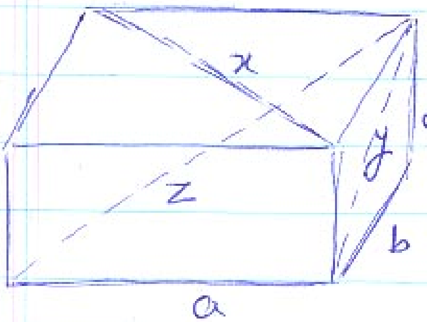
مکعب مستطیل ← شش وجهی که همه‌ی وجوه آن مستطیل است.

برای مکعب مستطیل | $\text{حجم} = abc$ ← عرض، طول در ارتفاع ضرب می‌شود

مساحت کل در مکعب مستطیل $= ۲(ab+ac+bc)$



قطر وجه $= \sqrt{a^۲+b^۲} = x$

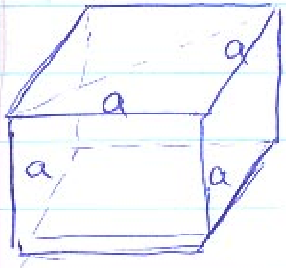
〃 〃 $= \sqrt{b^۲+c^۲} = y$

قطر اصلی 〃 $= \sqrt{a^۲+b^۲+c^۲} = z$

مکعب مستطیل
- ۳ صفحه‌ی تقارن
- ۳ محور تقارن

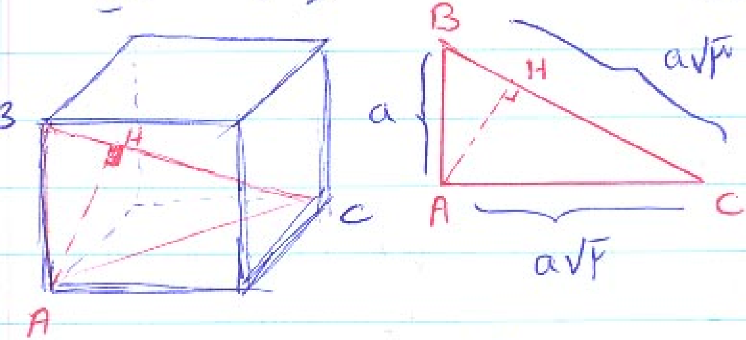
← دارد

مکعب: مکعب مستطیلی که تمام یال‌هایش برابر باشند.



۹ صفحه‌ی تقارن و ۱۳ محور تقارن دارد.

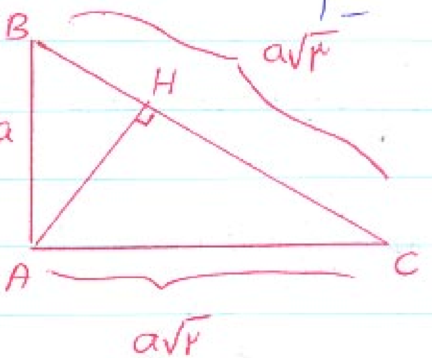
مثال: در یک مکعب به یال a فاصله‌ی رأس از قطر را بدست آورید.



$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a(a\sqrt{2})}{a\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

مثال ۵: ثابت کنید در یک مکعب پای عمودهایی که بر آن از دو رأس متصل به یک قطر رسم می‌شوند قطر را به سه قسمت برابر تقسیم می‌کنند.

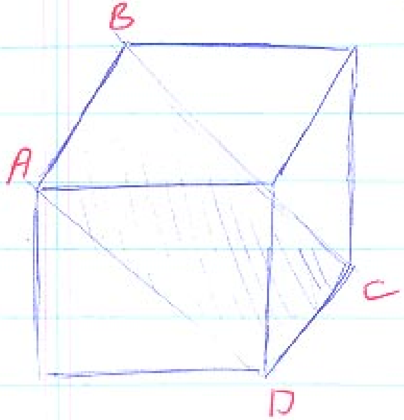


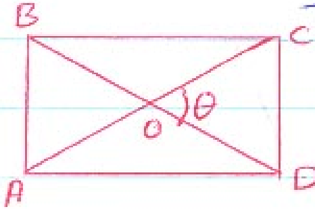
از روی شکل سؤال مسئله لازم است ثابت کنیم که

BH، یک سوم BC است $BH=\frac{BC}{3}$

$$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{BC}{3}$$

مثال: در یک مکعب کسینوس زاویه بین دو قطر را بدست آورید.



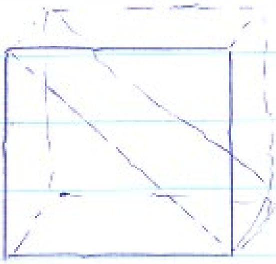


$$\overset{\triangle}{ABO}: AB^2=BO^2+AO^2-2BO.AO.\cos\theta$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-2\times\frac{3}{4}a^2\cos\theta$$

$$\longrightarrow \boxed{\cos\theta=\frac{1}{3}}$$

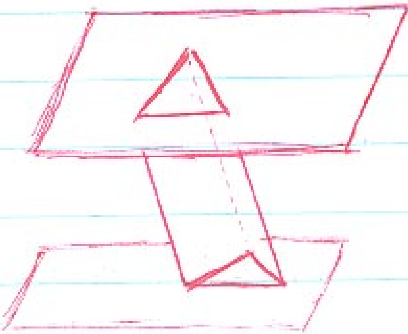
مثال ۴: یک مکعب به یال a را با استفاده از صفحه‌ای شامل دو قطر به دو منشور تقسیم می‌کنیم و منشورها را در وجه مربع به هم می‌چسبانیم. مساحت کل شکل حاصل را برحسب a بدست آورید.



$$\text{مساحت جانبی} = \underbrace{(a\sqrt{2} + a\sqrt{2} + 2a)}_{\text{محیط قاعده}} \times a$$

