \times B| = |A - B||B| = ۲۰ \to ۴ \times |B| = ۲۰ \to |B| = ۵$

پس:

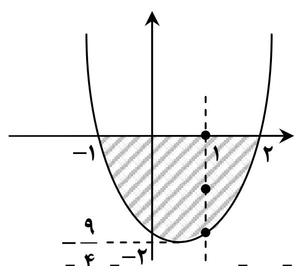
$|B - A| = |B| - |B \cap A| = ۵ - ۲ = ۳$

$|(B - A) \times A| = |B - A||A| = ۳ \times ۶ = ۱۸$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ است.

ابتدا نمودار رابطه را با ترسیم مرزهای آن را رسم می‌کنیم:

$$y = (x - \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۹}{۴}$$



سپس تقاطع خطوط $x = ۱$ و $x = ۲$ را با ناحیه‌ی مورد نظر به‌دست می‌آوریم که ۴ عضو دارد.

۲۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} ۱ & \bigcirc & \bigcirc \\ ۰ & \bigcirc & ۱ \\ \bigcirc & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \ll \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس بزرگ‌تر صفرها و ماتریس کوچک‌تر یک‌هایش را به ماتریس وسطی تحمیل می‌کند. تعداد درایه‌هایی که آزادانه انتخاب می‌کند $۱۶ = ۲^۴$ است.

۲۴- گزینه ۲ پاسخ است.

همواره داریم: $R \cap R^{-۱} \subseteq R \Rightarrow M \wedge M^t{}_۱ \ll M$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$۱|۱\ ,\ ۱|۲\ ,\ ۱|۳\ ,\ ۱|۴\ ,\ ۱|۵\ ,\ ۲|۲\ ,\ ۲|۴\ ,\ ۳|۳\ ,\ ۴|۴\ ,\ ۵|۵$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ است.

$$M(R^{-۱}) = M^t(R) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \to M(\overline{R^{-۱}}) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$M(R_۱ \Delta R_۲) = M\big((R_۱ \cup R_۲) - (R_۱ \cap R_۲)\big)$$

چون تفاضل متقارن اجتماعی است که اشتراک‌ها را حذف می‌کند، می‌توانیم ابتدا دو ماتریس را جمع معمولی می‌کنیم، سپس اگر درایه‌ای ۲ باشد، آن را صفر کنیم.

$$M(R_۱) + M(R_۲) = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow M(R_۱ \Delta R_۲) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$M(ROR) = M^{(۲)}(R) = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$$M(R) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow M(ROR) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۳۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$M(R)=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow M(ROR)=M^{(2)}(R)=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

آزمون گسسته- خواص رابطه، تعداد رابطه:

۱- اگر رابطه‌ی R روی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ هیچ‌یک از خاصیت‌های بازتابی و تقارنی را نداشته باشد، حداکثر تعداد اعضای رابطه‌ی R کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۹ ۳) ۲۴ ۴) ۲۳

۲- دو عدد حقیقی x, y مطابق رابطه $xRy \Leftrightarrow x-y>۵$ با هم در ارتباطند. این رابطه چند خاصیت از خواص زیر را داراست؟

الف) بازتابی ب) تقارنی ج) پادتقارنی د) تعدی

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- اگر دو عدد حقیقی x, y تحت رابطه $xRy \Leftrightarrow ۳x-۳y=K$ قرار گیرند، مقدار K چه باشد تا این رابطه تعدی باشد؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) هر سه مقدار

۴- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $R=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۲,۱),(۱,۲),(۲,۴)\}$ حداقل چند عضو به R بیفزاییم تا R دارای خواص تقارنی و تراگذری باشد؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۵- اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و رابطه R روی A دارای خاصیت انعکاسی بوده ولی خواص تقارنی و تراگذاری نداشته باشد، کمترین تعداد اعضای R چند تاست؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶- رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی به صورت $xRy \Leftrightarrow ۵x-۳y=۲$ تعریف شده است. این رابطه کدام ویژگی را دارد؟

۱) بازتابی ۲) تقارنی ۳) ترایایی ۴) پادتقارنی

۷- ماتریس مجاورت رابطه R روی مجموعه $\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ را $M=[m_{ij}]$ می نامیم. اگر برای $i \le j$ داشته باشیم : $m_{ij}=۱$ و M بالا مثلثی باشد، آنگاه رابطه RoR کدام خاصیت را ندارد ؟

