۱- چند نقطه در صفحه‌ی دو خط متقاطع d و d' وجود دارد که از آن دو خط به فاصله‌ی $5\,cm$ باشند؟

۲- دو خط متقاطع d و d' مفروض‌اند و دایره‌ای به مرکز O در صفحه وجود دارد. چند نقطه روی دایره وجود دارد که از دو خط d و d' به یک فاصله باشد؟

۳- دو خط موازی d و d' فاصله‌ای برابر ۴ از یکدیگر دارند. نقاطی از صفحه‌ی دو خط d و d' بیابید که مجموع فاصله‌شان از d و d' برابر ۴ باشد.

۴- نقطه‌ی P خارج از زاویه‌ی xOy قرار دارد. خطی گذرنده از P رسم کنید که Ox و Oy را در B و A قطع کند به‌طوری‌که $OB = OA$.

۵- مثلث ABC را با معلومات $\hat{A} = \alpha$، $BH = h_b$ و $CH' = h_c$ رسم کنید.

۶- مثلث ABC را طوری رسم کنید که اندازه‌ی اضلاع AB، AC و نیز اندازه‌ی ارتفاع AH معلوم باشد.

۷- مثلث ABC را با معلومات $\hat{B}$، اندازه‌ی AH (ارتفاع) و اندازه‌ی AD (نیم‌ساز) رسم کنید.

۸- از مثلث ABC اندازه‌ی ضلع AB، اندازه‌ی میانه و ارتفاع نظیر ضلع BC معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۹- مربعی رسم کنید که پاره‌خط AC قطر آن باشد.

۱۰- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که اندازه‌ی اضلاع و یکی از زاویه‌های آن معلوم باشد.

۱۱- از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازه‌ی وتر و ارتفاع وارد بر وتر معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱۲- از مثلث ABC اندازه‌های $BC = ۴$ و $AM = m_a = ۳$ معلوم است و می‌دانیم H (پای ارتفاع وارد بر BC) وسط BM است. مثلث را رسم کنید.

۱۳- مثلث ABC را با داشتن ضلع $BC = ۴$، زاویه‌ی $\hat{B} = ۴۵^\circ$ و ارتفاع $CH = ۲\sqrt{۲}$ رسم کنید.

۱۴- مثلث ABC مفروض است. خطی موازی BC رسم کنید که AB و AC را در نقاط M و N قطع کند به‌طوری که $MN = x$ $(BC > x)$.

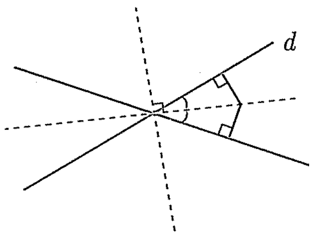
۱۵- ذوزنقه‌ای رسم کنید که اندازه‌ی قاعده‌های آن $CD = ۹$ و $AB = ۴$ و اندازه‌ی زاویه‌های مجاور به قاعده‌ی آن $\hat{C} = ۶۰^\circ$ و $\hat{D} = ۴۵^\circ$ باشد.

۱۶- مثلث ABC را با معلومات $b + c$، $BC = a$ و $\hat{B} = \alpha$ رسم کنید.

۱۷- مثلث ABC را با معلومات $b + c$، $BC = a$ و $\hat{A} = \alpha$ رسم کنید.

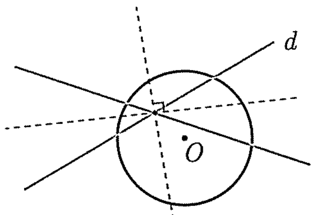
۱۸- از ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی اندازه‌ی قاعده‌ها و تفاضل دو زاویه‌ی ذوزنقه داده شده است. ذوزنقه را رسم کنید.

۱- می‌دانیم هر نقطه‌ای که از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله باشد روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد. دو خط متقاطع d و d' در صفحه چهار زاویه ایجاد می‌کنند. روی نیم‌سازهای هر کدام از آن زوایا فقط یک نقطه با خاصیت داده شده وجود دارد. پس کلاً ۴ نقطه وجود دارد.

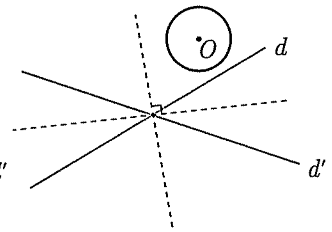


(با رسم خطوط موازی d و d' و به فاصله‌ی ۵ از هر کدام نیز می‌توان مسئله را حل کرد.)

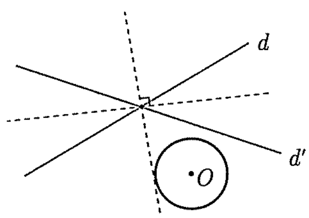
۲- نیم‌سازهای چهار زاویه‌ی حاصل از تقاطع d و d' را رسم می‌کنیم که دو خط عمود بر هم است. دایره به مرکز O با این نیم‌سازها می‌تواند صفر تا چهار نقطه‌ی مشترک داشته باشد.



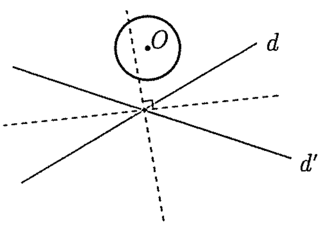
دایره با نیم‌سازها ۴ نقطه‌ی مشترک دارد.



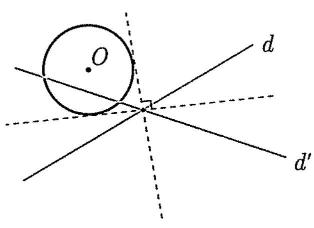
دایره با نیم‌سازها نقطه‌ی مشترک ندارد.



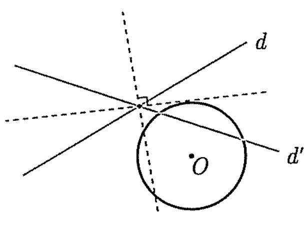
دایره با نیم‌سازها ۱ نقطه‌ی مشترک دارد.



دایره با نیم‌سازها ۲ نقطه‌ی مشترک دارد.



دایره با نیم‌سازها ۲ نقطه‌ی مشترک دارد.

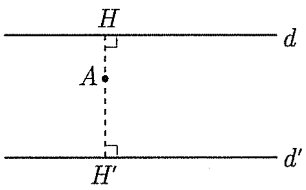


دایره با نیم‌سازها ۳ نقطه‌ی مشترک دارد.

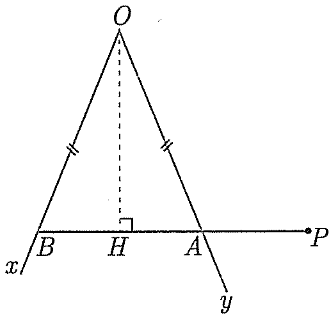
۳- اگر A نقطه‌ای بین دو خط d و d' باشد داریم:

$$AH + AH' = HH' = ۴$$

پس تمام نقاط بین دو خط پاسخ مسئله است. واضح است که نقاط روی هر کدام از دو خط d و d' نیز جواب‌اند. ولی نقاط بیرون دو خط این خاصیت را ندارند.

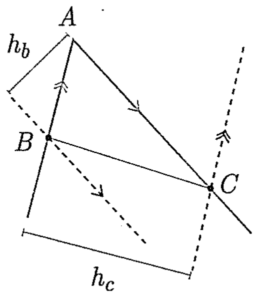


۴- ابتدا فرض کنیم چنین خطی رسم شده باشد بنابراین مثلث OAB متساوی‌الساقین است و نیم‌ساز O بر BA عمود است.



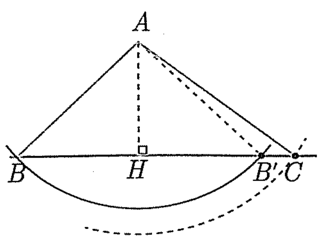
برای پیداکردن نقاط B و A باید از P عمودی بر نیم‌ساز زاویه‌ی xOy رسم کنیم.

۵- ابتدا زاویه‌ی A را رسم می‌کنیم. خطی موازی با یک ضلع آن به فاصله‌ی h_b رسم می‌کنیم تا رأس B به‌دست آید. هم‌چنین خطی موازی با ضلع دیگر به فاصله‌ی h_c رسم می‌کنیم تا رأس C مشخص شود کافی است B را به C وصل کنیم. در این صورت ABC مثلث مطلوب خواهد بود.

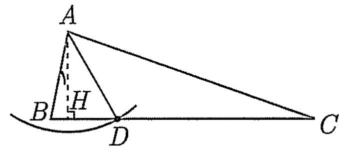


۶- ابتدا خطی رسم می‌کنیم که قرار است ضلع BC بخشی از آن باشد، نقطه‌ی H را روی خط در نظر می‌گیریم و عمودی به اندازه‌ی AH در آن نقطه رسم می‌کنیم تا نقطه‌ی A به‌دست آید. سپس به مرکز A و شعاع‌های AB و AC دو کمان رسم می‌کنیم تا B و C دست آید. A را به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.

مسئله زمانی جواب دارد که $AB \geq AH$ و $AC \geq AH$ باشد و حداقل یکی از نامساوی‌ها تساوی نباشد. اگر دقیقاً یکی از نامساوی‌ها تساوی باشد مسئله یک جواب دارد و اگر هر دو نامساوی باشند و $AB \neq AC$ باشد مسئله دو جواب دارد و اگر $AB = AC$ یک جواب دارد.

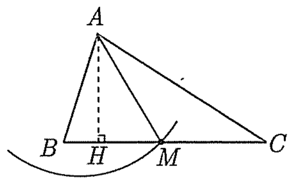


۷- ابتدا فرض کنیم ABC جواب باشد.

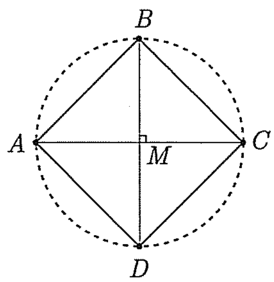


مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH را می‌توان رسم کرد (زیرا دو زاویه H و A_1 و ضلع بین AH در این مثلث معلوم است.) پس از رسم این مثلث کمانی به مرکز A و شعاع AD رسم می‌کنیم تا BH یا امتداد آن را در نقطه‌ی D قطع کند. روی AD به اندازه‌ی زاویه‌ی BAD جدا می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا C به‌دست آید. شرط رسم $AD \geq AH$ است (حال بگویید این مسئله چند جواب دارد).

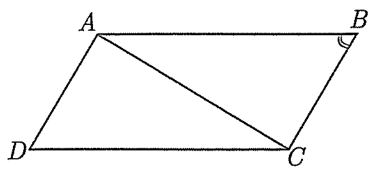
۸- مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH قابل رسم است. سپس کمانی به مرکز A و شعاع AM رسم می‌کنیم تا M به‌دست آید. BM را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا به C برسیم (حال بگویید این مسئله چند جواب دارد).



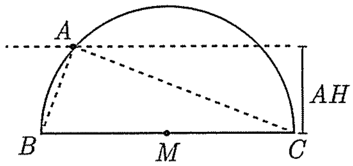
۹- عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم. با توجه به این که قطرهای مربع مساوی و عمودمنصف یکدیگر هستند، پس دایره‌ای به مرکز M و شعاع AM رسم می‌کنیم. تا رأس‌های B و D از مربع معلوم شوند. در این صورت $ABCD$ مربع مورد نظر است (چهارضلعی که قطرهایش عمودمنصف هم و برابر باشند مربع است).



۱۰- مطابق شکل مثلث ABC با معلومات دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها قابل رسم است. پس ابتدا مثلث ABC را رسم کرده، سپس از رأس C خطی موازی AB و از رأس A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D قطع کنند. $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

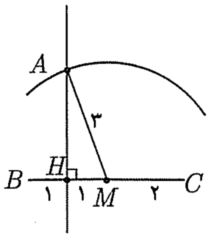


۱۱- ابتدا وتر مثلث را رسم می‌کنیم (BC وتر مثلث است) می‌دانیم که طبق خاصیت میانه در مثلث قائم‌الزاویه، اگر دایره‌ای به قطر BC رسم کنیم از A می‌گذرد. این دایره را رسم می‌کنیم. هم‌چنین خطی موازی با BC به فاصله‌ی AH از آن رسم می‌کنیم تا دایره را در A قطع کند کافی است A را به B و C وصل کنیم.

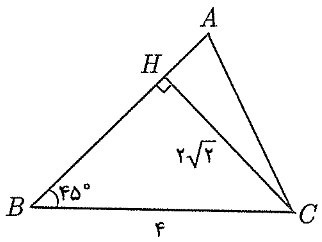


مسئله هنگامی جواب دارد که $AH \leq \frac{BC}{۲}$.

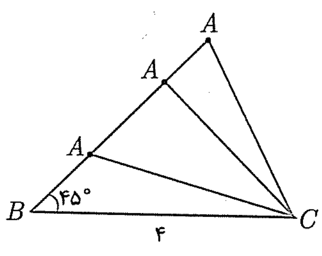
۱۲- ابتدا BC را رسم می‌کنیم و به کمک رسم عمودمنصف نقاط M و H را پیدا می‌کنیم. خطی عمود بر BC در نقطه‌ی H رسم می‌کنیم و کمانی به مرکز M و شعاع $AM = ۳$ رسم می‌کنیم تا رأس A به‌دست آید. باید A را به B و C وصل کنیم تا مثلث رسم شود.