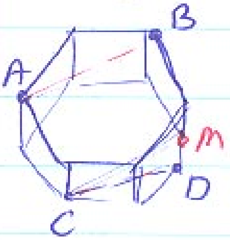
$$\text{مساحت کل} = 2a^2(1+\sqrt{2}) + 2a^2$$

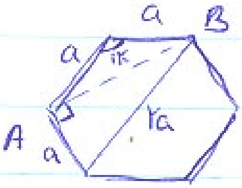
منشور: قاعده‌ها دو شکل برابر در دو صفحه موازی هستند و چهره‌های جانبی متوازی الاض



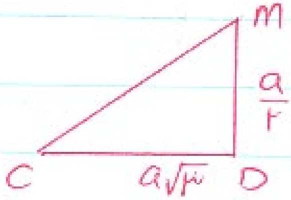
منشور مثلثی مایل

مثال: در شکل زیر که یک منشور قائم با قاعده‌ی ۶ ضلعی منتظم است اضلاع همه‌ی یال‌ها برابر است. اگر M وسط یال باشد کسینوس زاویه‌ی بین AB و CM را به دست آورید.





$CD = AB = a\sqrt{3}$

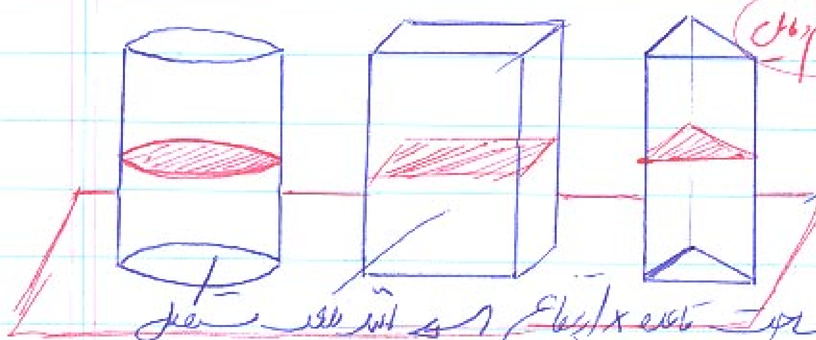


$CM = \cancel{\quad} \frac{a\sqrt{13}}{2}$

$$\Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{13}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

" اصل کاوالیری " منشور قائم و مایل

طبق اصل کاوالیری حجم منشور

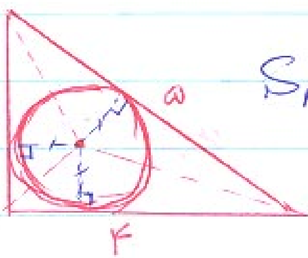


و استوانه می‌شود مساحت قاعده × ارتفاع که اثبات شد مستقیم

مثال: استوانه ای درون یک منشور قائم مثلثی با ارتفاع ۴ محاط شده است

اگر طول اضلاع مثلث قاعده برابر ۳ و ۴ و ۵ باشد حجم محیط بین

استوانه و منشور را بدست آورید.



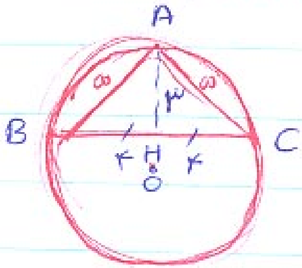
نصف

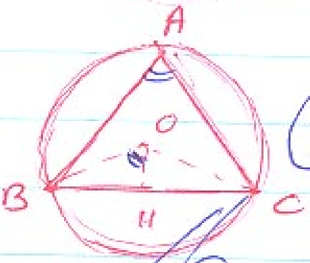
$$S_{ABC} = r \cdot (\text{محیط مثلث } \overset{\triangle}{ABC})$$

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{3\times 4}{2}}{\frac{3+4+5}{2}} = 1$$

$$\text{حجم بین} = \left(\frac{3\times 4}{2}\right)\times 4 - (\pi(1)^2)\times 4 = 24 - 4\pi$$

سؤال ۷: یک منشور مثلثی درون یک استوانه محاط شده که قطر قاعده و ارتفاع آن برابرند. اگر یالهای قاعده ی منشور ۵ و ۵ و ۸ باشد. مساحت جانبی منشور را بدست آورید.





BH

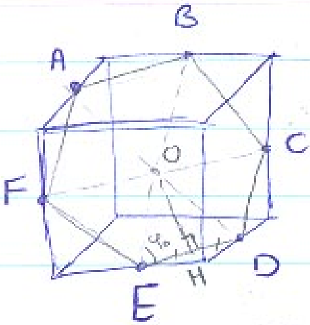
$$\sin B\hat{O}H = \frac{OH}{R}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{2R} \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin \hat{A}} = \frac{AC}{2\sin \hat{B}} = \frac{AB}{2\sin C} \quad *$$

$$\sin \hat{B} = \frac{3}{5} \overset{*}{\Longrightarrow} R = \frac{AC}{2\sin \hat{B}} = \frac{5}{2\times\frac{3}{5}} = \boxed{\frac{25}{6}}$$

$$\text{مساحت جانبی} = 18(2R) = \boxed{150}$$

هندسه تابستان ⇐ سری اول



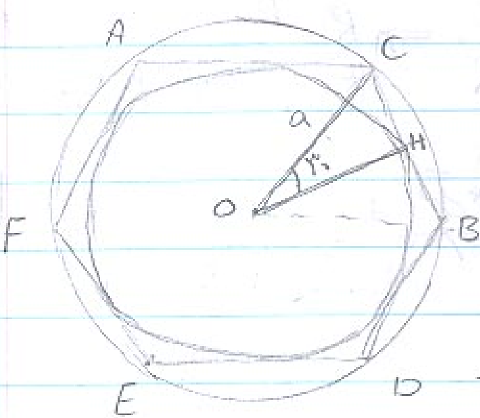
سؤال ب)

a ـ ضلع مکعب

$$AB = AF = FE = ED = DC = BC = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}} = \boxed{a\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$OE = DE = \frac{a\sqrt{2}}{2} \qquad \sin 60^\circ = \frac{OH}{OE} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$S_{\text{شش ضلعی}} = 6\times\left(OH\times\frac{ED}{2}\right) = \frac{6\times a\sqrt{6}\times a\sqrt{2}}{4\times 2} = \frac{12a^2}{8} = \boxed{\frac{3}{2}a^2}$$