۱) بازتابی ۲) تقارنی ۳) پادتقارنی ۴) ترایایی

۸- رابطه R روی مجموعهٔ ۵ عضوی با حداقل چند عضو فقط خاصیت بازتابی دارد ؟

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۹

۹- رابطه $\{(۱,۲),(۲,۱),(۱,۱),(۲,۲)(۱,۳),(۲,۳)\}$ روی $A=\{۱,۲,۳\}$ تعریف شده است کدام گزینه درست است؟

۱) $M^۲ << M$ ۲) $I_n << M$ ۳) $M \wedge M^T << I$ ۴) $M^T = M$

۱۰- رابطه R بر روی مجموعه چهار عضوی A را حداقل چند عضوی تعریف کنیم تا حتماً خاصیت پادتقارنی نداشته باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۱- رابطه R در مجموعه $A=\{۱,۲,۳\}$ حداقل چند زوج مرتب داشته باشد تا دارای خاصیت بازتابی و تقارنی باشد و خاصیتهای پادتقارنی و تعدی را نداشته باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۲- رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳\}$ به‌صورت $xRy \to x \mid y^۲-۴$ تعریف شده است. این رابطه چه تعداد از ویژگی‌های چهارگانه (بازتابی، تقارنی، تراگذری و پادتقارنی) را دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳- رابطه‌ی R با ماتریس M روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ دارای ویژگی‌های بازتابی، ترایایی و پادتقارنی است. ماتریس $M^{(۲)}$ حداکثر چند درایه‌ی ۱ دارد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱۴- رابطه‌ی R با ماتریس M داده شده است. اگر $M \wedge M^T = I_n$ باشد، R الزاماً دارای کدام خاصیت است؟

۱) فقط تقارنی ۲) بازتابی و پادتقارنی ۳) هم‌ارزی ۴) فقط پادتقارنی

۱۵- ماتریس متناظر به یک رابطه به‌صورت مقابل است. این رابطه کدام خاصیت را دارد؟

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

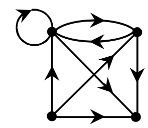
۱) متقارن

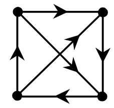
۲) ترایایی

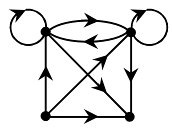
۳) بازتابی

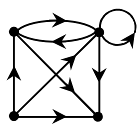
۴) غیرپادمتقارن

۱۶- رابطه‌ی متناظر با کدام گراف، ترایایی است ولی پادمتقارن <u>نیست</u>؟

۱) 

۲) 

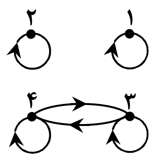
۳) 

۴) 

۱۷- جهت همه‌ی یال‌های یک گراف جهت‌دار را عوض کرده‌ایم. اگر گراف به‌دست آمده با گراف اولیه برابر باشد، رابطه‌ی متناظر با این گراف کدام ویژگی را حتماً دارد؟

۱) بازتابی ۲) تقارنی ۳) پادتقارنی ۴) ترایایی

۱۸- گراف مقابل، مربوط به رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ است. کدام رابطه برقرار <u>نیست</u>؟



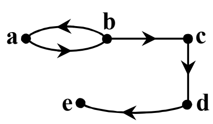
۱) $I \subseteq R$

۲) $RoR \subseteq R$

۳) $R = R^{-1}$

۴) $R \cap R^{-1} \subseteq I$

۱۹- حداقل چند یال به گراف مقابل اضافه شود تا رابطه‌ی متناظر با آن، ترایایی باشد؟



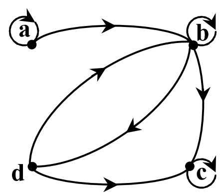
۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

۲۰- گراف رابطه‌ی R به‌صورت مقابل می‌باشد. ROR چه تعداد از خواص «بازتابی، تقارنی، ترایایی و پادتقارنی» را داراست؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۴

پاسخ آزمون گسسته- خواص رابطه، تعداد:

۱- گزینه ۴ پاسخ است.

