باسمه تعالی

****

**گروه فیزیک دبیرستان علامه حلی تهران**

**جزوه آموزشي تحليل ابعادي**

**سال تحصيلي 93- 92**

**جزوه تحلیل ابعادی**

قبل از هر چیز بگذار یک بار مفهوم بُعد را مرور کنیم. ما درباره کمیت صحبت کردیم و گفتیم کمیت یعنی هر چیزی که قابل اندازه گیری باشد و گفتیم دو جور کمیت داریم:

**کمیت های اصلی:** که از کمیت دیگری به دست نمی آیند. مثل: جرم (m)، طول (l)، زمان (s)، دما (T) و چهار کمیت دیگر.

کمیت های فرعی: که از ترکیب دو یا چند کمیت اصلی به دست می آیند. مثل: سرعت (v)، فشار (P)، نیرو (F)، و ده ها کمیت دیگر.

منظورمان را با کمیت سرعت ادامه می دهیم. مثلاً فرض کن می گوییم سرعت متحرکی $3 \frac{m}{s}$ است. اگر تبدیل واحد بلد باشی (که باید بلد باشی) می دانی این حرف مثل این است که بگوییم سرعت همان متحرک $10.8 \frac{km}{h}$ است. در اینجا ما از دو واحد متفاوت برای بیان سرعت استفاده کردیم، اما در هر دو حالت اگر به واحدها نگاه کنی می بینی که یک کمیت طول (m یا km) تقسیم بر یک کمیت زمان (s یا h) شده است. اصولاً هر واحد دیگری (مثلاً $\frac{inch}{min}$) برای سرعت به کار ببریم باز داریم یک کمیت طول را بر یک کمیت زمان تقسیم می کنیم. پس می گوییم بُعد کمیت سرعت برابر است با $\frac{طول کمیت}{زمان کمیت}$ و این را اینگونه نشان می دهیم: $\frac{\left[L\right]}{\left[T\right]}$

یعنی هرکجا خواستیم بگوییم منظور ما بُعد یک کمیت است باید آن را داخل کروشه بگذاریم و گرنه غلط نوشته ایم.

بُعد کمیت طول را با $[L]$، بُعد کمیت زمان را با $[T]$ و بُعد کمیت جرم را با $[M]$ نشان می­دهیم. دقت کنید که وقتی می خواهیم بعد این سه کمیت را نشان دهیم نه تنها آنها را داخل کروشه می گذاریم بلکه این سه تا را با حروف بزرگ می نویسیم.

پس اگر خواستیم بعد هر کمیت را نشان دهیم:

اگر کمیت اصلی باشد که هچ! خود جرم و طول و زمان بعدشان معلوم است. یعنی: $[M]$ و $[L]$ و $[T]$

اگر کمیت فرعی بود، باید بتوانیم بعد آن را با بعد کمیت های اصلی نشان دهیم. شبیه مثال سرعت.

در ضمن، یادت باشد مفهوم بعد با مفهوم واحد دو تا چیز جدا هستند.

سوال: از کجا بفهمیم بعد کمیت های فرعی چیستند؟

جواب: دو راه داریم:

راه اول: از واحد آن چیز کمک بگیریم. مثلاً شتاب که یک کمیت اصلی است را نگاه کن. واحدش چیست؟ متر بر مجذور ثانیه. پس بعد آن می شود: $\frac{\left[L\right]}{\left[T\right]^{2}}$ یا مثلاً یکی از واحد های حجم cm3 است، پس بعدش می شود $[L]^{3}$

یادآوری: از آنجا که شتاب گرانشی زمین (g) هم یک جور شتاب است پس بعد آن همان بعد شتاب است.

نکته مهم: حواست باشد توان را باید بیرون کروشه بنویسی.