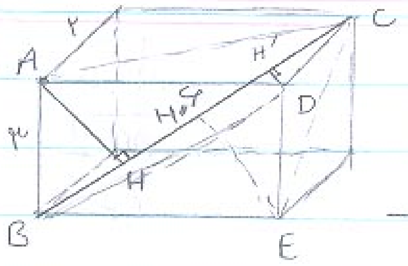


سؤال د)

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\frac{S_{\text{محاط}}}{S_{\text{محیط}}} = \frac{\pi OH^2\times h}{\pi OC^2\times h} = \left(\frac{OH}{OC}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{4}}$$

سوال ۱۳



$\overset{\triangle}{ABC}$

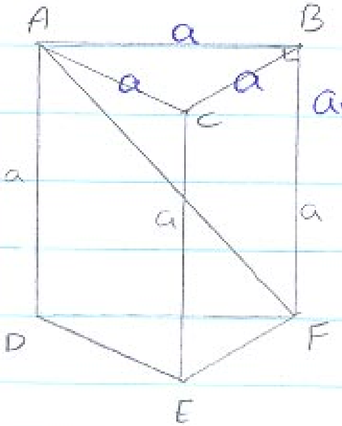
$\downarrow$

$AH \times BC = AB \times AC$

$\longrightarrow AH = \dfrac{AB \times AC}{BC} = \dfrac{۳ \times \sqrt{۴۰}}{\sqrt{۴+۹+۳۶}} = \dfrac{۶\sqrt{۱۰}}{۷}$

$\overset{\triangle}{BCD} \longrightarrow DH' = \dfrac{BD \times DC}{BC} = \dfrac{۲\sqrt{۴۵}}{۷} = \dfrac{۶\sqrt{۵}}{۷}$

$\overset{\triangle}{EBC} \longrightarrow EH'' = \dfrac{BE \times CE}{BC} = \dfrac{۶\sqrt{۱۳}}{۷}$



سوال چهارم) فاصله دو راس دلخواه منشور a یا $a\sqrt{۲}$

$AF = a\sqrt{۲}$ است.

*

$\boxed{\text{سؤال ب}}$

$AB \overset{\parallel}{=} DE \Rightarrow$ متوازی الاضلاع $ABDE \Rightarrow$ قطرهای ۴ضلعی منصف یکدیگراند. $\Rightarrow$ O وسط AD و BE

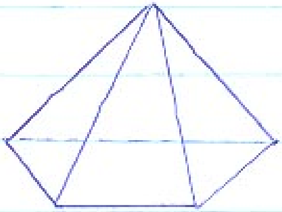
$EF \overset{\parallel}{=} \frac{AD}{2} \Rightarrow$ متوازی الاضلاع $ODEF$

$CD \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2} BE \Rightarrow$ 〃 $OCDE$

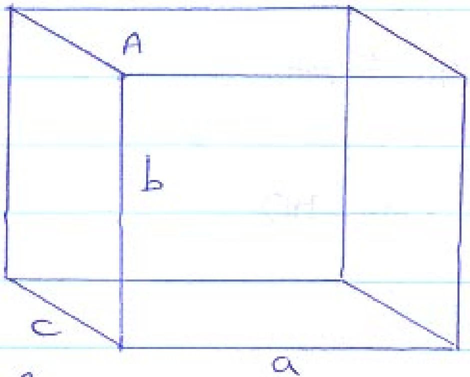
طول ضلع ۶ضلعی $\Rightarrow AB = OE = CD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

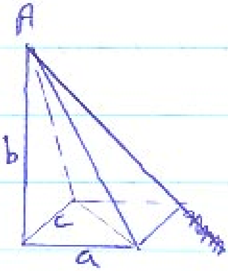
مساحت ۶ضلعی $= 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

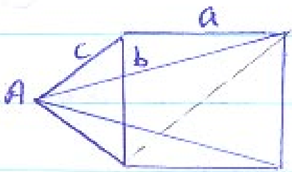
هرم: شکلی فضایی که در همه وجه‌های آن بجز قاعده در یک نقطه مشترکند.

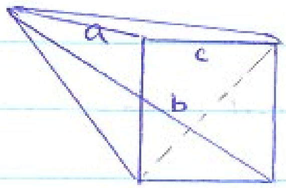


* وجوه‌ها همه مثلث هستند.





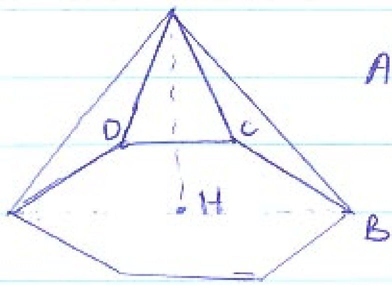




هرم منتظم: یال های جانبی هرم با هم برابر باشند.

قاعده آن n ضلعی منتظم است و یالهای جانبی برابرند.

مثال) ثابت کنید ارتفاع هرم منتظم از مرکز قاعده می گذرد.