کافی است از $A\times A$ دو زوج مرتب $(۱,۱)$ و $(۱,۲)$ را حذف کنیم تا خاصیت‌های بازتابی و تقارنی نقض شود. پس تعداد زوج مرتب‌های مانده برابر خواهد بود با: $۲۵-۲=۲۳$

۲- گزینه ۲ پاسخ است.

بازتابی: $xRx \rightarrow x-x \not> ۵ \rightarrow$ غلط است.

تقارنی: $xRy \rightarrow x-y>۵ \rightarrow y-x \not> ۵ \rightarrow$ غلط است. $\rightarrow$ چون هیچ‌گاه برقرار نیست پس پادتقارنی دارد.

تراگذری: $\left.\begin{matrix} xRy \rightarrow x-y>۵ \\ yRz \rightarrow y-z>۵ \end{matrix}\right\} \rightarrow x-z>۱۰ \rightarrow x-z>۵ \rightarrow$ لذا خاصیت تراگذری دارد.

۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{matrix} xRy \rightarrow ۳x-۳y=k \\ yRz \rightarrow ۳y-۳z=k \end{matrix}\right\} \rightarrow ۳x-۳z=۲k$$

اگر بخواهد xRz برقرار باشد، باید $۳x-۳z=k$ باشد. پس: $۲k=k \Rightarrow k=۰$

راه‌حل دوم: رابطه‌ی هم‌خط بودن $(xRy \leftrightarrow ax+by=c)$ هرگز خاصیت تعدی ندارد مگر سه خط:

۱) $y=x$ ۲) $x=k$ ۳) $y=k$

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$۱R۲ \rightarrow ۲R۱$

$۲R۴ \rightarrow ۴R۲$

$۱R۲\ ,\ ۲R۴ \rightarrow ۱R۴ \rightarrow ۴R۱$

$۱R۴\ ,\ ۴R۱ \rightarrow ۴R۴$

پس به ۵ زوج $(۲,۱)$، $(۴,۲)$، $(۴,۱)$، $(۱,۴)$ و $(۴,۴)$ نیاز است.

۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$R=I_۳ \cup \{(۱,۲),(۲,۳)\}$ تخریب‌کننده‌ی تقارنی و تراگذری

۶- گزینه ۴ پاسخ است.

رابطه‌ی $xRy \leftrightarrow ax+by=c$ با شرط $a\neq b$ دارای خاصیت پادتقارنی است. هم‌چنین غیر از سه خط ذکر شده در پاسخ سؤال ۳، بقیه‌ی خطوط دارای خاصیت تراگذری نمی‌باشند.

۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$M=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow M(ROR)=M^{(۲)}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=M$$

بازتابی و پادتقارنی و تعدی است (چون $M^{(۲)}=M$ است، $M^{(۴)}=M^{(۲)}$ خواهد بود پس $M^{(۲)}(ROR)=M(ROR)$ است لذا $M^{(۲)}(ROR)\ll M(ROR)$ برقرار است). اما چون ماتریس متقارن نیست، پس خاصیت تقارنی هم ندارد.

۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$R=I_۵ \cup \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۲)\}$ تخریب‌کننده‌ی تقارنی و پادتقارنی و تعدی

۹- گزینه ۱ پاسخ است.

این رابطه فقط دارای خاصیت تراگذری است، پس $M^{(۲)}\ll M$ است.

۱۰- گزینه ۴ پاسخ است.

چون رابطه‌ی پادمتقارن روی مجموعه‌ی nعضوی حداکثر $n+\frac{n^{۲}-n}{۲}=\frac{n^{۲}+n}{۲}$ زوج مرتب دارد، لذا رابطه‌ی پادمتقارن روی مجموعه‌ی ۴عضوی حداکثر ۱۰ زوج مرتب دارد. پس اگر بخواهیم حتماً پادمتقارن نباشد، باید ۱۱ زوج مرتب برداریم تا بنا بر اصل لانه‌ی کبوتر مطمئناً از یکی از زوج مرتب‌ها هر ۲ عضو انتخاب شوند.

۱۱- گزینه ۳ پاسخ است.

مخرب تراگذری و پادتقارنی $\{(۳,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۱,۲)\}$ $R = I_۳ \cup \{(۱,۲),(۲,۳),(۲,۱),(۳,۲)\}$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ است.