۱۳- فرض کنیم ABC مثلث موردنظر باشد. در این صورت مثلث BHC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین خواهد بود. پس بنابر رابطه‌ی فیثاغورس $BH = CH = ۲\sqrt{۲}$. به عبارتی داده‌ی $CH = ۲\sqrt{۲}$ یک فرض اضافه است و در هر حالت در این مثلث با این اطلاعات ارتفاع $CH = ۲\sqrt{۲}$ است.

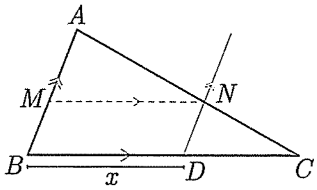


بنابراین اگر این مثلث را بخواهیم رسم کنیم ابتدا ضلع $BC = ۴$ را رسم کرده سپس از رأس B نیم‌خطی ترسیم می‌کنیم تا با پاره‌خط BC زاویه‌ی ۴۵ درجه بسازد. در این صورت هر نقطه روی این نیم‌خط می‌تواند به عنوان رأس A انتخاب شود. به عبارتی این مسئله بی‌شمار جواب دارد.

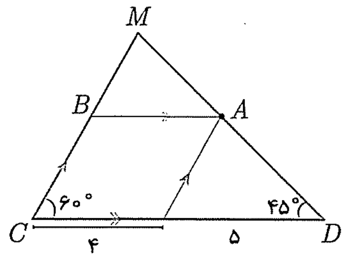


۱۴- روی BC پاره‌خط $BD = x$ را جدا می‌کنیم و از D موازی با AB رسم می‌کنیم تا AC را در N قطع کند. خطی که از N موازی با BC رسم می‌شود AB را در M قطع می‌کند و $BDNM$ متوازی‌الاضلاع است پس:

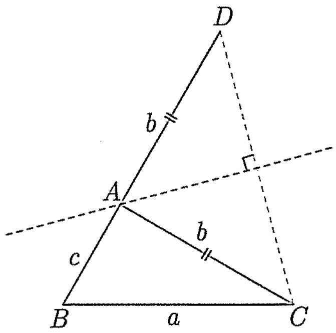
$MN = BD = x$



۱۵- ابتدا مثلثی را با داشتن $CD = ۹$، $\hat{C} = ۶۰^\circ$ و $\hat{D} = ۴۵^\circ$ رسم می‌کنیم. سپس به روش مسئله‌ی قبل خطی موازی CD رسم می‌کنیم که اندازه‌ی آن $AB = ۴$ باشد. $ABCD$ ذوزنقه‌ی مفروض است.



۱۶- دقت کنید که معلوم بودن $AB + AC = c + b$ نیازمند این است که پاره‌خطی به اندازه‌ی $AB + AC$ رسم کنیم پس ابتدا فرض کنیم مثلث ABC رسم شده باشد. روی امتداد ضلع BA پاره‌خط AD را به اندازه‌ی AC جدا می‌کنیم $(AC = AD)$. بنابراین در مثلث BDC اندازه‌ی $BC = a$، $BD = b + c$ و $\hat{B} = \alpha$ معلوم است و می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. پس از رسم این مثلث، عمودمنصف CD را رسم می‌کنیم تا A به‌دست آید.

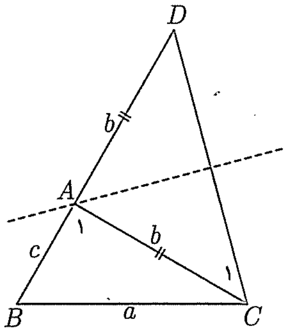


۱۷- فرض کنیم مثلث ABC رسم شده باشد. روی امتداد BA به اندازه‌ی $AD = AC$ جدا می‌کنیم. با توجه به ساق‌های برابر در مثلث ADC داریم: $\hat{C}_۱ = \hat{D}$.

هم‌چنین زاویه‌ی $A_۱$ برای مثلث ADC زاویه‌ی خارجی است پس:

$$\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ + \hat{D} = ۲\hat{D}$$

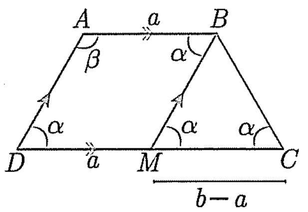
بنابراین، ابتدا باید مثلث BDC را با معلومات $BD = b + c$، $BC = a$ و $\hat{D} = \frac{\hat{A}}{۲}$ رسم کرد. برای این کار ابتدا $BD = b + c$ را رسم می‌کنیم، سپس زاویه‌ی $\hat{D} = \frac{\hat{A}}{۲}$ را رسم می‌کنیم و در نهایت به مرکز B و شعاع a کمان رسم می‌کنیم. این کمان ممکن است ضلع زاویه‌ی D (ضلع غیر از BD) را در ۲ نقطه قطع کند و ممکن است دو مثلث غیرهم‌نهشت برای BDC به وجود بیاید. پس از رسم مثلث BDC عمودمنصف DC را رسم می‌کنیم تا BD را در A قطع کند. (حال بگویید چند مثلث غیرهم‌نهشت برای ABC به وجود می‌آید؟)



۱۸- فرض کنیم $ABCD$ جواب باشد. اگر از B خطی موازی با AD رسم کنیم داریم:

$$\begin{cases} M\hat{B}C = \beta - \alpha \\ MC = b - a \end{cases}$$

(در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین زوایای مجاور قاعده با هم برابرند و چهارضلعی $ABMD$ متوازی‌الاضلاع است.)



بنابراین مثلث BMC متساوی‌الساقین است و اندازه‌ی قاعده و زاویه‌های آن معلوم است و می‌توان آن‌را رسم کرد. پس از رسم مثلث BMC از B خطی موازی با MC و به اندازه‌ی $AB = a$ رسم می‌کنیم تا به A برسیم. هم‌چنین CM را از طرف M به اندازه‌ی $MD = a$ امتداد می‌دهیم تا D به‌دست آید.

- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب
رابر $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است.

- کدام یک از عبارت‌های زیر گزاره است. در صورت گزاره بودن ارزش آن را
مبین کنید.

ف) مجموع زوایای خارجی هر مثلث ۳۶۰° است.

) محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث، درون مثلث قرار دارد.

) آیا نمره‌ی هندسه‌ی من خوب شده است؟

) ۲۰۲۵ مربع کامل نیست.

) بعضی مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند.

) اگر اندازه‌ی دو ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اندازه‌ی دو ضلع از مثلث
ائم‌الزاویه‌ی دیگر برابر باشد آن‌گاه آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

) شنبه برویم سینما.

) اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر در هر مثلث قائم‌الزاویه، نصف اندازه‌ی وتر است.

) ۱۳۹۹ عددی اول است.

- عبارت‌های زیر را با آوردن مثال نقض رد کنید.

ف) هر چهارضلعی که چهار زاویه‌ی برابر داشته باشد مربع است.

) در هر چهارضلعی محدب هر زاویه‌ی خارجی حداقل از یکی از زوایای داخلی
چهارضلعی بزرگ‌تر یا مساوی است.

) اگر در یک چهارضلعی محدب قطرها برابر باشند آن‌گاه آن چهارضلعی یا
ستطیل است یا ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین.

) برای هر دو مجموعه‌ی A و B، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$.

) هیچ عدد اول مضرب ۳ وجود ندارد.

) مجذور هر عدد صحیح از خود عدد بزرگ‌تر است.

) در یک چهارضلعی محدب، اگر دو ضلع روبه‌رو برابر و دو زاویه‌ی روبه‌رو نیز
ابر باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

) متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع برابر داشته باشد لوزی است.

- آیا عبارت‌های زیر درست هستند؟ چرا؟

) اگر دو زاویه‌ی متقابل به رأس متمم هم باشند، هر یک ۴۵° هستند.

) هر لوزی مربع است.

پ) هر مستطیل متوازی‌الاضلاع است.

ت) مستطیلی که قطرهای برابر داشته باشد مربع است.

ث) عددی که رقم دهگان آن ۹ باشد نمی‌تواند مربع کامل باشد.

ج) نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث یا داخل مثلث قرار دارد یا خارج آن.

چ) بعضی از لوزی‌ها مربع هستند.

ح) توان دوم هر عدد طبیعی کوچک‌تر از توان سوم آن است.

خ) هر مثلث دارای حداقل یک زاویه‌ی بزرگ‌تر از ۶۰° است.

د) مثلث متساوی‌الساقین غیر متساوی‌الاضلاعی وجود دارد که طول هر سه ضلع
آن توان طبیعی از ۲ باشد.

۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $۲ < ۴$

ب) یک مثلث وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش ۱۸۰° نیست.

پ) چهار ضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن از ۳۶۰° کم‌تر
است.

ت) در هر مستطیل هر ۴ زاویه‌ی داخلی‌اش ۹۰° هستند.

ث) هر مستطیل یک مربع است.

ج) لوزی‌ای وجود دارد که مستطیل نیست.

چ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.

ح) در هر مثلث زاویه‌ی بزرگ‌تر روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است.

خ) مجموع زاویه‌های خارجی هر پنج ضلعی محدب ۳۶۰° است.

د) از یک نقطه خارج یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد.

ذ) بعضی از مستطیل‌ها، مربع نیستند.

ر) در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی وتر از اندازه‌ی دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

ز) هر چهارضلعی که دو قطرش مساوی باشد، مستطیل است.

۶- ابتدا هر یک از قضایا را به صورت شرطی بنویسید، سپس عکس آن‌ها را به
صورت شرطی بنویسید اگر عکس قضیه درست بود، قضیه را به صورت دو شرطی
بنویسید.

الف) هر مربع یک مستطیل است.

ب) دو زاویه‌ی برابر، متمم‌های برابر نیز دارند.

پ) در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی وتر است.

ت) لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که قطرهایش بر هم عمودند.

ث) دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم برابرند.

۷- هر یک از موارد زیر را با برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\hat{A} \neq \hat{B}$ آن‌گاه $BC \neq AC$.

ب) برای دو مثلث ABC و DEF داریم $AC = DE$، $BC = FE$ و $AB \neq DF$ ثابت کنید $\hat{C} \neq \hat{E}$.

پ) در هر مثلث، هر دو نیم‌ساز داخلی متقاطع‌اند.

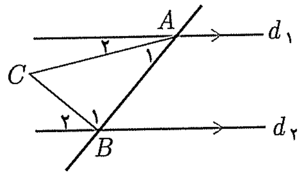
ت) در هر مثلث حداقل یکی از زوایا کوچک‌تر یا مساوی ۶۰° است.

ث) اگر k عددی طبیعی و $k^۳$ فرد باشد، آن‌گاه k نیز فرد است.

ج) برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $a^۲ + b^۲ \geq ۲ab$.

۸- در چهارضلعی محدب $ABCD$ قطرها بر هم عمودند ثابت کنید اگر $AD \neq DC$، آن‌گاه $BA \neq BC$.

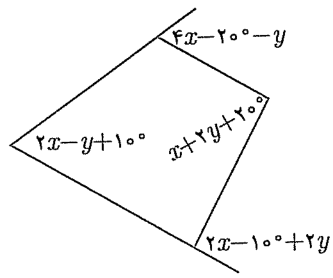
۹- در شکل زیر $d_۱ \parallel d_۲$، $\hat{A}_۱ = ۲\hat{A}_۲$ و $\hat{B}_۱ = ۲\hat{B}_۲$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی C چند درجه است؟



۱) ۵۰° ۲) ۶۰°

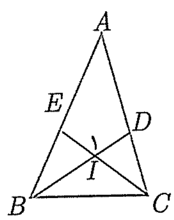
۳) ۷۵° ۴) ۸۰°

۱۰- با توجه به شکل، اندازه‌ی x را بیابید؟



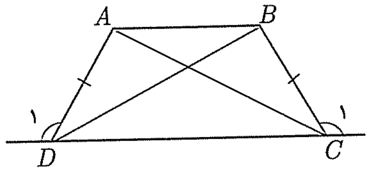
۱۱- در مثلث ABC، نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی B امتداد CA را در D قطع می‌کند اگر $\hat{D} = ۲۵^\circ$ باشد، تفاضل زوایای A و C را بیابید.

۱۲- با توجه به شکل CE و BD نیم‌ساز هستند و مجموع زوایای A و $I_۱$، ۱۵۰° است. اندازه‌ی زاویه‌ی A را بیابید.