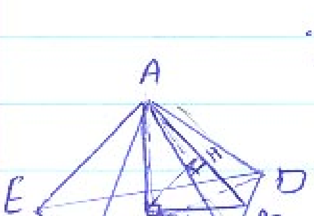
$$\overset{\Delta}{AHB} \cong \overset{\Delta}{AHC} \cong \overset{\Delta}{AHD} \; ...$$

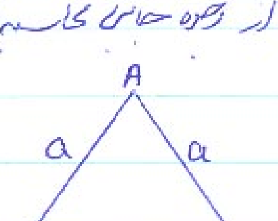
$$\Rightarrow HB = HC = HD$$

مثال) در یک هرم منتظم مربع القاعده طول همه یالها a است.

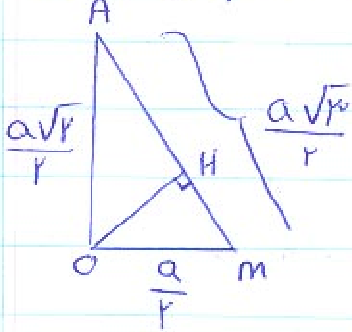
الف) زاویه بین دو یال جانبی که در یک وجه قرار ندارند را بدست آورید.

ب) فاصله مرکز قاعده را از وجوه جانبی محاسبه کنید.



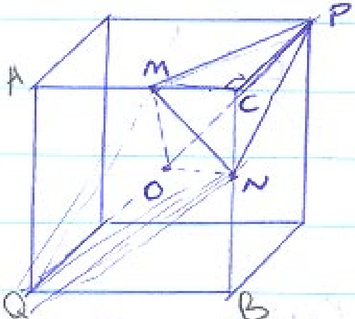


$\hat{BAD}$ قائم الزاویه است $\Rightarrow \hat{BAD} = 90^\circ$



$$OH = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

مثال) در شکل زیر فاصله O را از صفحه MNPQ بدست آورید.

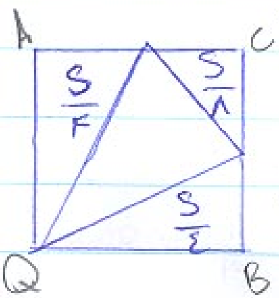


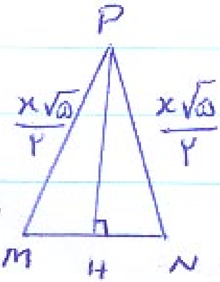
$$\frac{x\sqrt{2}}{2} = MN$$

$$\frac{x\sqrt{5}}{2} = NP$$

$$V_{OMNP} = \underbrace{\frac{V_{QMNP}}{2}}_{\text{مرحله قبل}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} V_{PAQBC}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} V = \boxed{\frac{V}{16}}$$

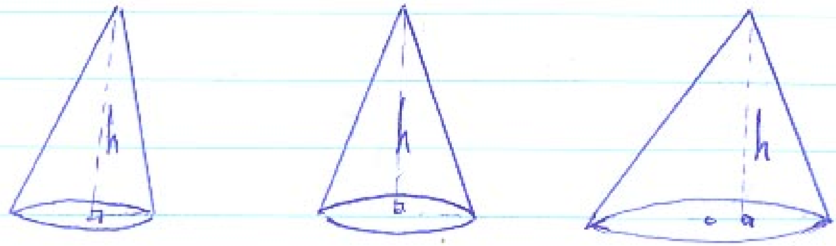




$$PH = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} x$$

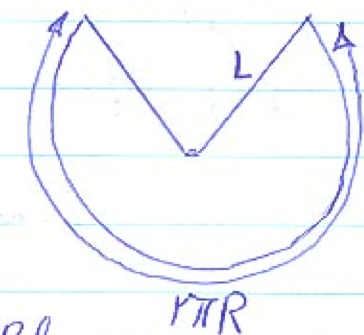
$$\Rightarrow S_{PMN} = \frac{3}{8} x^2$$

مخروط، هرمی که قاعده آن دایره باشد.



مساحت جانبی مخروط قائم:

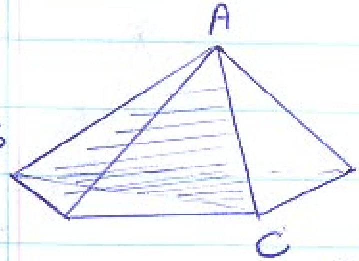
$L = \sqrt{R^2 + h^2}$

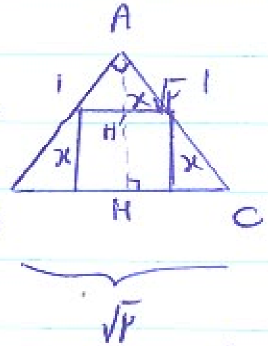


مساحت جانبی $= \dfrac{2\pi R}{2\pi L}\,\pi L^2 = \pi R l$

سری دوم

سوال یک



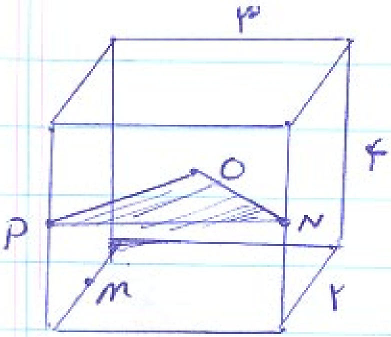


$$\frac{AH'}{AH} = \frac{x\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}$$

$$\frac{AH-x}{AH'} = x$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-x}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = x \Rightarrow \boxed{x = \frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}}$$

سوال دو



$$S_{PON} = \frac{۶}{۴}$$

$$v_{mPON} = \frac{۱}{۳} S_{PON} \times h = \frac{۱}{۳} \times \frac{۶}{۴} \times ۲ = ۱$$

$$\overset{\triangle}{PMN} \begin{cases} PN = ۳ \\ PM = \sqrt{۵} \\ MN = \sqrt{۱۴} \end{cases} \Rightarrow S_{PMN} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۲}$$

$$v_{OMNP} = \frac{۱}{۳} S_{MNP} \times OH = \frac{۱}{۳} \times \frac{۳\sqrt{۵}}{۲} \times OH$$

$$\Rightarrow OH = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \boxed{\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}}$$