رابطه‌ی R به‌صورت زیر است:

$y=۱ \rightarrow x=۱\,,\,۳$

$y=۲ \rightarrow x=۱\,,\,۲\,,\,۳$

$y=۳ \rightarrow x=۱$

$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۲)\}$

R بازتابی نیست، زیرا $(۳,۳)\notin R$

R متقارن نیست، زیرا $(۱,۲)\in R$ ولی $(۲,۱)\notin R$

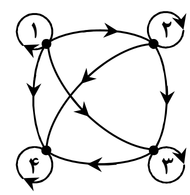
R پادمتقارن نیست، زیرا $(۱,۳)\in R$ و $(۳,۱)\in R$

R ترایابی نیست، زیرا $(۱,۳)\in R$ و $(۳,۱)\in R$ ولی $(۳,۳)\notin R$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: اگر R بازتابی و ترایایی باشد، آن‌گاه $M^{(۲)}=M$ می‌باشد. ($ROR=R$) چون همه (a,a) ها موجودند، هر $(a,b)\in R$ باشد، حتماً $(a,b)\in ROR$ نیز هست. لذا اگر $(a,b)\in R,(b,c)\in R \rightarrow (a,c)\in R$ باشد، $(a,b)\in ROR,(b,c)\in ROR \rightarrow (a,c)\in ROR$ نیز هست.

و چون M پادتقارنی است از هر جفت یال رفت و برگشتی، حداکثر یکی از آن‌ها وجود خواهد داشت مانند گراف مقابل که ماتریس مجاورت آن دارای ۱۰ درایه‌ی ۱ می‌باشد.



$$M=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

دقت کنید که در ماتریس فوق $M^{(۲)}=M$ است.

۱۴- گزینه ۲ پاسخ است.

از رابطه‌ی $M \wedge M^T = I_n$ نتیجه می‌شود که همه‌ی درایه‌های قطر اصلی M برابر با ۱ هستند، پس رابطه‌ی R بازتابی است. از سوی دیگر واضح است که ماتریس M در شرط $M \wedge M^T \ll I_n$ نیز صدق می‌کند یعنی پادتقارنی نیز هست.

۱۵- گزینه ۴ پاسخ است.

چون cRd و dRc هر دو برقرار است، پس این رابطه پادمتقارن نیست، چون $c\not{R}c$ بازتابی نیست و bRd و $d\not{R}b$ پس متقارن نیست. دلیل نقض ترایایی را نیز می‌توان به‌صورت مقابل بیان کرد: $a\not{R}c$ ولی $\left\{\begin{matrix} aRd \\ dRc \end{matrix}\right.$ یا با محاسبه‌ی $M^{(۲)}$ می‌توان دید که $M^{(۲)} \not\ll M$.

۱۶- گزینه ۳ پاسخ است.

در ابتدا دقت کنید که گراف متناظر گزینه‌ی (۲) پادتقارنی است، زیرا بین هیچ دو رأس آن در دو جهت، یال وجود ندارد. هم‌چنین گراف متناظر گزینه‌های (۱) و (۴) ترایایی نیستند، زیرا اگر در یک گراف جهت‌دار بین دو رأس در دو جهت یال وجود داشته باشد، برای این‌که رابطه‌ی متناظر آن ترایایی باشد باید در هر دو رأس موردنظر طوقه وجود داشته باشد. (چرا؟)

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

از مفهوم سؤال مشخص است که اگر از رأس a به رأس b یالی وجود داشته باشد، حتماً از رأس b به رأس a نیز یال وجـود دارد. یعنی بین هر دو رأس متمایز گراف، یا یالی وجود ندارد یا در هر دو جهت یال وجود دارد.

۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.

رابطه‌ی موردنظر یک رابطه‌ی هم‌ارزی است، بنابراین دارای ویژگی‌های بازتابی، تقارنی و ترایایی است و فاقد ویژگـی پادتقـارنی است.

۱۹- گزینه ۴ پاسخ است.

برای آن‌که گراف داده شده دارای ویژگی ترایایی شود، بایستی ۶ یال ac، ad، ae، bd، be و ce و ۲ طوقه‌ی رئوس a و b بـه آن افزوده شوند که جمعاً ۸ یال بایستی به گراف اضافه شود.