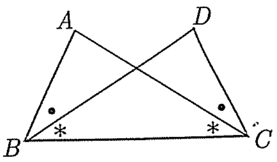


۱۳- با توجه به شکل $\hat{D}_۱ = \hat{C}_۱$ و $AD = BC$ است. ثابت کنید:

$AC = BD$

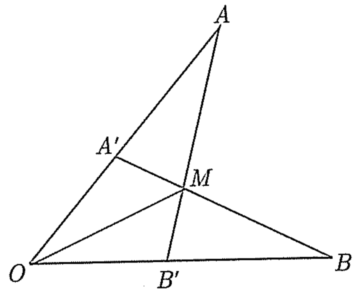


۱۴- با توجه به شکل ثابت کنید: $AB = CD$



۱۵- با توجه به شکل داریم: $AA' = BB'$ و $OA' = OB'$. ثابت کنید:

$A\hat{O}M = B\hat{O}M$



۱۶- ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین، نیم‌سازهای داخلی زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

۱۷- بر قاعده‌ی BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC دو نقطه‌ی M و N را چنان اختیار می‌کنیم که $BM = CN$، این نقاط را به رأس A وصل می‌کنیم. ثابت کنید مثلث AMN متساوی‌الساقین است.

۱۸- در مثلث ABC، ارتفاع AH را رسم کرده و از طرف H به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی A' امتداد می‌دهیم نقطه‌ی A' را به نقاط B و C وصل می‌کنیم ثابت کنید دو مثلث ABC و $A'BC$ هم‌نهشتند.

۱۹- در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و $A'B'C'$ ($\hat{B} = \hat{B}' = ۹۰^\circ$) اندازه‌ی اضلاع AB و $A'B'$ با هم برابر و اندازه‌ی ارتفاع‌های BH و $B'H'$ نیز با هم برابر است. ثابت کنید دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هم‌نهشت‌اند.

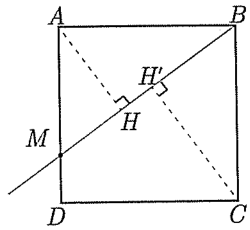
۲۰- اگر قاعده و زاویه‌ی روبه‌رو به قاعده از مثلث متساوی‌الساقینی با قاعده و زاویه‌ی روبه‌رو به قاعده از مثلث متساوی‌الساقین دیگری برابر باشند، ثابت کنید دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۲۱- ارتفاع‌های BB' و CC' از مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC را از طرف رأس‌ها به اندازه‌ی ضلعی که بر آن عمود شده‌اند امتداد داده‌ایم تا به E و F برسیم. ثابت کنید: $AE = AF$ و $AE \perp AF$.

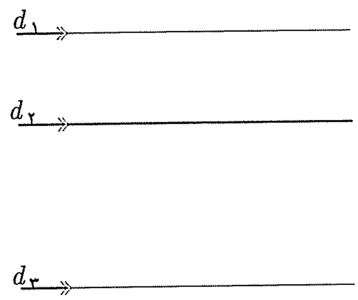
۲۲- روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و در خارج آن دو مربع $ABDC'$ و $ACEB'$ را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $CC' = BB'$ و $CC' \perp BB'$.

۲۳- نقطه‌ی M روی ضلع AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارد. ضلع BC را از طرف C به اندازه‌ی AM امتداد می‌دهیم تا به D برسیم ثابت کنید $BM = MD$.

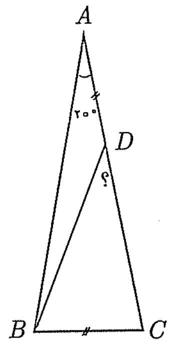
۲۴- با توجه به شکل خطی از رأس B می‌گذرد و با ضلع AD از مربع $ABCD$ در نقطه‌ی M متقاطع است. اگر $AH = ۳$ و $CH' = ۴$، اندازه‌ی ضلع مربع را به‌دست آورید.



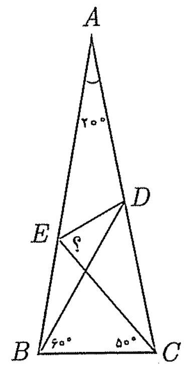
۲۵- با توجه به شکل سه خط موازی داده شده است مربعی رسم کنید که سه رأس آن روی این سه خط موازی باشد.



۲۶- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و زاویه‌ی رأس آن یعنی A برابر ۲۰° است. اگر $AD = BC$ باشد؛ زاویه BDC چند درجه است؟



۲۷- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و زاویه رأس آن یعنی A برابر ۲۰° است. اگر $D\hat{B}C = ۶۰^\circ$ و $E\hat{C}B = ۵۰^\circ$ باشد، زاویه DEC چند درجه است؟



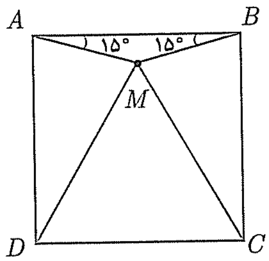
۲۸- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ زاویه‌ی A حاده و ضلع BC دو برابر ضلع AB است. ارتفاع CE را بر AB فرود آورده و نقاط E و C را به نقطه‌ی M وسط ضلع AD وصل می‌کنیم. ثابت کنید:

الف) $ME = MC$ ب) $D\hat{M}E = ۳A\hat{E}M$

۲۹- اگر در دو مثلث محیط و دو زاویه از یکی با محیط و دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، ثابت کنید دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۳۰- در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\angle A = ۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی H را به نقاط E و F وسط اضلاع AB و AC وصل می‌کنیم. ثابت کنید زاویه‌ی EHF قائمه است.

۳۱- با توجه به شکل، $ABCD$ مربع و $B\hat{A}M = A\hat{B}M = ۱۵^\circ$ است. ثابت کنید مثلث MCD متساوی‌الاضلاع است.

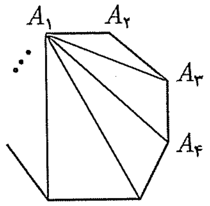


۳۲- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AC = BC)$ اندازه‌ی زاویه‌ی C برابر ۸۰° است. نقطه‌ی M را درون این مثلث چنان انتخاب می‌کنیم که $M\hat{B}A = ۳۰^\circ$ و $M\hat{A}B = ۱۰^\circ$ باشد. مقدار زاویه‌ی AMC را پیدا کنید.

(المپیاد ریاضی یوگسلاوی در سال ۱۹۸۳)

۱- n ضلعی دلخواه $A_1A_2 \dots A_n$ را مطابق شکل در نظر می‌گیریم و از A_1 به بقیه‌ی رئوس وصل می‌کنیم. به تعداد $n-2$ مثلث پدید می‌آید. از قبل می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است. از طرفی مجموع زوایای داخلی n ضلعی برابر با مجموع زوایای داخلی $n-2$ مثلث تشکیل شده است.

$\Rightarrow$ مجموع زوایای داخلی n ضلعی $= (n-2)\times 180^\circ$



از آن‌جایی که این استدلال را برای هر n ضلعی دیگر نیز می‌توان به کاربرد، پس این ویژگی که مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی، $(n-2)\times 180^\circ$ است را می‌توان به سایر n ضلعی‌های محدب تعمیم داد.

۲-

الف) گزاره‌ای درست است.

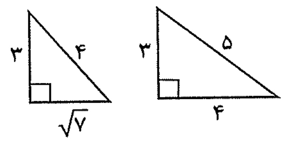
ب) گزاره‌ای نادرست است (ممکن است روی ضلع یا بیرون مثلث باشد).

پ) گزاره نیست.

ت) گزاره‌ای نادرست است. $(45^2 = 2025)$

ث) گزاره‌ای درست است.

ج) گزاره‌ای نادرست است.



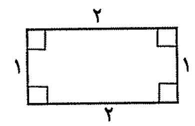
چ) گزاره نیست.

ح) گزاره‌ای درست است.

خ) گزاره‌ای درست است.

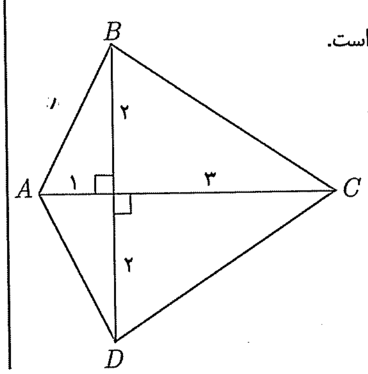
۳-

الف)



ب) چهارضلعی محدب به زوایای 30°، 80°، 90° و 160° را در نظر بگیرید، زاویه‌ی خارجی متناظر با 160°، 20° است.

پ) با توجه به شکل چهارضلعی محدب $ABCD$، نه مستطیل است و نه ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین.

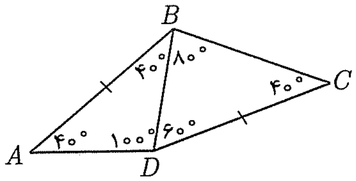


ت) $A = \{6\}$ و $B = \{8\}$، نه $\{8\} \subseteq \{6\}$ است و نه $\{6\} \subseteq \{8\}$.

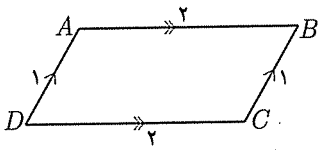
ث) عدد اول ۳، مضرب ۳ است.

ج) مجذور عدد صحیح صفر، صفر است که از خود عدد صفر بزرگ‌تر نیست.

چ)



ح) ممکن است آن دو ضلع روبه‌رو باشند. به عنوان مثال در متوازی‌الاضلاع زیر داریم: $AB = CD = 2$ ولی $ABCD$ لوزی نیست.



۴-

الف) درست. از آن‌جایی که دو زاویه متقابل به رأس برابرند و در این‌جا مجموع‌شان 90° است. هر یک 45° هستند.

ب) نادرست. به عنوان مثال لوزی‌ای که زاویه‌ی یک رأس آن 60° باشد. مربع نیست.

پ) درست. هر مستطیل متوازی‌الاضلاع است زیرا اضلاع روبه‌روی آن با هم موازی‌اند.

ت) نادرست. در هر مستطیل قطرها برابرند به عنوان مثال مستطیلی با طول ۲ و عرض ۱ قطرهای برابر دارد و مربع نیست.

ث) نادرست. به عنوان مثال $196 = 14^2$ دارای رقم دهگان ۹ است و مربع کامل است.

ج) نادرست. در مثلث قائم‌الزاویه نقطه‌ی برخورد عمودمنصف‌های مثلث روی وتر قرار دارد و در داخل یا خارج مثلث نیست.

چ) درست. در واقع لوزی که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد مربع است.

ح) نادرست. به عنوان مثال توان دوم عدد طبیعی ۱ با توان سوم آن برابر است و از آن کوچک‌تر نیست.

خ) نادرست. در مثلث متساوی‌الاضلاع هیچ کدام از زوایا بزرگ‌تر از 60° نیستند.

د) درست. به عنوان مثال مثلثی با طول اضلاع ۴، ۴ و ۲.

-۵

الف) «چنین نیست که ۴ > ۲ باشد. » که معادل است با ۴ ≤ ۲ (۴ از ۲ کوچک‌تر یا با ۲ برابر است.).

ب) «چنین نیست که یک مثلث وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی‌اش ۱۸۰° نیست.» که معادل است با: «هر مثلث مجموع زوایای داخلی‌اش ۱۸۰° است.»

پ) «چنین نیست که چهارضلعی محدبی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی آن از ۳۶۰° کم‌تر باشد.» که معادل است با: «هر چهارضلعی محدب مجموع زوایای داخلی‌اش بزرگ‌تر یا مساوی ۳۶۰° است.»

ت) «چنین نیست که در هر مستطیل هر ۴ زاویه‌ی داخلی‌اش ۹۰° باشد» که معادل است با: «مستطیلی وجود دارد که حداقل یکی از زوایای داخلی‌اش ۹۰° نباشد.»

ث) «چنین نیست که هر مستطیل یک مربع است.» و معادل است با: «مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.»

ج) «چنین نیست که لوزی‌ای وجود داشته باشد که مستطیل نباشد.» و معادل است با: «هر لوزی مستطیل است.»

چ) «چنین نیست که هیچ مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه نداشته باشد.» و معادل است با: «مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه‌ی قائمه دارد.»

ح) «چنین نیست که در هر مثلث زاویه‌ی بزرگ‌تر روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر باشد.» و معادل است با: «وجود دارد مثلثی که در آن زاویه‌ی بزرگ‌تر روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر نباشد.»

خ) «چنین نیست که مجموع زاویه‌های خارجی هر پنج ضلعی محدب ۳۶۰° باشد.» و معادل است با: «پنج ضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زاویه‌های خارجی آن ۳۶۰° نیست.»

د) «چنین نیست که از یک نقطه خارج یک خط فقط یک خط بتوان به موازات آن رسم کرد.» و معادل است با: «از یک نقطه خارج یک خط، نمی‌توان خطی به موازات آن رسم کرد یا بیش از یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد.»

ذ) «چنین نیست که بعضی از مستطیل‌ها مربع نباشند.» و معادل است با: «هر مستطیلی مربع است.»

ر) «چنین نیست که در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی وتر از اندازه‌ی دو ضلع دیگر بزرگ‌تر باشد» و معادل است با: «مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که اندازه‌ی وتر آن کوچک‌تر یا مساوی اندازه‌ی حداقل یکی از دو ضلع دیگر است.»