سؤال ~

$$\frac{r}{R}=\frac{h'}{h+h'} \Rightarrow rh+rh'=Rh'$$

$$\Rightarrow (R-r)h'=rh \Rightarrow h'=\frac{rh}{(R-r)}$$

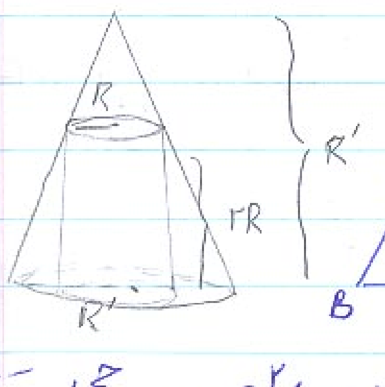
$$V_{\text{ناقص}}=V_{\text{کل}}-V_{\text{بالا}} \Rightarrow V_{\text{ناقص}}=\frac{۱}{۳}\left(\pi R^{۲}(h+h')-\pi r^{۲}h'\right)$$

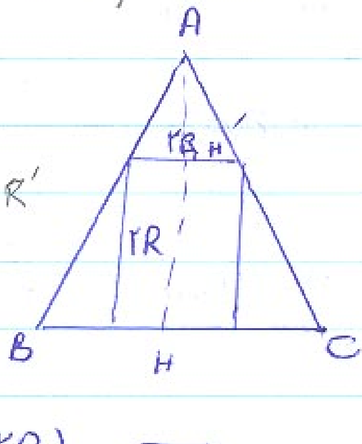
$$\Rightarrow V_{\text{ناقص}}=\frac{۱}{۳}\left(\pi R^{۲}h+\pi h'(R^{۲}-r^{۲})\right)$$

$$=\frac{\pi}{۳}\left(R^{۲}h+\frac{rh}{R-r}(R-r)(r+R)\right)=\frac{\pi}{۳}\left(R^{۲}h+r^{۲}h+rRh\right)$$

$$=\frac{\pi h}{۳}\left(R^{۲}+r^{۲}+rR\right)$$

سؤال چهار





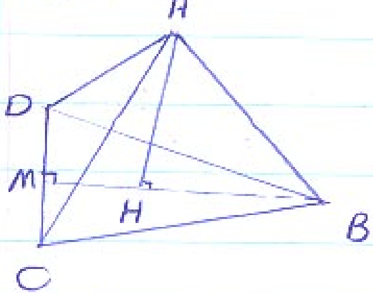
$$\frac{AH'}{AH}=\frac{۲R}{BC}$$

$$\frac{R'-۲R}{R'}=\frac{۲R}{۲R'}$$

$$\Rightarrow R'=۳R$$

$$\frac{\text{حجم استوانه}}{\text{حجم مخروط}}=\frac{\pi R^{۲}(۲R)}{\frac{۱}{۳}\pi R'^{۲}R'}=\boxed{\frac{۲}{۹}}$$

چهار وجهی منتظم را رسم کنید که همه وجوه آن مثلث متساوی الاضلاع باشد.



$$BH = \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)$$

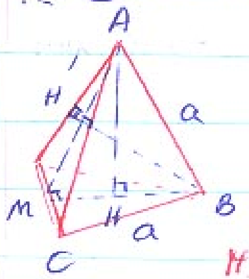
$$\Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

$$\overset{\Delta}{AHB} = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

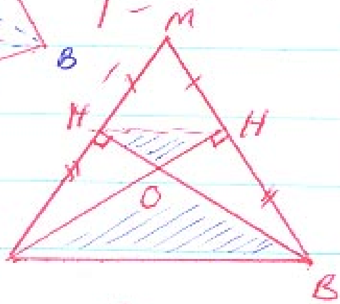
حجم چهار وجهی منتظم $\Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot AH = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{3} a\right)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

مثال: در یک چهار وجهی منتظم ثابت کنید محل برخورد دو ارتفاع را بدست آورید.



مثلث $\overset{\Delta}{AMB}$ را رسم می‌کنیم



$$\begin{cases} AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2} a \\ AB = a \end{cases}$$

$$MH = \frac{1}{2} HB$$

$$\Rightarrow \frac{HH'}{AB} = \frac{MH}{MB} = \frac{1}{3}$$

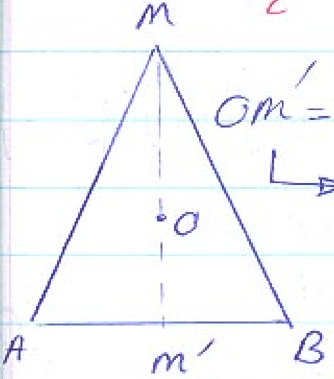
$$\overset{\Delta}{OHH'} \sim \overset{\Delta}{AOB} \Rightarrow \frac{OH}{OA} = \frac{HH'}{AB} = \frac{1}{3}$$

تعمیم سؤال قبل

☑ نقطه‌ی O مرکز چهاروجهی منتظم محل همرسی ۴ ارتفاع است.