۲۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$M(R)=\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow M(ROR)=M^{(2)}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

ROR دارای خواص بازتابی و ترایایی است.

مثال نقض پادتقارنی: ۴R۲ و ۲R۴

مثال نقض تقارنی: $2\not R 1$ و $1R2$

آزمون تعداد رابطه، رابطه هم ارزی:

۱- فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴\}$. چند رابطه‌ی پادمتقارن روی A شامل زوج‌های مرتب (۱,۳) و (۴,۲) وجود دارد؟

۱) $۳^۴$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۲^۴\times۳^۲$ ۴) $۶^۴$

۲- فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴\}$. چند رابطه‌ی متقارن روی A هیچ‌کدام زوج‌های مرتب (۴,۱) و (۳,۲) را ندارند؟

۱) $۲^۸$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۲^{۱۲}$ ۴) $۲^{۱۴}$

۳- چند رابطه‌ی متقارن و بازتابی ۶ عضوی روی یک مجموعه‌ی ۴عضوی وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۴- چند رابطه‌ی متقارن و ترایایی با ۴ عضو روی مجموعه‌ی $\{a,b,c,d\}$ وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۵- چند رابطه‌ی تقارنی و پادتقارنی روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ می‌توان نوشت که شامل عضوهای (۲,۲) و (۵,۵) نباشد؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۱

۶- روی مجموعه‌ی $A=\{x,y,z,t\}$ چند رابطه‌ی پادمتقارن و غیربازتابی می‌توان نوشت؟

۱) $۳^۶-۱$ ۲) $۲^۴\times۳^۶-۱$ ۳) $۲^۳\times۳^۶$ ۴) ۵×۳^۷

۷- روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند رابطه‌ی هم‌ارزی شامل (۲,۵) وجود دارد که مجموعه‌ی A را به سه زیرمجموعه افراز می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۸- ماتریس صفر و یک $A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۰\\۱&۰&۰&۰\\۰&۰&۱&۰\\۰&۱&۰&۱\end{bmatrix}$ مفروض است. تعداد رابطه‌های بازتابی و پادمتقارن R با ماتریس متناظر M با شرط $A<<M$ کدام است؟

۱) $۳^۴$ ۲) ۲×۳^۴ ۳) $۳^۵$ ۴) $۲^۲\times۳^۴$

۹- رابطه‌ی $(a,b)R(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$ روی مجموعه‌ی $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده است. در صورت هم‌ارزی بودن، کدام عنصر در کلاس هم‌ارزی (۳,۵) است؟

۱) $(-۵,-۳)$ ۲) $(-۱,\frac{۵}{۳})$ ۳) $(-۶,-۱۰)$ ۴) هم‌ارزی نیست.

۱۰- کدام رابطه، یک رابطه‌ی هم‌ارزی نیست؟

۱) متشابه بودن دو چهارضلعی در مجموعه‌ی چهارضلعی‌ها ۲) موازی بودن دو صفحه در مجموعه‌ی صفحات فضا

۳) موازی بودن دو خط در مجموعه‌ی خطوط در فضا ۴) متنافر بودن دو خط در مجموعه‌ی خطوط در فضا

۱۱- چند رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ می‌توان تعریف کرد که شامل (۲,۵) و (۱,۲) باشد؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۱۵

۱۲- تعداد ماتریس‌های M با عناصر صفر و یک که در رابطه‌ی $M\wedge M^T \ll I_۴ \ll M$ صدق کند، کدام است؟

۱) $۲^۴\times۳^۶$ ۲) $۳^۶$ ۳) ۱ ۴) $۲^{۱۲}$

۱۳- چند رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ می‌توان نوشت، به‌طوری که دارای ۱۰ زوج مرتب باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۵

۱۴- اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ تعریف شده باشد وداشته باشیم $M(R)\wedge M^T(R)=[۱]_{۴\times۴}$، در این صورت اگر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A، هم ارزی است، مجموعه‌ی A را به چند کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) R هم‌ارزی نیست.