ز) «چنین نیست که هر چهار ضلعی که دو قطرش مساوی باشد، مستطیل باشد.» و معادل است با: «چهارضلعی‌ای وجود دارد که دو قطرش مساوی باشد و مستطیل نباشد.»

-۶

الف) صورت شرطی: اگر یک چهار ضلعی مربع باشد، آن‌گاه آن چهارضلعی مستطیل نیز است.

عکس قضیه: اگر یک چهار ضلعی مستطیل باشد، آن‌گاه آن چهارضلعی مربع نیز است (هر مستطیل، یک مربع است.).

عکس این قضیه درست نیست و مثال نقض دارد. به عنوان مثال: مستطیلی به طول ۲ و عرض ۱ مربع نیست.

ب) صورت شرطی: اگر دو زاویه برابر باشند، آن‌گاه متمم‌های آن‌ها نیز برابرند.

عکس قضیه: اگر متمم‌های دو زاویه برابر باشند، آن‌گاه آن دو زاویه نیز برابرند.

عکس این قضیه درست است. پس این قضیه دو شرطی است.

قضیه دو شرطی: دو زاویه برابرند اگر و فقط اگر متمم‌های برابر داشته باشند.

پ) صورت شرطی: اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد آن‌گاه اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی وتر است.

عکس قضیه: اگر اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر یک ضلع از مثلثی نصف اندازه‌ی آن ضلع باشد، آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

عکس این قضیه درست است.

قضیه دو شرطی: یک مثلث قائم‌الزاویه است، اگر و فقط اگر اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر یک ضلع آن، نصف اندازه‌ی آن ضلع باشد (اگر ABC مثلث مورد نظر و M وسط BC باشد. این قضیه‌ی دو شرطی به صورت ریاضی به این صورت است:

$$(\hat{A} = ۹۰^\circ \Leftrightarrow AM = \frac{BC}{۲}$$

ت) صورت شرطی: اگر در متوازی‌الاضلاعی قطرها بر هم عمود باشند، آن‌گاه آن متوازی‌الاضلاع، لوزی است.

عکس قضیه: اگر متوازی‌الاضلاعی لوزی باشد، آن‌گاه قطرهایش بر هم عمودند.

عکس این قضیه درست است.

قضیه دو شرطی: متوازی‌الاضلاع، لوزی است؛ اگر و تنها اگر قطرهایش بر هم عمود باشند.

ث) صورت شرطی: اگر دو زاویه متقابل به رأس باشند، آن‌گاه برابرند.

عکس قضیه: اگر دو زاویه برابر باشند آن‌گاه متقابل به رأس‌اند. عکس این قضیه درست نیست.

-۷

الف) فرض: $\hat{A} \neq \hat{B}$ حکم: $BC \neq AC$

با برهان غیر مستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد یعنی فرض می‌کنیم $BC = AC$، می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند در نتیجه داریم $\hat{A} = \hat{B}$.

$\hat{A} = \hat{B}$ با فرض $\hat{B} \neq \hat{A}$ در تناقض است. یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

پس حکم درست است و $BC \neq AC$.

ب) فرض کنیم $\hat{C} = \hat{E}$(فرض خلف)

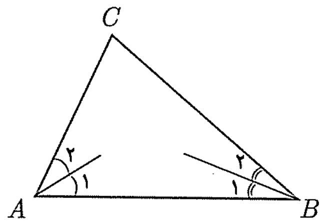
$$\left.\begin{array}{l} CA = ED \\ \hat{C} = \hat{E} \\ CB = EF \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DFE} \Rightarrow AB = DF$$

$AB = DF$ با فرض $AB \neq DF$ در تناقض است. پس $\hat{C} = \hat{E}$ نمی‌تواند باشد یعنی $\hat{C} \neq \hat{E}$.

پ) بدیهی است که دو نیم‌ساز منطبق نیستند. فرض کنیم با توجه به شکل نیم‌سازهای AD و BE در مثلث ABC موازی باشند.

$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel BE \\ \text{مورب } AB \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = ۳۶۰^\circ$$



$\hat{A} + \hat{B} = ۳۶۰^\circ$ با این حقیقت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است در تناقض است پس هر دو نیم‌ساز داخلی هر مثلث متقاطع‌اند.

ت) فرض کنیم در مثلث ABC هیچ کدام از زوایا کوچک‌تر یا مساوی ۶۰° نباشد یعنی زوایای A، B و C بزرگ‌تر از ۶۰° هستند (فرض خلف).

$$\hat{A} > ۶۰^\circ \text{ و } \hat{B} > ۶۰^\circ \text{ و } \hat{C} > ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > ۶۰^\circ + ۶۰^\circ + ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > ۱۸۰^\circ$$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > ۱۸۰^\circ$ با این حقیقت که مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است در تناقض است پس حداقل یکی از زوایا کوچک‌تر یا مساوی ۶۰° است.

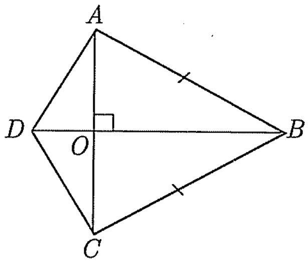
ث) فرض کنیم k فرد نباشد (فرض خلف) یعنی k زوج باشد پس $k^۳$ نیز زوج است که با این فرض که $k^۳$ فرد است در تناقض است پس k فرد است.

ج) فرض کنیم $a^۲ + b^۲ < ۲ab$ (فرض خلف)

$$a^۲ + b^۲ < ۲ab \Rightarrow a^۲ + b^۲ - ۲ab < ۰ \Rightarrow (a-b)^۲ < ۰$$

$(a-b)^۲ < ۰$ با این حقیقت که مربع هر عدد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۰ است در تناقض است. پس برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $a^۲ + b^۲ \geq ۲ab$

۸- از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $BA = BC$ باشد (فرض خلف)



در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است و می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه‌ی وارد بر قاعده نیز است در نتیجه در مثلث DAC، DO میانه و ارتفاع است پس این مثلث متساوی‌الساقین است و $AD = DC$ است.

$AD = DC$ با فرض $AD \neq DC$ در تناقض است پس $BA \neq BC$.

۹-

$$(\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲) + (\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{A}_۲ + \hat{A}_۲ + ۲\hat{B}_۲ + \hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳\hat{A}_۲ + ۳\hat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲ + \hat{B}_۲ = ۶۰^\circ$$

طبق مسئله‌ی ۲ می‌دانیم $\hat{C} = \hat{A}_۲ + \hat{B}_۲$ در نتیجه $\hat{C} = ۶۰^\circ$

۱۰- با توجه به مسئله‌ی ۵ داریم:

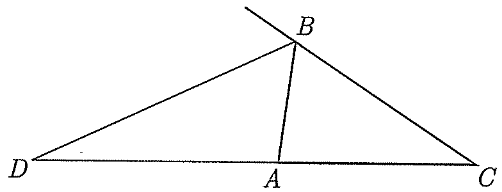
$$۲x - y + ۱۰^\circ + x + ۲y + ۲۰^\circ = ۲x - ۱۰^\circ + ۲y + ۴x - ۲۰^\circ - y$$

$$\Rightarrow ۳x + y + ۳۰^\circ = ۶x + y - ۳۰^\circ \Rightarrow ۶x - ۳x = ۳۰^\circ + ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳x = ۶۰^\circ \Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

۱۱- از مسئله‌ی ۹ استفاده می‌کنیم (شکل را با فرض $A > C$ رسم می‌کنیم.)

$$\frac{|\hat{A} - \hat{C}|}{۲} = ۲۵^\circ \Rightarrow |\hat{A} - \hat{C}| = ۵۰^\circ$$



۱۲- از رابطه‌ی زاویه‌ی بین دو نیم‌ساز داخلی استفاده می‌کنیم.

$$\hat{I}_۱ = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲} \text{ و } \hat{A} + \hat{I}_۱ = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{A} + ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲} = ۱۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳\left(\frac{\hat{A}}{۲}\right) = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۴۰^\circ$$

۱۳- $\hat{C}_۱ = \hat{D}_۱ \Rightarrow B\hat{C}D = A\hat{D}C$

(مکمل‌های دو زاویه‌ی برابر با هم مساوی‌اند.)

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ A\hat{D}C = B\hat{C}D \\ DC = CD \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{BCD}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} AC = BD$$

۱۴-

$$\left.\begin{aligned} A\hat{B}C &= D\hat{C}B \\ BC &= CB \\ A\hat{C}B &= D\hat{B}C \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(زض‌ز)}} \Delta ABC \cong \Delta DCB$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} AB = CD$$

۱۵-

$$OA' = OB' \text{ و } AA' = BB' \xrightarrow{+} OA = OB$$

$$\left.\begin{aligned} AO &= BO \\ A\hat{O}B' &= B\hat{O}A' \\ OB' &= OA' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌زض)}} \overset{\Delta}{AOB'} \cong \overset{\Delta}{BOA'}$$

$$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \begin{cases} O\hat{B}'A = O\hat{A}'B \\ \hat{A} = \hat{B} \quad (۱) \end{cases}$$

$$O\hat{B}'A = O\hat{A}'B \Rightarrow B\hat{B}'M = A\hat{A}'M$$

(مکمل‌های دو زاویه‌ی برابر با هم مساوی‌اند.)

$$\left.\begin{aligned} A\hat{A}'M &= B\hat{B}'M \\ AA' &= BB' \\ (۱)\ \hat{A} &= \hat{B} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(زض‌ز)}} \overset{\Delta}{AA'M} \cong \overset{\Delta}{BB'M} \Rightarrow A'M = B'M$$

$$\left.\begin{aligned} OA' &= OB' \\ A'M &= B'M \\ OM &= OM \text{ (مشترک)} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌ض‌ض)}} \overset{\Delta}{A'OM} \cong \overset{\Delta}{B'OM}$$

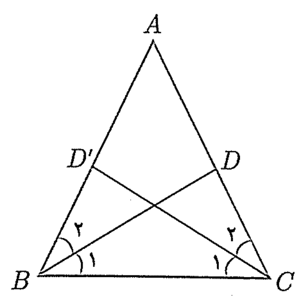
$$\Rightarrow A\hat{O}M = B\hat{O}M$$

۱۶- فرض کنیم در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، BD و CD' نیم‌سازهای داخلی باشند.

$$\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{\hat{C}}{۲} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ = \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$$

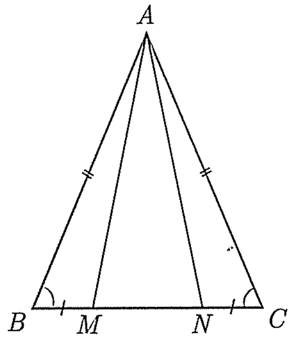
$$\left.\begin{aligned} \hat{B} &= \hat{C} \\ BC &= CB \\ \hat{C}_۱ &= \hat{B}_۱ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(زض‌ز)}} \overset{\Delta}{BD'C} \cong \overset{\Delta}{CDB}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} D'C = DB$$



۱۷- می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های روبه‌رو به ساق با هم برابرند در نتیجه داریم: $\hat{B} = \hat{C}$

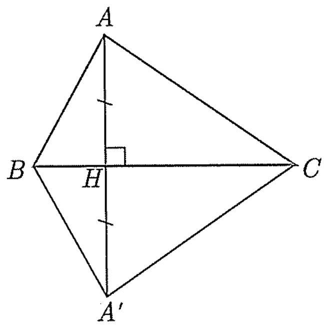
$$\left.\begin{aligned} AB &= AC \\ \hat{B} &= \hat{C} \\ BM &= CN \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌زض)}} \overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{ACN} \Rightarrow AM = AN$$



در نتیجه مثلث AMN متساوی‌الساقین است.