☑ فاصله O از هر وجه چهاروجهی برابر $\frac{1}{4}AH = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ است

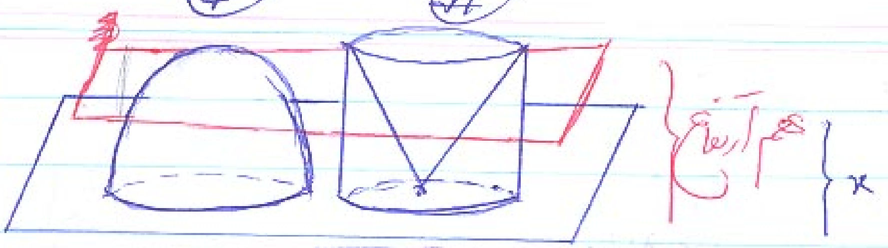
و فاصله از هر رأس چهاروجهی $\frac{3}{4}AH = \frac{\sqrt{6}}{4}a$



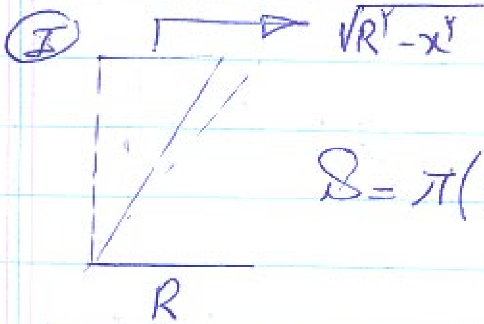
$OM' = OM \longrightarrow$ فاصله از CD

$\longrightarrow$ فاصله از AB

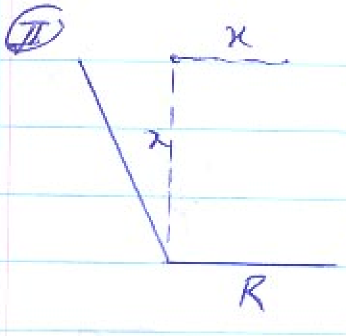
فاصله O تا هر یال $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ است.



کره



$$S=\pi\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2$$



$$S'=\pi R^2-\pi x^2$$

حجم [illegible] در صفحه − حجم نیم کره = حجم مجهول

تالس $\Rightarrow a=x$

$$\Rightarrow V_{\text{مجهول}}=\frac{2}{3}\pi R^3-\left(\pi R^2x-\frac{\pi a^2 x}{3}\right)$$

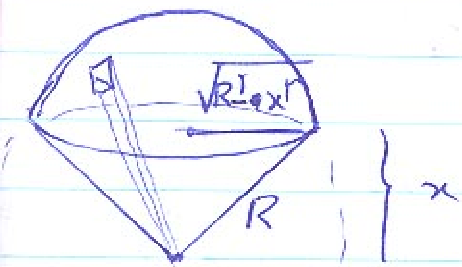
$$=\frac{\pi}{3}\left(2R^3-3R^2x+x^3\right)$$

مجموع حجم هرم‌ها = حجم کره

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \sum \frac{S_i \times R}{3}$$

$$\Rightarrow 4\pi R^2 = \sum S_i \Rightarrow \boxed{S_{\text{کره}} = 4\pi R^2}$$

مساحت عرقچین را بدست آورید

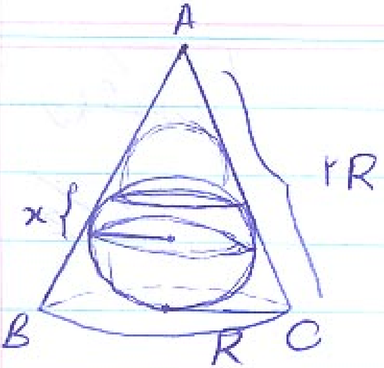


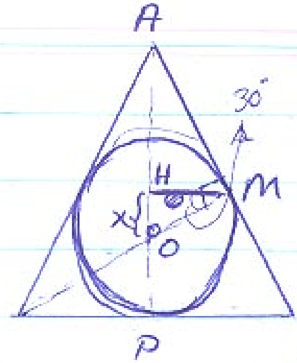
قطاع = عرقچین + مخروط

$$\frac{\pi(R^2-x^2)x}{3} + \frac{\pi}{3}(2R^3-3R^2x+x^3) = \frac{\sum S_i R}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}(2R^3-2R^2x) = \frac{R}{3}(\text{مساحت عرقچین})$$

$$2\pi R(R-x) = \text{مساحت عرقچین}$$





$$OM = OP = r = \frac{\sqrt{3}}{3}R$$

$$x = OH = \frac{OM}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}R$$

$$AH = \frac{1}{3}AP = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

حجم مولد = حجم مخروط − حجم عرقچین

$$= \left(\frac{1}{3}\pi(r^2 - x^2)AH\right) - \frac{\pi}{3}\left(2r^3 - 3r^2x + x^3\right)$$

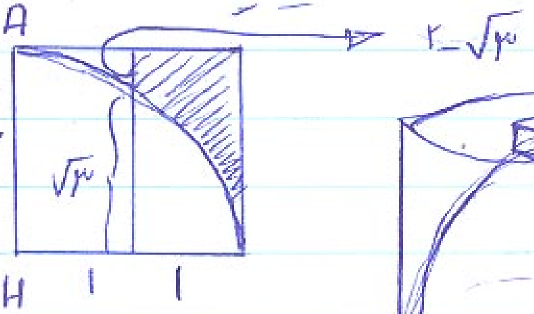
$$\xrightarrow{x = \frac{1}{2}r} = \frac{1}{3}\pi \times \frac{3}{4}r^2 \times AH - \cancel{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{5}{8}\pi r^3\right)$$

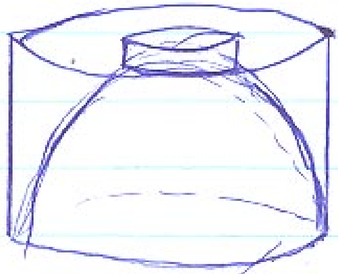
$$= \pi r^3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi r^3}{6} = \frac{\pi\frac{\sqrt{3}}{3}R}{6} = \frac{\pi\sqrt{3}R}{18}$$

حجم مولد $= \pi\frac{\sqrt{3}}{54}R^3$

مثال) شکل زیر را حول AH دوران می‌دهیم. (ربع دایره‌ای درون مربع قرار دارد.)