پاسخ تشریحی:

۱- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر M ماتریس رابطه باشد، درایه‌های متناظر با زوج‌های مرتب $(۱,۳)$ و $(۴,۲)$ برابر ۱ و درایه‌های متناظر با $(۳,۱)$ و $(۲,۴)$ برابر صفر هستند. حال برای هر یک از درایه‌های روی قطر اصلی ۲ انتخاب و برای هر یک از ۴ زوج درایه‌های باقی‌مانده که نسبت بـه قطر اصلی قرینه‌اند، ۳ انتخاب وجود دارد. پس M را به $۳^۴ \times ۲^۴$ طریق می‌توان تشکیل داد.

۲- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر M ماتریس رابطه باشد، در این صورت درایه‌های متناظر با زوج‌های مرتب $(۴,۱)$، $(۳,۲)$، $(۱,۴)$ و $(۲,۳)$ برابر صفر هستند (چون رابطه متقارن است). برای هر درایه‌ی قطر اصلی ۲ انتخاب و برای هر درایه‌ی باقی‌مانده از بالای قطر اصلی ۲ انتخاب و برای مابقی درایه‌ها ۱ انتخاب وجود دارد، پس M را به $۲^۸$ طریق می‌توان تشکیل داد.

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر M ماتریس رابطه باشد، ۴ درایه‌ی قطر اصلی M برابر ۱ است (چون R بازتابی است). بایـد ۲ درایـه از $۱۲ = ۴ - ۱۶$ درایـه‌ی باقی‌مانده را برابر ۱ قرار دهیم. اما چون R متقارن است، ۲ درایه‌ی باقی‌مانده باید به‌صورت متقارن نسبت بـه قطـر اصـلی در ۲ طرف آن قرار بگیرند. این انتخاب به $\binom{۶}{۱}$ طریق امکان‌پذیر است، لذا به ۶ طریق می‌توان ماتریس M را تشکیل داد.

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر در رابطه زوجی مرتب مانند $x \neq y\ ;\ (x,y)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه از متقارن و ترایایی بودن رابطـه نتیجـه مـی‌گیـریم زوج‌های مرتب (y,x)، (x,x) و (y,y) نیز باید در رابطه باشند. تعداد این رابطه‌ها برابر $۶ = \binom{۴}{۲}$ است. هم‌چنین یک رابطـه نیز که شامل هر چهار زوج مرتب به‌صورت (x,x) است نیز باید به این ۶ رابطه اضافه کنیم.

۵- گزینه ۱ پاسخ است.

رابطه‌ای که تقارنی و پادتقارنی باشد فقط شامل طوقه‌هاست (فقط می‌تواند عناصری به فرم (a,a) را انتخاب کند.) که چون ۲ تا از آن‌ها از رابطه حذف شده‌اند، پس ۳ تای دیگر هر کدام می‌تواند عضو رابطه باشد یا نباشد، پس جواب برابر است با $۲^۳$.

۶- گزینه ۴ پاسخ است.

(تعداد رابطه‌های پادمتقارن و بازتابی) − (تعداد رابطه‌های پادمتقارن) = تعداد رابطه‌های پادمتقارن و غیربازتابی

$$\Rightarrow\ \left| P \cap \overline{B} \right| = \left| P \right| - \left| P \cap B \right| = ۲^۴ \times ۳^۶ - ۳^۶ = (۲^۴ - ۱) \times ۳^۶ = ۱۵ \times ۳^۶ = ۵ \times ۳^۷$$

۷- گزینه ۳ پاسخ است.

چون $(۲,۵) \in R$ می‌باشد، پس ۲ و ۵ در یک دسته‌ی هم‌ارزی می‌باشند و می‌توان آن‌ها را طناب پیچ کرد. تعداد حالاتی که یک مجموعه ۴ عضوی را می‌توان به ۳ زیرمجموعه افراز کرد برابر است با $۶ = \binom{۴}{۲}$. تنها افراز سه عضوی یک مجموعه‌ی ۴ عضـوی به‌صورت زیر است:

$$\{\, \{-\}\ ,\ \{-\}\ ,\ \{-,-\} \,\}$$

۸- گزینه ۱ پاسخ است.

فرض $M >> A$ به این معناست که هر جا در ماتریس A عنصر یک داریم، در ماتریس M نیز الزاماً یک است. یعنی ماتریس M به شکل زیر است. از طرفی چون R بازتابی است تمام درایه‌های قطر اصلی آن ۱ است.