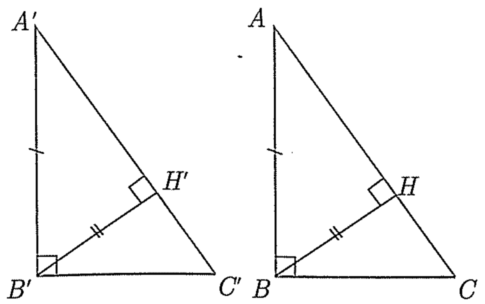
۱۸- در مثلث ABA'، ارتفاع BH میانه نیز است. در نتیجه این مثلث متساوی‌الساقین است و داریم $BA = BA'$ و مانند همین داریم: $CA = CA'$

$$\left.\begin{aligned} AB &= A'B \\ BC &= BC \\ CA &= CA' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌ض‌ض)}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'BC}$$



۱۹-

$$\left.\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}' = ۹۰^\circ \\ AB &= A'B' \\ BH &= B'H' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(وض)}} \overset{\Delta}{ABH} = \overset{\Delta}{A'B'H'} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}'$$

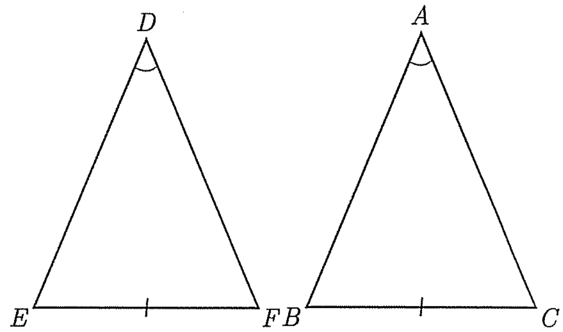


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'\\ AB=A'B'\\ \hat{B}=\hat{B}'=۹۰^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(زض‌ز)}}\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

۲۰- فرض کنیم در مثلث‌های متساوی‌الساقین ABC و DEF داشته باشیم $\hat{A}=\hat{D}$ و $BC=EF$

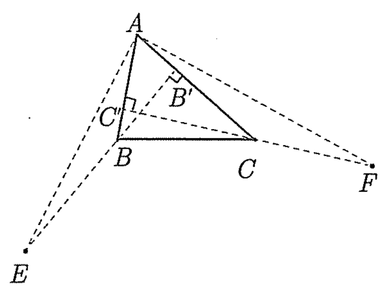
در نتیجه با توجه به این‌که مجموع زوایای مثلث ۱۸۰° است و مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند داریم: $\hat{B}=\hat{C}=\hat{E}=\hat{F}=\dfrac{۱۸۰^\circ-\hat{A}}{۲}$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{E}\\ BC=EF\\ \hat{C}=\hat{F}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ز ض ز)}}\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{DEF}$$



۲۱- در مثلث‌های قائم الزاویه‌ی ABB' و ACC' داریم:

$$A\hat{B}B'=۹۰^\circ-\hat{A}\ \text{و}\ A\hat{C}C'=۹۰^\circ-\hat{A}\Rightarrow A\hat{B}B'=A\hat{C}C'$$



اگر دو زاویه برابر باشند مکمل‌های آن‌ها نیز برابرند پس:

$$\left.\begin{array}{l}AB=FC\\ A\hat{B}E=F\hat{C}A\\ BE=CA\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض‌زض)}}\overset{\Delta}{ABE}\cong\overset{\Delta}{FCA}\Rightarrow\begin{cases}\hat{E}=C\hat{A}F\\ AE=AF\end{cases}$$

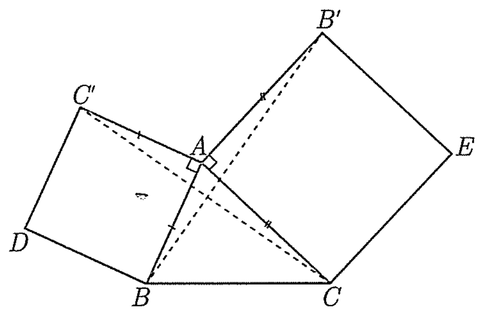
$$\hat{E}+A\hat{B}'E=۹۰^\circ\Rightarrow C\hat{A}F+A\hat{B}'E=۹۰^\circ\Rightarrow AE\perp AF$$

۲۲- زاویه‌های BAB' و CAC' هرکدام ۹۰° بیش‌تر از زاویه‌ی BAC هستند پس: $B\hat{A}B'=۹۰^\circ+\hat{A}=C\hat{A}C'$

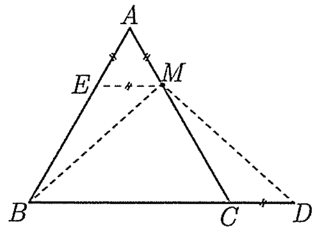
یعنی می‌توانیم برای مثلث‌های ABB' و $AC'C$ هم‌نهشتی بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}AB=AC'\\ B\hat{A}B'=C'\hat{A}C\\ AB'=AC\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض‌زض)}}\overset{\Delta}{ABB'}\cong\overset{\Delta}{AC'C}\Rightarrow\begin{cases}BB'=CC'\\ A\hat{B}B'=A\hat{C}'C\end{cases}$$

$$\Rightarrow CC'\perp BB'$$



۲۳- از M خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه‌ی E قطع کند. مثلث AEM سه زاویه‌ی ۶۰° دارد ($A\hat{M}E=\hat{C}=۶۰^\circ$) پس متساوی الاضلاع است یعنی:



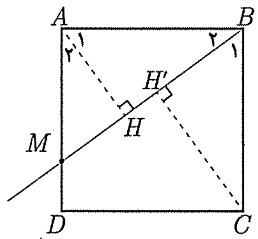
$$AM=AE=EM=CD$$

پس می‌توانیم هم‌نهشتی مثلث‌های BEM و MCD را بنویسیم:

$$\left.\begin{array}{r}M\hat{E}B=D\hat{C}M=۱۲۰^\circ\\ EM=CD\\ AB=AC\ \text{و}\ AE=AM\Rightarrow EB=CM\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{(ض‌زض)}}\overset{\Delta}{BEM}\cong\overset{\Delta}{MCD}\Rightarrow BM=MD$$

۲۴- زاویه‌های $A_۱$ و $B_۲$ متمم هستند (مجموعشان ۹۰° است) و همچنین زوایای $B_۱$ و $B_۲$ نیز متمم هستند پس $A_۱$ باید با $B_۱$ برابر باشد.



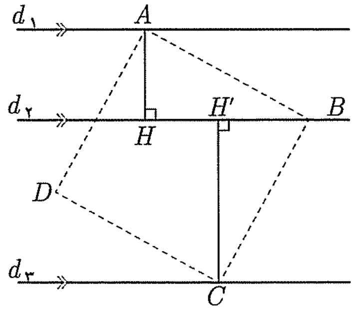
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱=\hat{B}_۱\\ \hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ\\ AB=BC\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه‌ی تند}}\overset{\Delta}{ABH}\cong\overset{\Delta}{BCH'}$$

$$\Rightarrow BH=CH'=۴$$

از رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث ABH استفاده می‌کنیم.

$$AB^۲=AH^۲+BH^۲=۳^۲+۴^۲=۲۵\Rightarrow AB=۵$$

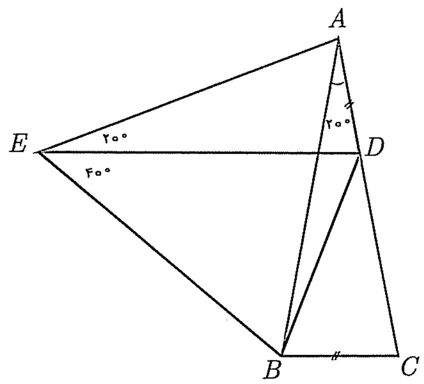
۲۵- اگر $ABCD$ مربع مفروض باشد از رأس‌های A و C بر خط d_2 عمود رسم می‌کنیم. همانند مسئله‌ی قبل مثلث‌های ABH و BCH' هم‌نهشت هستند. بنابراین ضلع مربع برابر با وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاع آن با فاصله‌های بین دو خط برابر هستند. پس ابتدا مثلث ABH را رسم می‌کنیم تا اندازه‌ی ضلع مربع به‌دست آید سپس بقیه‌ی رأس‌های مربع را پیدا می‌کنیم.



۲۶- روش اول: روی پاره‌خط AD مثلث EAD را هم‌نهشت با مثلث ABC می‌سازیم. نقطه‌ی E را به رأس B وصل می‌کنیم:

$$E\hat{A}D = E\hat{D}A = A\hat{B}C = A\hat{C}B = ۸۰^\circ$$

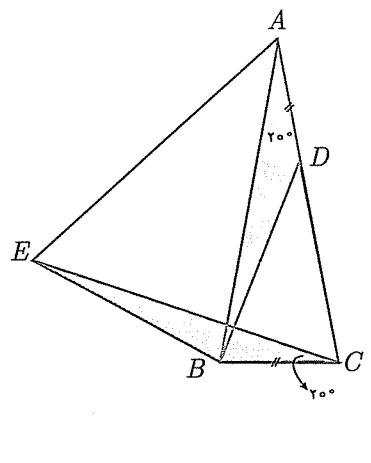
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow E\hat{A}B = ۶۰^\circ \\ \text{از طرفی: } AE = AB \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ مثلث } ABE \text{ متساوی‌الاضلاع است}$$



بنابراین $A\hat{E}B = ۶۰^\circ$، در نتیجه $B\hat{E}D = ۴۰^\circ$ و چون مثلث DEB متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس ۴۰° است، بنابراین:

$$B\hat{D}E = D\hat{B}E = ۷۰^\circ \Rightarrow A\hat{D}B = ۱۵۰^\circ \Rightarrow B\hat{D}C = ۳۰^\circ$$

روش دوم: روی ساق AC مثلث متساوی‌الاضلاع ACE را می‌سازیم. E را به رأس B وصل می‌کنیم:



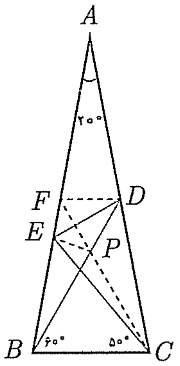
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AE = AC = AB \\ B\hat{A}E = ۴۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{E}B = ۷۰^\circ \\ A\hat{E}C = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{E}C = ۱۰^\circ$$

ضمناً $E\hat{C}B$ برابر ۲۰° است ($۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۲۰^\circ$).

$$\left.\begin{array}{l} BC = DA \\ E\hat{C}B = B\hat{A}D = ۲۰^\circ \\ EC = BA \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{EBC} \cong \overset{\Delta}{BDA}$$

$$\Rightarrow A\hat{B}D = B\hat{E}C = ۱۰^\circ \Rightarrow B\hat{D}C = ۳۰^\circ$$

۲۷- از D خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا AB را در F قطع کند خط CF پاره‌خط BD را در P قطع می‌کند. مثلث BCP متساوی‌الاضلاع است و $BP = BC$. در مثلث متساوی‌الساقین CBE داریم $BE = BC$. بنابراین BPE نیز متساوی‌الساقین بوده و در نتیجه: $B\hat{P}E = ۸۰^\circ$ و $F\hat{P}E = ۴۰^\circ$.

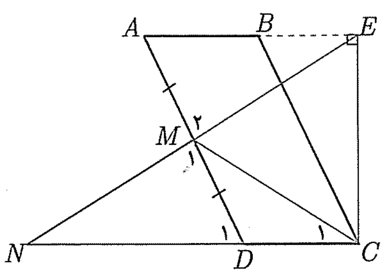


چون زاویه‌ی EFP نیز ۴۰ درجه است پس مثلث FEP متساوی‌الساقین است و $FE = EP$. هم‌چنین $DF = DP$، بنابراین دو مثلث PDE و FDE با هم هم‌نهشت‌اند و DE نیم‌ساز زاویه‌ی FDP بوده و زاویه‌ی EDB برابر ۳۰° است. در نتیجه زاویه‌ی DEC برابر ۸۰° است.

۲۸- (الف) میانه‌ی EM را از طرف M امتداد می‌دهیم تا با امتداد CD در N برخورد کند.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ MD = MA \\ \hat{D}_۱ = \hat{A} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \overset{\Delta}{MDN} \cong \overset{\Delta}{MAE}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MN = ME \qquad (۱)$$



زاویه‌ی ECN طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب، ۹۰° است یعنی مثلث ECN قائم‌الزاویه است و طبق رابطه‌ی (۱) CM میانه‌ی وارد بر وتر آن است

و می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی وتر است. در نتیجه $ME = MC$

ب) با توجه به قسمت الف داریم: $MC = MN$ در نتیجه $\hat{N} = \hat{C}_1$ (۲)
فرض کنیم $A\hat{E}M = x$

$$\left.\begin{array}{l} AE \parallel NC \\ EN \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{N} = x \xrightarrow{(2)} E\hat{M}C = \hat{N} + \hat{C}_1 = 2x$$

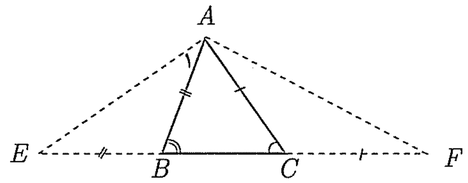
$$AD = 2DC \Rightarrow \frac{AD}{2} = DC \Rightarrow MD = DC \Rightarrow D\hat{M}C = x$$

$$\Rightarrow D\hat{M}E = x + 2x = 3x = 3A\hat{E}M$$

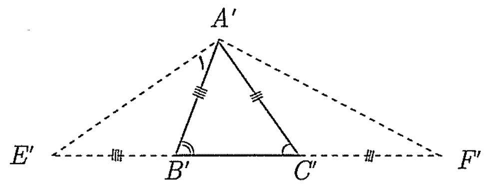
۲۹- فرض کنیم در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ محیط‌ها برابر و $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$ است. ضلع BC را از طرف B به اندازه‌ی AB تا نقطه‌ی E و از طرف C به اندازه‌ی AC تا نقطه‌ی F امتداد می‌دهیم. هم‌چنین ضلع $B'C'$ را از طرف B' به اندازه‌ی $A'B'$ تا نقطه‌ی E' و از طرف C' به اندازه‌ی $A'C'$ تا نقطه‌ی F' امتداد می‌دهیم.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \hat{E} = \hat{E}' \\ EF = E'F' \text{(محیط دو مثلث)} \\ \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \hat{F} = \hat{F}' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(زض‌ز)}} \overset{\Delta}{AEF} \cong \overset{\Delta}{A'E'F'}$$

$$\Rightarrow AE = A'E'$$

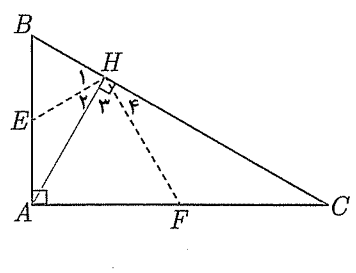


$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \\ AE = A'E' \\ \hat{E} = \hat{E}' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(زض‌ز)}} \Delta ABE \cong \Delta A'B'E' \Rightarrow AB = A'B'$$



از طرفی $B\hat{A}C = B'\hat{A}'C'$ در نتیجه مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ بنابر حالت (زض‌ز) با هم، هم‌نهشتند.