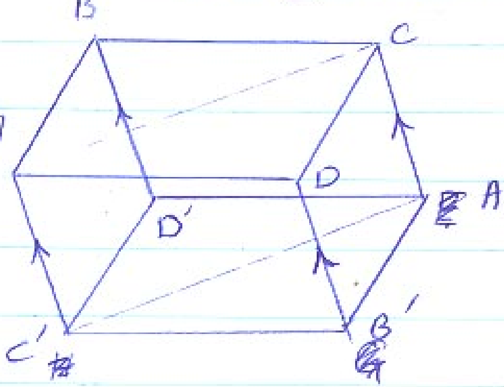
حجمی که از دوران ناحیه‌ی هاشور خورده بدست می‌آید چقدر است.





V هاشور = (حجم استوانه بزرگ) − (حجم نیم کره) + (حجم عرقچین) − (حجم استوانه کوچک)

متوازی السطوح: منشوری که قاعده آن متوازی الاضلاع باشد.



مثال: ثابت کنید قطرهای متوازی السطوح همرس اند.

$ACA'C'$ متوازی الاضلاع است. $\Rightarrow$ C و منصف اند

$ABA'B'$ " $\Rightarrow$ AA' و BB' منصف اند "

$ADA'D'$ " $\Rightarrow$ AA' و DD' "

پس قطرها یکدیگر را نصف می کنند و همرس اند.

مثال ۲) اگر سه قطر از متوازی السطوح برابر باشند ثابت کنید چهارمین قطر

نیز با آنها برابر است.

$AA' = BB' = CC'$

در متوازی الاضلاع‌های $ACA'C'$

و $BDB'D'$ اضلاع برابر و قطر

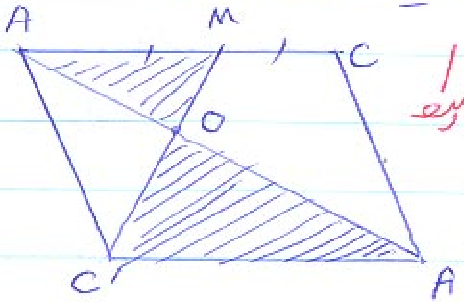
داریم پس اینها هم مستطیل هستند و

$D' = CC'$

مثال ۳) ثابت کنید متوازی السطوحی که قطرهای برابر دارد مکعب مستطیل ا

سوال ۴) ثابت کنید قطری که از نقطه A می‌گذرد از مرکز ثقل مثلثی عبور می‌کند

که راس‌های آن سه انتهای یال‌های گذرنده از A است.



قطرهای ~~CDAB~~ ABCD سقف یکدیگر یعنی M وسط

AC و C'M میانه‌های مثلث $\overset{\triangle}{B'C'D}$ است

است. در متوازی‌الاضلاع ACA'C' قطر ~~...~~ AA' و C'M را در O قطع می‌کند.

$$\overset{\triangle}{AOM} \sim \overset{\triangle}{A'OC'} \Rightarrow \frac{MO}{C'O} = \frac{AM}{A'C} = \frac{1}{۲}$$

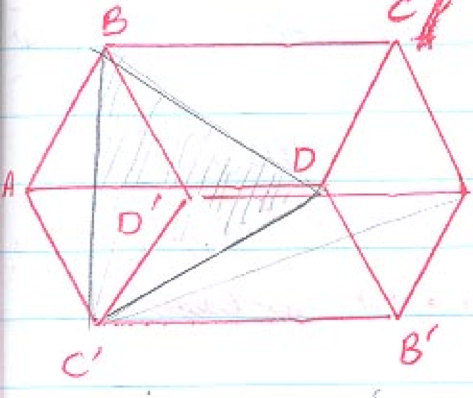
~~سوال پنجم همه یال‌های~~

سوال ۵) همه یال‌های یک متوازی‌السطوح برابر a هستند و زاویه بین

یال‌هایی که از رأس A می‌گذرند دو به دو برابر با ۶۰° است.

الف) حجم متوازی‌السطوح را برحسب a بیابید.

ب) طول قطر گذرنده از A را برحسب a بدست آورید.



پاسخ الف ← در حجم $ABDC$ مثلث های ABD و ABC' و ADC' متساوی الاضلاع هستند. پس این حجم چهار وجهی منتظم است.

پس ارتفاع این متوازی السطوح با ارتفاعی که از رأس C بر صفحه ی ABD رسم می شود (ارتفاع چهار وجهی منتظم) برابر است.

$$\text{ارتفاع} = C'H = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$S_{ABCD} = \left(\frac{3}{4}a^2\right) \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \quad \text{مساحت قاعده}$$

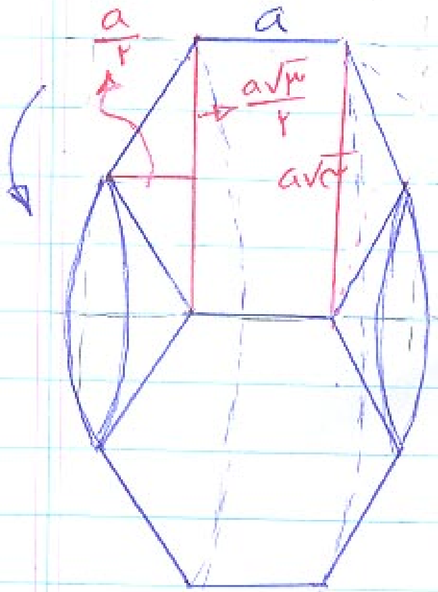
$$\Rightarrow \text{حجم} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3$$

پاسخ ب ← ارتفاعی که از A بر صفحه ی $BC'D$ رسم می شود از مرکز ثقل آن می گذرد (زیرا چهار وجهی $ABC'D$ منتظم است)

همچنین قطر AA' از مرکز ثقل می گذرد پس ارتفاع و قطر بر هم منطبق اند و نسبت ۱ به ۲ روی قطر ایجاد می شود.