و نیز چون پادمتقارن است درایه‌های متقارن نسبت به قطر اصلی هم‌زمان ۱ نیستند.

برای هر یک از جفت درایه‌های نشان داده شده سه حالت امکان‌پذیر است. (هر دو هم‌زمان یک نباشند)،

$$M = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \bigcirc & \bigcirc \\ ۱ & ۱ & \bigcirc & ۰ \\ \bigcirc & \bigcirc & ۱ & \bigcirc \\ \bigcirc & ۱ & \bigcirc & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین تعداد رابطه‌های بازتابی و پادمتقارن با شرایط داده شده برابر است با: $۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۴$

۹- گزینه ۴ پاسخ است.

این رابطه روی $\mathbb{R}^2$ هم‌ارزی نیست ولی روی $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ هم‌ارزی است.

به مثال نقض ویژگی ترایایی توجه نمایید: $(2,3)\not R(3,4)$ ولی $\begin{cases}(2,3)\,R\,(0,0)\\(0,0)\,R\,(3,4)\end{cases}$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ است.

رابطه‌ی متنافر بودن دو خط، ویژگی‌های بازتابی و ترایایی را ندارد. (یک خط نسبت به خودش متنافر نیست و نیز اگر d_1 و d_2 متنافر باشند و d_2 و d_3 هم متنافر باشند آن‌گاه ممکن است d_1 و d_3 منطبق، موازی، متقاطع یا متنافر باشند.)

۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.

چون $1R2$ و $2R5$ است، پس ۱ و ۲ و ۵ همیشه در یک دسته‌ی هم‌ارزی خواهند بود. پس آن‌ها را یک بسته فرض می‌کنیم سپس تعداد افرازهای مجموعه‌ی حاصل را که یک مجموعه‌ی ۳ عضوی خواهد بود، می‌شماریم:

تعداد افرازهای مجموعه‌ی ۳ عضوی = ۱ + ۳ + ۱ = ۵

هر یک در یک دسته‌ی مجزا — یکی تنها، دو تا با هم — هر سه با هم در یک بسته

$\{\{-\},\{-\},\{-\}\}$ $\{\{-,-\},\{-\}\}$ $\{\{-,-,-\}\}$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ است.

از این‌که $I_4 \ll M$، نتیجه می‌گیریم $M_{4\times4}$ و M ماتریس رابطه‌ی بازتابی است.

از این‌که $M\wedge M^T \ll I_4$، نتیجه می‌گیریم M ماتریس رابطه‌ی پادمتقارن است.

پس در واقع در این سؤال تعداد روابط بازتابی و پادمتقارن روی یک مجموعه‌ی چهارعضوی مورد پرسش قرار گرفته که برابر است با: 3^6

نکته: تعداد روابط بازتابی و پادمتقارن روی مجموعه‌ی nعضوی A برابر است با: $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم تعداد روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی A برابر با تعداد افرازهای متفاوت مجموعه‌ی A است.

حال اگر $C=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ افراز متناظر با رابطه‌ی R باشد، رابطه‌ی R عبارت است از:

$$R=A_1^2\cup A_2^2\cup\cdots\cup A_n^2$$

لذا تعداد اعضای رابطه‌ی R برابر است با:

$$|R|=|A_1|^2+|A_2|^2+\cdots+|A_n|^2$$

در این سؤال افرازی که منجر به تولید ۱۰ زوج مرتب می‌شود، (---) است.

چون $10=1^2+3^2$ زوج مرتب تولید می‌کند، تعداد افرازها به این صورت روی یک مجموعه‌ی چهارعضوی برابر است با:

$$\binom{4}{3}=4$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر $M\wedge M^t=[1]$ باشد، یعنی تمام درایه‌های ماتریس M یک بوده است، یعنی $M=A\times A$ که در این صورت چون همه‌ی اعضا با هم رابطه دارند، مجموعه‌ی A فقط از یک کلاس ۴ عضوی تشکیل شده است.

$$[a]=\{a,b,c,d\}=[b]=[c]=[d]$$

البته می‌توانستیم بگوییم چون ضرب مؤلفه در مؤلفه‌ی بولی مدلی برای اشتراک و ترانهاده مدلی برای وارون رابطه است، لذا:

$$R\cap R^{-1}=A\times A\Rightarrow R=A\times A$$