۳۰-



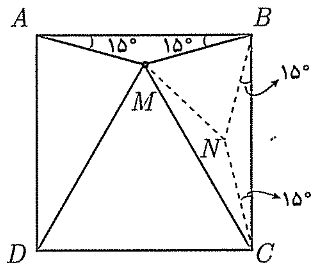
ΔAHB : ($\hat{H} = 90^\circ$ و HE میانه‌ی وارد بر وتر)

$$\Rightarrow HE = BE \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{B}$$

با همین استدلال، $\hat{H}_4 = \hat{C}$ پس:

$$\hat{H}_1 + \hat{H}_4 = \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{H}_2 + \hat{H}_3 = 90^\circ \Rightarrow E\hat{H}F = 90^\circ$$

۳۱- روی ضلع BC و در داخل مربع مثلث NBC را هم‌نهشت با مثلث MAB می‌سازیم.



$$\left.\begin{array}{l} M\hat{B}N = 60^\circ \\ MB = NB \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مثلث متساوی‌الاضلاع است } MBN$$

$$\Rightarrow MN = NB = NC$$

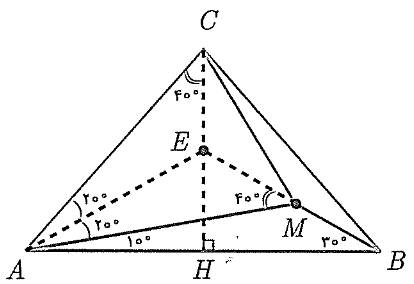
$$\left.\begin{array}{l} B\hat{N}C = 150^\circ \\ M\hat{N}B = 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow M\hat{N}C = 150^\circ \Rightarrow N\hat{M}C = N\hat{C}M = 15^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{M}C = 75^\circ \text{ و } M\hat{C}B = 30^\circ \Rightarrow M\hat{C}D = 60^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BC = MC \Rightarrow MC = DC \\ M\hat{C}D = 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} MCD \\ \text{مثلث متساوی الاضلاع است} \end{array}$$

۳۲- محل تلاقی ارتفاع CH از مثلث ABC با امتداد خط راست BM را E می‌نامیم. داریم: $AE = BE$ پس:

$$E\hat{A}M = E\hat{A}B - M\hat{A}B = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$$



$$E\hat{A}C = C\hat{A}H - E\hat{A}H = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$$

$$A\hat{C}E = \frac{1}{2}A\hat{C}B = 40^\circ$$

$$A\hat{M}E = M\hat{A}B + M\hat{B}A = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{E}M = A\hat{E}C = 120^\circ$$

دو مثلث AME و ACE به حالت دو زاویه و ضلع بین با هم هم‌نهشت‌اند. بنابراین:

$$AM = AC \Rightarrow A\hat{M}C = A\hat{C}M = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ) = ۷۰^\circ$$

۱- در مثلث ABC داریم: $\hat{A}=۵x-۲۰^\circ$ و اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی C، $۳x+۳۰^\circ$ است. حدود x را تعیین کنید.

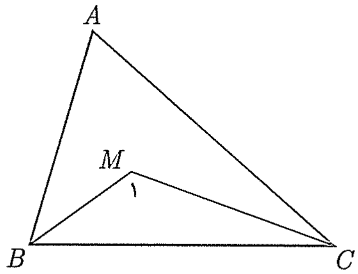
۲- در مثلث ABC با محیط ۱۲، اگر AC بزرگ‌ترین ضلع باشد (AC از AB و BC بزرگ‌تر باشد) ثابت کنید. $AC>۴$

۳- در مثلث ABC، I محل برخورد نیم‌سازهای داخلی است اگر $B\hat{I}C=۱۲۰^\circ$ و $A\hat{I}C=۱۳۰^\circ$ باشد، کوچک‌ترین ضلع مثلث کدام ضلع است؟

۴- نقطه‌ی D روی قاعده‌ی AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC قرار دارد ثابت کنید $BD<BA$.

۵- در مثلث ABC $(AB<AC)$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ثابت کنید $B\hat{A}H<C\hat{A}H$

۶- M نقطه‌ای درون مثلث ABC است و داریم $\hat{A}=(۴x-۱۲)^\circ$ و $\hat{M}_۱=(۲۰x-۴۸)^\circ$. حدود x را تعیین کنید.



۷- کدام دسته از اندازه‌های زیر می‌تواند اضلاع یک مثلث باشد؟

۱) ۲ و ۳ و ۵ ۲) ۲ و $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$

۳) ۴ و ۲/۵ و ۷ ۴) $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۵}$ و ۵

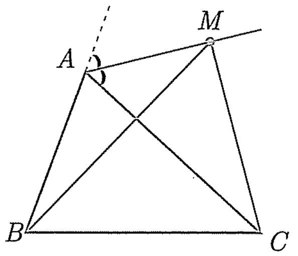
۸- سه پاره‌خط به اندازه‌های $۶x$، $x+۷$ و $۴-۴x$ اضلاع مثلثی هستند مجموعه‌ی مقادیر x را بدست آورید.

۹- ثابت کنید در هر چهارضلعی محدب مجموع دو قطر از محیط چهارضلعی کم‌تر و از نصف محیط آن بیش‌تر است.

۱۰- اگر M نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC باشد ثابت کنید:

$$\frac{AB+AC+BC}{۲}<MA+MB+MC<AB+AC+BC$$

۱۱- نقطه‌ی M روی نیم‌سازی خارجی زاویه‌ی A در مثلث ABC قرار دارد ثابت کنید. $MB+MC>AB+AC$



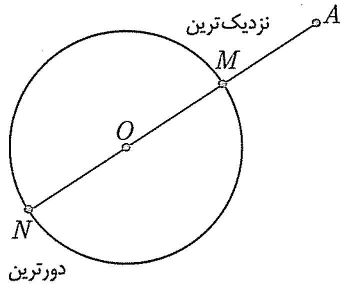
۱۲- در چهار ضلعی $ABCD$ اضلاع AB و CD به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اضلاع هستند، در این چهار ضلعی $\hat{C}+\hat{D}$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۶۰° ۲) ۱۷۵°

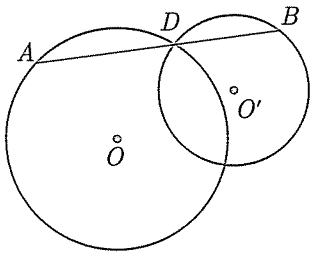
۳) ۱۵۰° ۴) ۲۱۰°

۱۳- مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و M نقطه‌ی دلخواهی درون مثلث است ثابت کنید MA، MB و MC می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند.

۱۴- در شکل زیر ثابت کنید نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره نسبت به نقطه‌ی A دو انتهای قطری هستند که از A می‌گذرد.



۱۵- در شکل زیر خط گذرنده از D دو دایره را در A و B قطع می‌کند. ثابت کنید $AB\le ۲OO'$ (D یکی از نقاط برخورد دو دایره است).



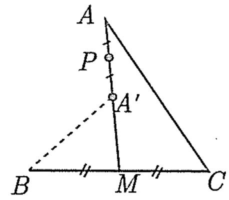
۱۶- نقاط A و B در خارج خط d و یک طرف خط d مفروض‌اند نقطه‌ی M را روی خط d طوری بیابید که $|MA-MB|$ حداکثر مقدار ممکن باشد.

۱۷- در مثلث ABC می‌دانیم AM میانه است ثابت کنید:

$$\frac{|AB-AC|}{۲}<AM<\frac{AB+AC}{۲}$$

۱۸- در شکل زیر M وسط BC و P وسط AA' است ثابت کنید:

$A'B + AC > 2PM$



۱۹- نقطه‌ی M درون چهارضلعی $ABCD$ قرار دارد ثابت کنید:

$MA + MB + MC + MD \geq AC + BD$

حالت تساوی در چه شرایطی رخ می‌دهد؟

۲۰- مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و P نقطه‌ای روی ضلع BC است. ثابت کنید: $AB > AP > PB$

۲۱- در مثلث ABC $(AB < AC)$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم ثابت کنید: $CH > BH$.

۲۲- ثابت کنید در هر مثلث نیم‌سازهای خارجی دو زاویه و امتداد نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی سوم همرس‌اند.

۲۳- نقطه‌ی H محل همرسی ارتفاع‌های مثلث ABC است. نقطه‌ی A برای مثلث BHC چه نقطه‌ای است؟

۱) محل تقاطع عمودمنصف‌ها ۲) محل همرسی ارتفاع‌ها

۳) محل تقاطع دو نیم‌ساز خارجی ۴) مرکز ثقل

۲۴- اگر I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC و I_a، I_b و I_c محل همرسی دوبه‌دو نیم‌سازهای خارجی باشند نقطه‌ی I برای مثلث $I_aI_bI_c$ چه نقطه‌ای محسوب می‌شود؟

۱) مرکز دایره‌ی محاطی ۲) مرکز ثقل

۳) محل همرسی ارتفاع‌ها ۴) محل همرسی عمودمنصف‌ها

۲۵- در یک چهارضلعی محدب عمودمنصف‌های سه ضلع در یک نقطه همرس‌اند. ثابت کنید عمودمنصف ضلع چهارم نیز از آن نقطه می‌گذرد.

۲۶- در مثلث ABC داریم $BC = 14$ و $AM = 7$ (M وسط BC است.) فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC را از رأس A بیابید.

۲۷- در مثلث ABC، $\hat{A} = 80^\circ$ است، حدود زاویه‌ی B را طوری بیابید که محل برخورد عمودمنصف‌ها در بیرون مثلث باشد.

۲۸- در مثلث ABC نقاط I و I' به ترتیب مراکز دایره‌های محاطی داخلی و محاطی خارجی روبه‌روی رأس A هستند. اگر M وسط پاره‌خط II' و $\hat{A} = 80^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی BMC را بدست آورید.

۲۹- در یک مثلث متساوی‌الساقین اندازه‌ی قاعده برابر ۸ و مساحت برابر ۳۲ است. فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی از قاعده‌ی مثلث را بیابید.

۳۰- در مثلث ABC نقاط D و E به ترتیب روی AC و AB قرار دارند به طوری که $E\hat{C}B = 30^\circ$ و $D\hat{B}C = 2A\hat{B}D = 2A\hat{C}E = 40^\circ$. اگر محل برخورد CE و BD را F بنامیم زاویه‌ی FAD چند درجه است؟

۳۱- در مثلث ABC $(\hat{C} = 120^\circ)$، نیم‌سازهای AA'، BB' و CC' را رسم می‌کنیم اندازه‌ی زاویه‌ی $B'C'A'$ را بیابید.

۱- هر زاویه‌ی خارجی در هر مثلث از هر زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است یعنی $۳x+۳۰^\circ > ۵x-۲۰^\circ$ از طرفی باید داشته باشیم:

$۳x+۳۰^\circ<۱۸۰^\circ$ و $۵x-۲۰^\circ>۰^\circ$

$\Rightarrow ۲x<۵۰^\circ \Rightarrow x<۲۵^\circ$

$۵x-۲۰^\circ>۰^\circ \Rightarrow ۵x>۲۰^\circ \Rightarrow x>۴^\circ$

$۳x+۳۰^\circ<۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳x<۱۵۰^\circ \Rightarrow x<۵۰^\circ$

حال باید از سه رابطه‌ی داده شده اشتراک بگیریم. در نتیجه خواهیم داشت

$۴^\circ<x<۲۵^\circ$

۲-

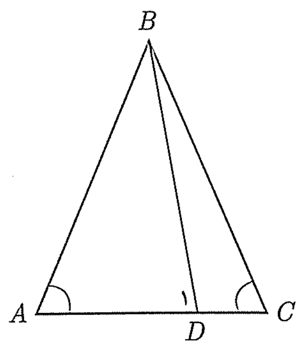
$$AC>AB \text{ و } AC>BC \xrightarrow{+} ۲AC>AB+BC$$
$$\xrightarrow{+AC} ۳AC>AB+BC+AC$$
$$\Rightarrow ۳AC>۱۲ \Rightarrow AC>۴$$

۳- با توجه به رابطه‌ی زاویه‌ی بین دو نیم‌ساز داخلی داریم:

$$B\hat{I}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow ۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}=۱۲۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲}=۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ$$
$$A\hat{I}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow ۹۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲}=۱۳۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{۲}=۴۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{C}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B})=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۸۰^\circ)=۱۸۰^\circ-۱۴۰^\circ=۴۰^\circ$$

زاویه‌ی C کوچک‌ترین زاویه است در نتیجه ضلع AB کوچک‌ترین ضلع است.