ارتفاع وارد از A بر $= \frac{\sqrt{6}}{3}a \Rightarrow AA' = a\sqrt{6}$

سوال) یک شش ضلعی منتظم به طول a را حول ضلعش دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل را برحسب a بدست آورید.



راه حل اول ← دو مخروط ناقص توخالی + استوانه

راه حل دوم ← دوران مربع + کم کردن مخروط‌های خالی

$$\text{حجم استوانه وسط} = \pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\times a$$

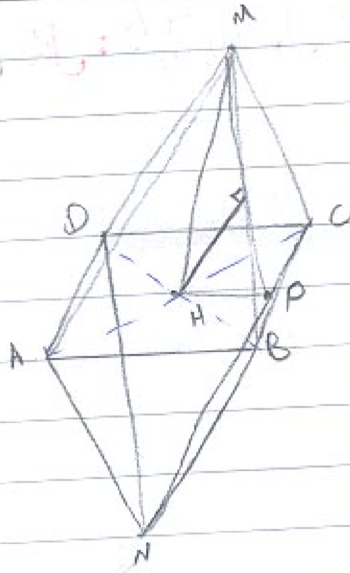
$$\text{حجم مخروط ناقص} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right)$$

$$= \frac{\pi\times\frac{a}{2}}{3}\left((a\sqrt{3})^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{حجم مخروط خالی} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\frac{a}{2}$$

$$\text{حجم کل} = \frac{\pi a^3\times 3}{4} + 2\left(\frac{\pi a^3}{6}\left(3+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\pi a^3}{8}\right)$$

هشت وجهی منتظم:



همه وجه‌ها متساوی الاضلاع است.

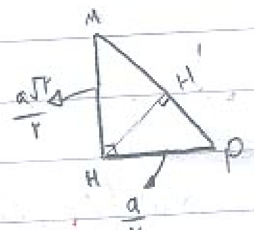
$MH = \sqrt{MC^2 - CH^2} = \sqrt{MC^2 - (\frac{AC}{2})^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow MN = a\sqrt{2} = AC = BD$

- چهارضلعی‌های ABCD و AMCN و BMDN مربع هستند
- پس AC و BD و MN مساوی و منصف و عمود بر هم هستند.

حجم ۸ وجهی منتظم به یال a : $2 \times \frac{(\frac{a\sqrt{2}}{2})a^2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

شعاع کره محیطی $= MH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

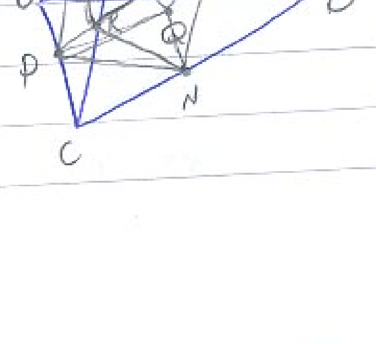


$MP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\quad HH' \cdot MP = MH \times HP$

شعاع کره‌ی محاطی $HH' = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

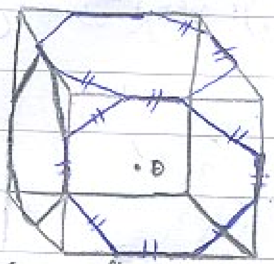
شعاع کره‌ی مماس بر یال‌ها $= HP = \frac{a}{2}$

☑ کره‌ی محیطی ۸ وجهی بر یال‌های ۴ وجهی مماس است ☑ کره‌ی محاطی چهاروجهی و کره‌ی محاطی ۸ وجهی بر هم منطبق است.

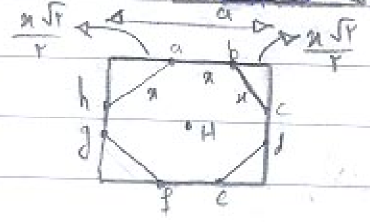


gottogoo2001 @ yahoo

DATE : SUBJECT :



مثال: در هر کنج مکعب یک هرم حذف کرده‌ایم بطوری که یال قاعده‌ی هرم با قسمت باقیمانده از یال مکعب برابر باشد حجم شکل باقیمانده برحسب یال مکعب چقدر است.



$$a = x + x\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = a(\sqrt{2}-1)$$

$$\text{حجم یکی از هرم‌ها} = \frac{1}{3}\left(\frac{\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} \times \frac{x\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{x^3}{12\sqrt{2}} = \frac{a^3(\sqrt{2}-1)^3}{12\sqrt{2}}$$

$$\text{حجم شکل حاصل} = a^3 - 8 \times \frac{a^3(\sqrt{2}-1)^3}{12\sqrt{2}}$$

☑ فاصله‌ی مرکز مکعب تا هر یال از این شکل برابر است $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ است. (حال چرا تمام فاصله‌ها برابر است؟ چون abcdefgh منتظم است و OH نیز عمود است. پس هرم منتظم است.)

فاصله مرکز مکعب با وجه‌های مثلث:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right) \times (\text{ارتفاع هرم})}{3} = \frac{x^3}{12\sqrt{2}} \Rightarrow \text{ارتفاع هرم} = \frac{x}{\sqrt{6}}$$

$$\text{فاصله مرکز تا وجه مثلثی} = (\text{نصف قطر مکعب}) - (\text{ارتفاع هرم}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{x}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{6}}$$

متوازی الاضلاعی با اضلاع a و b را حول دو ضلعش دوران می‌دهیم نسبت حجم دو شکل را برحسب a و b بدست آورید.