راه دوم: با کمک گرفتن از فرمول آن. مثلاً می خواهیم ببینیم بعد نیرو $[F]$چیست. فرمول نیرو چیست؟ $F=m.a$ پس می توانیم بنویسیم:

$$\left[F\right]=\left[m\right].[a]$$

بعد $a$ (شتاب) چه بود؟خواهی گفت $\frac{\left[L\right]}{\left[T\right]^{2}}$

بعد $m$ (جرم) چه بود؟ همان خود جرم یعنی $\left[M\right]$

پس:

$$\left[F\right]=\left[M\right]. \frac{\left[L\right]}{\left[T\right]^{2}}=\frac{\left[M\right][L]}{[T]^{2}}$$

یا مثلاً می خواهیم ببینیم بعد چگالی $(ρ)$ چیست؟ (به این حرف یونانی داخل پرانتز که نماد چگالی است «رو» می گویند)

$$ρ=\frac{m}{V}\rightarrow [ρ]=\frac{[m]}{[V]}\rightarrow [ρ]=\frac{[M]}{[L]^{3}}$$

پس در همه ی فرمول های عالم، بعد سمت راست معادله با بعد سمت چپ معادله باید برابر باشد، وگرنه غلط است. به بررسی این بعدها در یک معادله، می گوییم تحلیل ابعادی.

به عبارت دیگر، چرا در معادله بالا توانستیم بگوییم بعد F برابر است با بعد $\frac{\left[M\right][L]}{[T]^{2}}$ ؟ جواب: چون بعد دو طرف را برابر گرفتیم، وگرنه که نمی شد.

پس تحلیل ابعادی دست کم به درد دو چیز می خورد:

بفهمیم آیا رابطه غلط است یا نه. یعنی می بینیم بعد دو طرف برابر هستند یا نه.

بعد یک پارامتر مجهول را پیدا کنیم. مثل بعد F که پیدا کردیم.

حالا می خواهیم یاد بگیریم چگونه با کمک تحلیل ابعادی یک فرمول را پیدا کنیم:

سوال:

جسمی به جرم m به فنری وصل است و نوسان می کند. حدس می زنیم که دوره تناوب این نوسان (T) به کمیت هایی نظیر جرم (m)، ضریب سفتی فنر (K) و شتاب گرانشی بستگی داشته باشد. به کمک تحلیل ابعادی این رابطه را پیدا کنید.

جواب:

اگر T به m، K و g بستگی داشته باشد آن را اینگونه نشان می دهیم:

$$T∝\left|\begin{matrix}m\\K\\g\end{matrix}\right.$$

دقت کنید که علامت $∝$ (متناسب است با ...) با علامت = فرق دارد.

که اگر بخواهیم این را به صورت یک رابطه (یعنی بخواهیم از = استفاده کنیم) بنویسیم، می شود:

$$T=z m^{a}K^{b}g^{c}$$

که در آن z یک ضریب است. یعنی یک عدد است. این عدد می تواند 1 باشد، ولی به هر حال ما با تحلیل ابعادی نمی توانیم بگوییم این ضریب چند است. یادمان هم باشد که فرض می کنیم این ضریب بعد ندارد. چگونه می توانیم عدد این ضریب را پیدا کنیم؟ جواب: با آزمایش.

همچنین در رابطه بالا a و b و c توان های فرضی برای پارامتر های ما هستند. ما هنوز نمی دانیم این توان ها چه عددی هستند. این توان ها حتی می توانند صفر باشند، که اگر صفر باشند یعنی آن پارامتر به توان صفر رسیده است، و هر عددی به توان صفر می شود 1.

حال می گوییم بعد دو طرف معادله باید برابر باشند. پس داریم:

$$\left[T\right]=[m]^{a}[K]^{b}[g]^{c}$$

دقت کن که چون z بعد ندارد، آن را ننوشتیم.

از طرفی می دانیم:

$$\left\{\begin{array}{c}\left[m\right]=[M]\\\left[K\right]=\frac{\left[M\right]}{[T]^{2}}\\\left[g\right]=\frac{[L]}{[T]^{2}}\end{array}\right.$$

پس برای سمت راست معادله خواهیم داشت:

$$[M]^{a}\frac{[M]^{b}}{[T]^{2b}}\frac{[L]^{c}}{[T]^{2c}}\rightarrow \frac{[M]^{a+b}[L]^{c}}{[T]^{2(b+c)}}$$

و برای سمت چپ معادله خواهیم داشت:

$$\left[T\right]=[T]$$

دقت کن که منظور از یکی از این T ها زمان است (سمت راستی) و منظور از یکی از این T ها (سمت چپی) دوره تناوب متحرک.