۴- $D_۱$ زاویه‌ی خارجی در مثلث BCD است. در نتیجه:



$$\hat{D}_۱>C \xrightarrow{\hat{C}=\hat{A}} \hat{D}_۱>\hat{A} \Rightarrow AB>BD$$

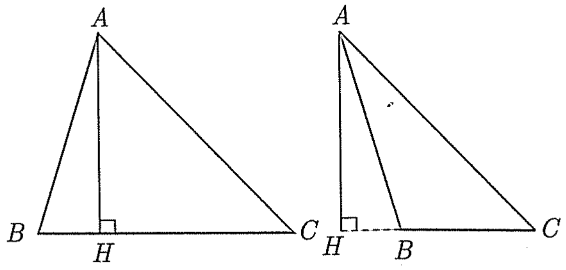
(در مثلث ABD ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر)

۵- اگر زاویه‌ی B حاده نباشد با توجه به شکل بدیهی است که

$B\hat{A}H<C\hat{A}H$

اگر زاویه‌ی B حاده باشد با توجه به $AB<AC$ داریم $\hat{C}<\hat{B}$ از طرفی داریم:

$\hat{C}+C\hat{A}H=\hat{B}+B\hat{A}H=۹۰^\circ$ در نتیجه داریم: $B\hat{A}H<C\hat{A}H$



۶- با توجه به مسئله‌ی ۱ باید داشته باشیم

$(۱)\ ۲۰x-۴۸^\circ>۴x-۱۲^\circ$

همچنین باید داشته باشیم: $(۲)\ ۴x-۱۲^\circ>۰$

$(۳)\ ۲۰x-۴۸^\circ<۱۸۰^\circ$

$(۱)\ ۲۰x-۴x>۴۸^\circ-۱۲^\circ \Rightarrow ۱۶x>۳۶^\circ \Rightarrow x>\frac{۹^\circ}{۴}$

$(۲)\ ۴x>۱۲^\circ \Rightarrow x>۳^\circ$

$(۳)\ ۲۰x<۱۸۰^\circ+۴۸^\circ \Rightarrow ۲۰x<۲۲۸ \Rightarrow x<\frac{۵۷^\circ}{۵}$

$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow ۳^\circ<x<\frac{۵۷^\circ}{۵}$

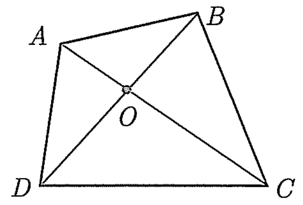
۷- در گزینه‌ی (۱) چون $۵\not<۳+۲$ و در گزینه‌ی (۳) چون $۷\not<۲/۵+۴$ و در گزینه‌ی (۴) چون $۵\not<\sqrt{۵}+\sqrt{۵}$ است پس اندازه‌های داده شده نمی‌توانند اضلاع یک مثلث باشند ولی اندازه‌های داده شده در گزینه ۲ می‌توانند اضلاع مثلث باشند ($۲<\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}<۲$ و $\sqrt{۲}<۲$).

۸- باید هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد.

$$\begin{cases} ۶x<x+۷+۴x-۴ \\ x+۷<۶x+۴x-۴ \\ ۴x-۴<x+۷+۶x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<۳ \\ \frac{۱۱}{۹}<x \\ -\frac{۱۱}{۳}<x \end{cases}$$

از این جواب‌ها اشتراک می‌گیریم و به نامساوی $\frac{۱۱}{۹}<x<۳$ می‌رسیم.

۹- دو قطر AC و BD در چهار ضلعی $ABCD$ را رسم می‌کنیم. اگر نقطه‌ی O نقطه‌ی تلاقی آن‌ها باشد از نامساوی مثلث استفاده کرده و می‌نویسیم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{OAB} \ : \ OA+OB>AB \\ \overset{\Delta}{OBC} \ : \ OB+OC>BC \\ \overset{\Delta}{ODC} \ : \ OC+OD>DC \\ \overset{\Delta}{OAD} \ : \ OA+OD>AD \end{array}\right\} \xrightarrow{+}$$

$$۲OA+۲OB+۲OC+۲OD>AB+BC+DC+AD$$

$$\Rightarrow AC+BD > \frac{AB+BC+DC+AD}{۲}$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

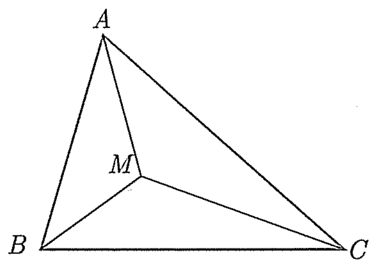
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} \ : \ AC<AB+BC \\ \overset{\Delta}{ABD} \ : \ BD<AB+AD \\ \overset{\Delta}{ADC} \ : \ AC<AD+DC \\ \overset{\Delta}{BDC} \ : \ BD<BC+CD \end{array}\right\} \xrightarrow{+}$$

$$AC+BD<AB+BC+DC+AD$$

پس مجموع دو قطر در چهارضلعی محدب از محیط آن کوچک‌تر و از نصف محیط بزرگ‌تر است.

۱۰- با استفاده از مسئله‌ی ۳ داریم: $MB+MC<AB+AC$ و با استفاده از نامساوی مثلث در مثلث MBC داریم $BC<MB+MC$

در نتیجه داریم: $BC<MB+MC<AB+AC$



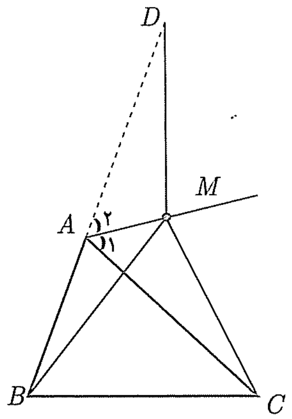
مانند همین اثبات می‌شود: $AC<MA+MC<BA+BC$

و $AB<MA+MB<CA+CB$. با جمع کردن این روابط داریم:

$$BC+AC+AB<MB+MC+$$
$$MA+MC+MA+MB<AB+AC+BA+BC+CA+CB$$
$$\Rightarrow AB+AC+BC<۲MA+۲MB+۲MC<۲AB+۲AC+۲BC$$
$$\Rightarrow \frac{AB+AC+BC}{۲}<MA+MB+MC<AB+AC+BC$$

۱۱- در امتداد ضلع BA پاره‌خط AD را مساوی AC جدا می‌کنیم. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} AD=AC \\ \hat{A}_۲=\hat{A}_۱ \\ AM=AM \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض‌زض})} \overset{\Delta}{AMD} \cong \overset{\Delta}{AMC} \Rightarrow MD=MC$$



بنابر قضیه‌ی نامساوی در مثلث BMD می‌نویسیم:

$$BD<MB+MD \Rightarrow AB+AD<MB+MD$$

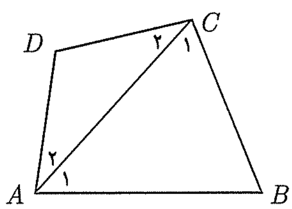
چون $AD=AC$ و $MD=MC$ نتیجه می‌گیریم:

$$AB+AC<MB+MC$$

(با رسم عمودهایی از M بر AC و AB و استفاده از این که هم‌اندازه‌اند نیز می‌توان مسئله را حل کرد.)

۱۲- قطر AC را در چهارضلعی $ABCD$ رسم می‌کنیم چون AB بزرگ‌ترین ضلع و CD کوچک‌ترین ضلع این چهارضلعی است پس نتیجه می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB>BC \ \ \Rightarrow \hat{C}_۱>\hat{A}_۱ \\ AD>DC \ \Rightarrow \hat{C}_۲>\hat{A}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \hat{C}>\hat{A}$$



اگر قطر BD را رسم کنیم به همین ترتیب ثابت می‌شود $\hat{D}>\hat{B}$ در نتیجه داریم:

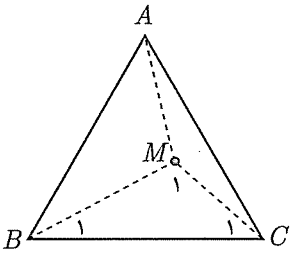
$$\left.\begin{array}{l} \hat{C}>\hat{A} \\ \hat{D}>\hat{B} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \hat{C}+\hat{D}>\hat{A}+\hat{B}$$

$$\Rightarrow \hat{C}+\hat{D}>۳۶۰^\circ-(\hat{C}+\hat{D}) \Rightarrow \hat{C}+\hat{D}>۱۸۰^\circ$$

و تنها گزینه‌ی (۴) از ۱۸۰° بزرگ‌تر است پس گزینه‌ی (۴) درست است.

۱۳- باید ثابت کنیم مجموع اندازه‌ی هر دو تا از این پاره‌خط‌ها از اندازه‌ی پاره‌خط سوم بیش‌تر است. ابتدا نامساوی مثلثی را در مثلث AMC می‌نویسیم.

$AM+MC>AC$



به زاویه‌های مثلث BMC توجه کنید:

$\hat{B}_1<60^\circ$ و $\hat{C}_1<60^\circ$

پس $B\hat{M}C>60^\circ$، بنابراین داریم: $B\hat{M}C>\hat{C}_1 \Rightarrow BC>BM$

با توجه به مثلث متساوی‌الاضلاع داریم: $BC=AC$

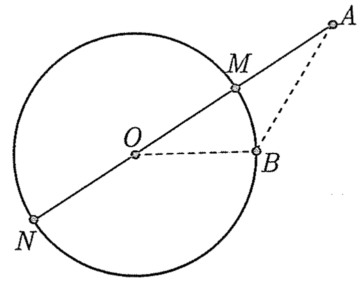
$\Rightarrow AM+MC>BC>BM$

به همین ترتیب برای مجموع دو پاره‌خط دیگر نیز حکم می‌تواند ثابت شود.

۱۴- برای نقطه‌ی دلخواهی مانند B روی دایره ثابت می‌کنیم:

$MA<BA<NA$

از B به O و A وصل می‌کنیم. طبق نامساوی مثلثی در مثلث AOB داریم:



$AB+BO>AO$

$\Rightarrow AB+BO>AM+OM$

$\Rightarrow AB>AM$

هم‌چنین می‌توانیم بنویسیم:

$AO+OB>AB$

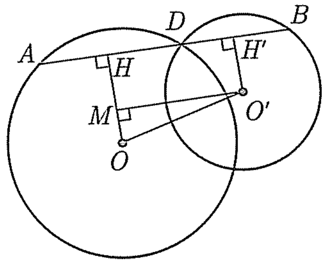
$\Rightarrow AO+ON>AB \Rightarrow AN>AB$

۱۵- از نقاط O و O' عمودهایی بر AD و BD رسم می‌کنیم، این عمودها از وسط‌های AD و DB می‌گذرند (اندازه‌ی پاره‌خط‌های OA و OD برابرند که شعاع هستند.).

بنابراین:

$AH=HD$ و $DH'=H'B$

$\Rightarrow HH'=\frac{AB}{2}$



از طرفی اگر از O' بر OH عمود رسم کنیم چهار ضلعی $O'MHH'$ مستطیل است و $O'M=HH'$ هم‌چنین در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OO'M$ وتر از ضلع قائم بزرگ‌تر است یعنی:

$OO'>O'M \Rightarrow OO'>HH' \Rightarrow OO'>\frac{AB}{2} \Rightarrow 2OO'>AB$

حالت تساوی زمانی رخ می‌دهد که: $AB \parallel OO'$

حالتی که AB از مرکز دایره‌ی O' بگذرد نیز $O'M$ بر HH' منطبق می‌شود.

مسئله را در حالتی که AB پاره‌خط OO' (و نه امتداد آن) را قطع کند حل کنید.

۱۶- اگر سه نقطه‌ی A، B و M یک مثلث تشکیل دهند داریم:

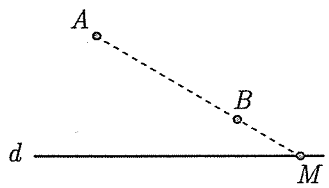
$AB+MB>MA \Rightarrow AB>MA-MB$

$AB+MA>MB \Rightarrow AB>MB-MA$

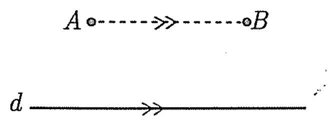
بنابراین حداکثر $|MA-MB|$ مربوط به زمانی است که مثلث تشکیل نشود!

با توجه به موقعیت نقاط A و B نسبت به خط d حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: نقاط A و B یک طرف خط d باشند و AB با خط d موازی نباشد. در این صورت امتداد AB با خط d در M متقاطع است و $|MA-MB|$ حداکثر مقدار ممکن است. (چرا؟)

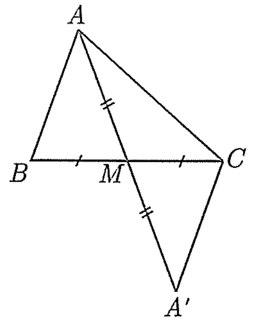


حالت دوم: پاره‌خط AB با خط d موازی است. در این‌صورت نمی‌توان نقطه‌ی M را مشخص کرد. (چرا؟)



مسئله را در حالتی حل کنید که A و B دو طرف خط d باشند.