با مساوی قرار دادن بعد دو طرف داریم:

$$\left[T\right]=\frac{[M]^{a+b}[L]^{c}}{[T]^{2(b+c)}}$$

حالا از آنجا که سمت راست و چپ باید برابر باشند، به این نتیجه می رسیم که توان M و L باید صفر بشوند و نیز توان T در سمت راست باید -1 بشود. پس داریم:

$$\left\{\begin{array}{c}c=0\\a+b=0\\2\left(b+c\right)=-1\end{array}\right.$$

که با حل کردن این معادله ها داریم:

$$c=0, b=\frac{-1}{2}, a=\frac{1}{2}$$

پس فرمول ما می شود:

$$T=z m^{\frac{1}{2}}K^{\frac{-1}{2}}g^{0}=z\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{k}}=z\sqrt{\frac{m}{k}}$$

در این مثال من خیلی شمرده شمرده نوشتم تا بهتر متوجه بشوی. لزومی ندارد این همه بنویسی، از طرفی حتماً یک طوری باید بنویسی که آن کسی که می خواند بفهمد چه کار کرده ای. در مثال بعدی طریقه ی نوشتن استاندارد تحلیل ابعادی را برایت می نویسم. سعی کن اینطوری بنویسی:

مثال:

اندازه حرکت (تکانه) هر جسم که آن را با $P$ (با فشار قاطی اش نکنی!) نشان می دهیم، برابر است با حاصل ضرب جرم یک متحرک و سرعت آن $(P=m×v)$. اندازه حرکت را می توان به صورت ترکیبی از نیرو و زمان هم به دست آورد. رابطه $Pو t و F$ را به دست بیاورید.

$$\left\{\left.\begin{matrix}\left[m\right]=[M]\\\left[v\right]=\frac{[L]}{[T]}\end{matrix}\right\}\rightarrow \left[P\right]=\frac{\left[M\right]×[L]}{[T]}\right.$$

$$P=z F^{a}t^{b}$$

$$\left.\begin{matrix}\left[F\right]=\frac{\left[M\right][L]}{[T]^{2}}\\\left[t\right]=[T]\end{matrix}\right\}\rightarrow \left[P\right]=\frac{\left[M\right]^{a}\left[L\right]^{a}}{\left[T\right]^{2a}}×\left[T\right]^{b}=\frac{\left[M\right]^{a}\left[L\right]^{a}}{\left[T\right]^{2a-b}}=\frac{\left[M\right]×[L]}{[T]}$$

$$\left\{\begin{matrix}a=1\\2a-b=1\rightarrow 2-b=1\rightarrow b=1\end{matrix}\right\}\rightarrow P=z Ft$$

در نوشتن راه حل های تحلیل ابعادی سعی کن از پیکان (فلش) و ابرو (آکولاد) به خوبی بهره بگیری تا نوشته ات تر و تمیز از آب در بیاید.

نکته اینکه: همان طور که احتمالاً تا الان فهمیده ای، برای پیدا کردن معادله با کمک تحلیل ابعادی، لزومی ندارد از فرمول و چند و چون آن سر در بیاوریم. منظورم این است که ظاهر فرمول شما را نترساند. لزومی ندارد درس آن فرمول و کاربردهایش را خوانده باشید.

و اما درباره ضریب ها:

ضریب ها در فرمول ها دو جور اند:

یکی ضریب هایی هستند که بعد ندارند. این ضریب ها تکلیف شان معلوم است. یعنی کاری به کارشان نداریم و در تحلیل ابعادی ما وارد نمی شوند اما در فرمول ها هستند. مثل ضریب اصطکاک و ...

ضریب هایی که بعد دارند. مثل ضریب سفتی فنر. این ضریب ها را می توانیم با کمک تحلیل ابعادی بعدشان را پیدا کنیم. مثلاً برای ضریب سفتی فنر داریم:

$$\left\{\begin{array}{c}\left[F\right]=\frac{\left[M\right][L]}{[T]^{2}}\\\left[x\right]=[L]\end{array}\right.$$

$$F=kx\rightarrow k=\frac{F}{x}\rightarrow \left[k\right]=\frac{[F]}{[x]}=\frac{\left[M\right][L]}{[T]^{2}[L]}=\frac{\left[M\right]}{[T]^{2}}$$

یادآوری: آن ضریب z که در مثال های بالا درباره اش صحبت کردیم، هرگز بعد ندارد.