۱۷- میانه را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه‌ی A' برسیم. دو مثلث ABM و $A'CM$ به حالت (ض‌زض) هم‌نهشت هستند و داریم: $AB = A'C$



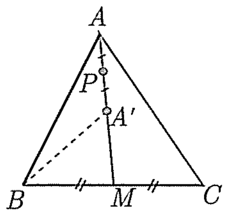
نامساوی مثلثی در مثلث ACA'را در نظر بگیرید:

$$|AC - A'C| < AA' < AC + A'C$$
$$\Rightarrow |AC - AB| < ۲AM < AC + AB$$

پس $\frac{|AC - AB|}{۲} < AM < \frac{AC + AB}{۲}$

۱۸- از A به B وصل می‌کنیم.

از مسئله‌ی قبل می‌دانیم:



$$AB + AC > ۲AM \qquad (۱)$$

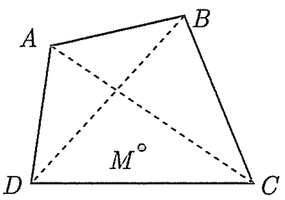
نامساوی مثلثی:

$$AA' + A'B > AB \qquad (۲)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$AC + AA' + A'B > ۲AM$$
$$AC + AA' + A'B > ۲AA' + ۲A'M$$
$$\Rightarrow AC + A'B > AA' + ۲A'M$$
$$\xrightarrow{AA' = ۲PA'} AC + A'B > ۲(PA' + A'M)$$
$$\Rightarrow AC + A'B > ۲(PM)$$

۱۹- از نکته ۱ استفاده می‌کنیم:



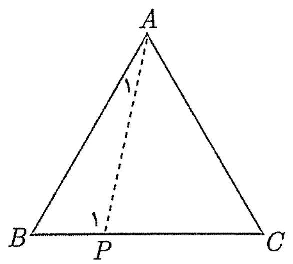
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ACM} : MA + MC \geq AC \\ \overset{\Delta}{BDM} : MB + MD \geq BD \end{array}\right\}$$

از جمع طرفین روابط بالا نتیجه می‌گیریم:

$$MA + MB + MC + MD \geq AC + BD$$

اگر M محل برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$ باشد نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

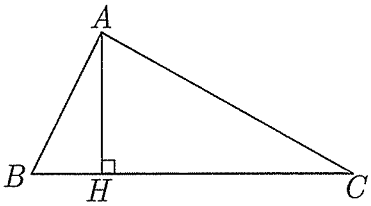
۲۰- در مثلث APB زاویه‌ی B برابر ۶۰° و زاویه‌ی $A_۱$ کم‌تر از ۶۰° و زاویه‌ی $P_۱$ بیش‌تر از ۶۰° است.



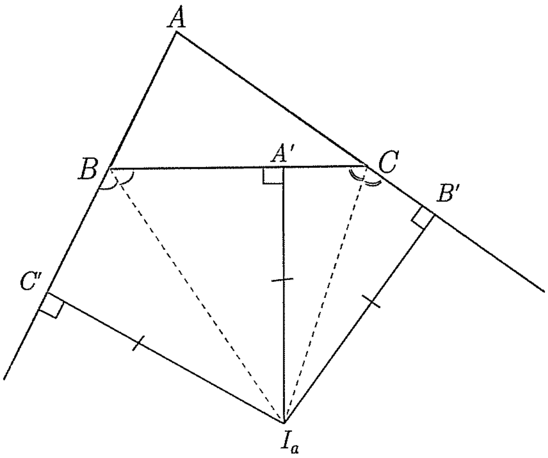
$$\hat{P}_۱ > \hat{B} > \hat{A}_۱ \Rightarrow AB > AP > BP$$

۲۱-

$$\left.\begin{array}{l} CH^۲ = AC^۲ - AH^۲ \\ BH^۲ = AB^۲ - AH^۲ \end{array}\right. \xrightarrow{AC > AB} CH^۲ > BH^۲$$
$$\Rightarrow CH > BH$$



۲۲- فرض کنید نیم‌سازهای خارجی زوایای B و C از مثلث ABC در نقطه‌ی I_a متقاطع باشند، از نقطه‌ی I_a عمود I_aA'، I_aB' و I_aC' را به ترتیب بر اضلاع BC و امتداد اضلاع AC و AB رسم می‌کنیم.

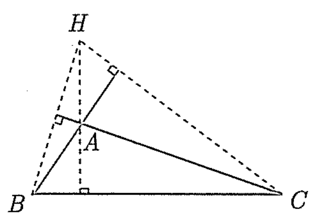


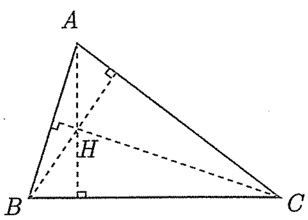
$$\left.\begin{array}{l} \text{نیم‌ساز } BI_a \Rightarrow I_aA' = I_aC' \\ \text{نیم‌ساز } CI_a \Rightarrow I_aA' = I_aB' \end{array}\right\} \Rightarrow I_aB' = I_aC'$$

پس نقطه‌ی I_a به فاصله‌ی یکسان از اضلاع زاویه‌ی A قرار دارد در نتیجه روی نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A قرار دارد. پس نیم‌سازهای خارجی B و C و نیم‌ساز داخلی A هر سه از نقطه‌ی I_a می‌گذرند و نقطه‌ی I_a محل همرسی آن‌ها است.

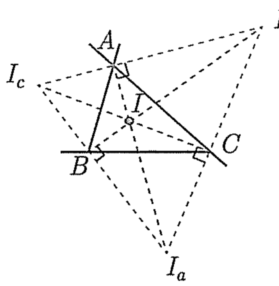
۲۳- در شکل‌های زیر نقطه‌ی H برای دو مثلث ABC با زاویه‌های حاده و منفرجه مشخص شده است.

توجه کنید موقعیت نقاط A و H در دو شکل پایین یکسان است. پس A برای مثلث BHC نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها است.

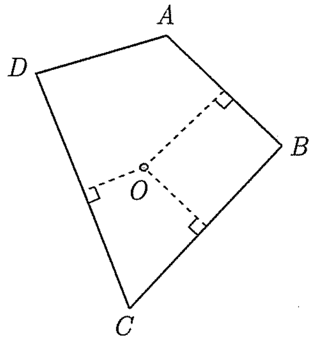




۲۴- مطابق شکل در نقطه‌ی A نیم‌سازهای داخلی و خارجی بر هم عمودند پس I محل برخورد ارتفاع‌ها است.



۲۵- فرض کنید عمودمنصف‌های اضلاع AB، BC و CD در نقطه‌ی O همرس باشند:



چون O روی عمودمنصف‌های اضلاع AB، BC و CD قرار دارد پس از دو سر آن اضلاع به یک فاصله است یعنی:

$$OA = OB$$

$$OB = OC$$

$$OC = OD$$

با مقایسه این رابطه‌ها به تساوی $OA = OD$ می‌رسیم در نتیجه طبق عکس خاصیت عمودمنصف یک پاره‌خط، نقطه‌ی O باید روی عمودمنصف ضلع AD نیز باشد.

۲۶- از آن‌جایی که اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر یک ضلع نصف اندازه‌ی آن ضلع است $(AM = \frac{BC}{۲})$ پس مثلث ABC در رأس A قائمه است و در مثلث قائم‌الزاویه مرکز دایره‌ی محیطی وسط وتر است که در این‌جا همان M است و مسئله فاصله‌ی M از A را می‌خواهد که همان اندازه‌ی AM است و برابر است با ۷.

۲۷- برای این که محل برخورد عمودمنصف‌ها در بیرون مثلث باشد و از آن‌جایی که زاویه‌ی A حاده است باید یکی از زوایای B یا C منفرجه باشد.

اگر $\left.\begin{array}{r} \hat{B} > ۹۰^\circ \\ \hat{A} = ۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow ۹۰^\circ < \hat{B} < ۱۰۰^\circ$

اگر $\hat{C} > ۹۰^\circ \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \hat{A} + \hat{B} < ۹۰^\circ \\ \hat{A} = ۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow ۰^\circ < \hat{B} < ۱۰^\circ$

$\Rightarrow ۹۰^\circ < \hat{B} < ۱۰۰^\circ$ یا $۰^\circ < \hat{B} < ۱۰^\circ$

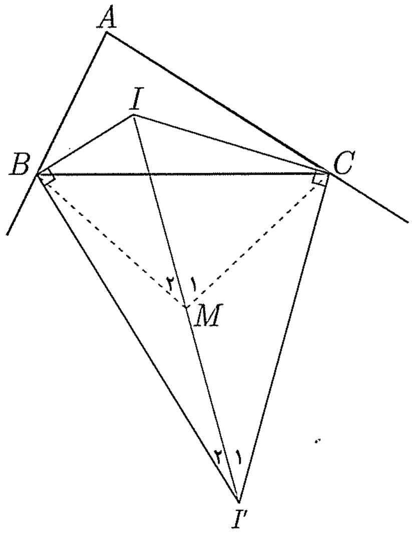
۲۸- می‌دانیم I محل برخورد نیم‌سازهای داخلی زوایای B و C و نیز I' محل برخورد نیم‌سازهای خارجی زوایای B و C است.

مثلث‌های IBI' و نیز ICI' قائم‌الزاویه‌اند:

در این مثلث‌ها پاره‌خط‌های BM و CM میانه‌ی وارد بر وتر هستند، بنابراین:

$$\overset{\Delta}{IBI'} : BM = IM = MI' \Rightarrow \hat{M}_۲ = ۲\hat{I}'_۲$$

$$\overset{\Delta}{ICI'} : CM = IM = MI' \Rightarrow \hat{M}_۱ = ۲\hat{I}_۱$$



در نتیجه:

$$\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲ = ۲(\hat{I}'_۱ + \hat{I}'_۲) \Rightarrow B\hat{M}C = ۲(B\hat{I}'C)$$

از طرفی:

$$B\hat{I}'C = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

پس:

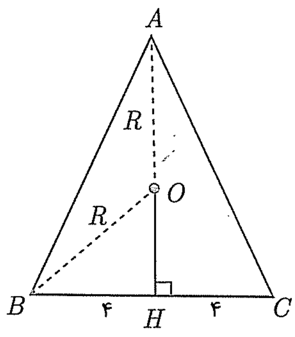
$$B\hat{M}C = ۲(۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}) = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$$

یعنی:

$$B\hat{M}C = ۱۰۰^\circ$$

۲۹- مرکز دایره‌ی محیطی محل همرسی عمودمنصف‌ها است که از سه رأس به یک فاصله است فرض کنیم O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد پس باید روی AH باشد و $R = OA = OB$

$$ABC \text{ مساحت مثلث} = \frac{AH \cdot BC}{۲} \Rightarrow ۳۲ = \frac{۸ \times AH}{۲} \Rightarrow AH = ۸$$



بنابراین $OH = ۸ - R$

از رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث OBH استفاده می‌کنیم:

$$OB^{۲} = OH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow R^{۲} = (۸-R)^{۲} + ۴^{۲} \Rightarrow R = ۵$$

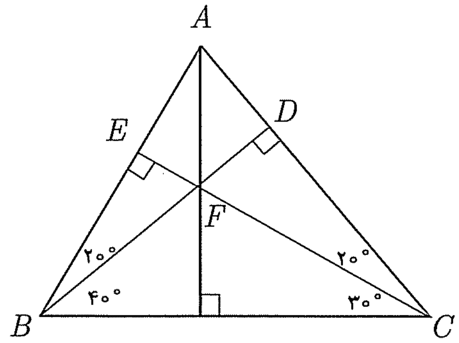
پس $OH = ۳$ است.

-۳۰

$D\hat{B}C = ۴۰^\circ$ و $A\hat{B}D = A\hat{C}E = ۲۰^\circ$

$\Rightarrow B\hat{D}C = ۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ - ۵۰^\circ = ۹۰^\circ$

$C\hat{E}B = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ - ۳۰^\circ = ۹۰^\circ$



در نتیجه BD و CE ارتفاع هستند.

حال از آن‌جایی که ارتفاع‌ها همرس‌اند، AF بر BC عمود است و ارتفاع است.

$\Rightarrow F\hat{A}D = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ - ۵۰^\circ = ۴۰^\circ$

-۳۱ در مثلث BCC'، BB' نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی B و CB' نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی C است. از آن‌جایی که در هر مثلث نیم‌سازهای خارجی دو زاویه و نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی سوم همرس هستند، نتیجه می‌گیریم که $C'B'$ باید نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی C' از مثلث BCC' باشد. مانند همین اثبات می‌شود که $C'A'$ نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی C' از مثلث $CC'A$ است یعنی نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی $CC'B$ است. از طرفی می‌دانیم نیم‌سازهای داخلی و خارجی یک زاویه بر هم عمودند. پس: $A'\hat{C}'B' = ۹۰^\circ$